Matematica Discreta e Logica Matematica
CdL in Informatica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.
Università degli Studi di Salerno
A.A. 2008/2009
Compito d'Esame di Geometria
12/06/2009

Esercizio 1. Dimostrare, mediante il teorema di Rouché–Capelli, che il sistema lineare reale

$$S_\alpha : \begin{cases} x & & +2z & = & \frac{1}{2} \\ -x & +2y & & = & \frac{3}{2} \\ x & -\frac{1}{2}y & +\frac{3}{2}z & = & \alpha \end{cases}$$

è compatibile se, e solo se, $\alpha = 0$. Quindi determinare nell'ordine 1) il "numero di soluzioni di S_0" 2) Un sistema ridotto equivalente a S_0 e 3) l'insieme $\mathrm{Sol}(S_0)$ delle soluzioni di S_0.

Esercizio 2. Dimostrare, mediante il teorema spettrale, che l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ -x_1 + 2x_2 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è diagonalizzabile e determinarne una base diagonalizzante.

Esercizio 3 (facoltativo). Dopo avere richiamato i concetti di dipendenza e indipendenza lineare di un sistema di vettori, dimostrare che i vettori numerici

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2, \quad a, b \in \mathbb{Q}$$

sono dipendenti se $a = 0$ o $b = 0$ e sono indipendenti altrimenti.

Soluzioni

Esercizio 1. Siano A e B_α rispettivamente la matrice incompleta e la matrice completa del sistema S_α. Dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

e

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1/2 & 3/2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Il sistema S_α è compatibile sse $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B_\alpha$. Calcoliamo innanzitutto $\operatorname{rk} A$ mediante il teorema degli orlati. $\det A(1,1) = 1 \neq 0$ sicché $\operatorname{rk} A \geq 1$. L'orlato $\det A(1,2;1,2)$ del minore $\det A(1,1)$ è uguale a $2 \neq 0$ sicché $\operatorname{rk} A \geq 2$. Infine calcoliamo $\det A$ mediante la regola di Sarrus:

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \\ &= 3 + 0 + 1 - 4 - 0 - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Perciò $\operatorname{rk} A = 2$. Similmente $\operatorname{rk} B_\alpha \geq 2$. Per calcolarlo mediante il teorema degli orlati è sufficiente calcolare il minore $\det B_\alpha(1,2,3;1,2,4)$. Applichiamo, per esempio, la regola di Sarrus:

$$\begin{aligned} \det B_\alpha(1,2,3;1,2,4) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1/2 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= 2\alpha + 0 + \tfrac{1}{4} - 1 - 0 + \tfrac{3}{4} \\ &= 2\alpha. \end{aligned}$$

Concludiamo che $\operatorname{rk} B_\alpha = \operatorname{rk} A = 2$, e quindi il sistema S_α è compatibile, se, e solo se, $\alpha = 0$.

In particolare, il sistema S_0 è compatibile e ammette ∞^N soluzioni in cui $N = \sharp\{\text{incognite}\} - \operatorname{rk} A = 3 - 2 = 1$.

Giacchè le prime due righe di A sono linearmente indipendenti il sistema

$$S : \begin{cases} x & & +2z & = & \frac{1}{2} \\ -x & +2y & & = & \frac{3}{2} \end{cases}$$

è un sistema ridotto equivalente ad S_0. Per risolvere S, e quindi S_0, possiamo, per esempio, applicare il metodo di eliminazione di Gauss. La matrice completa del sistema S è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

che va ridotta a gradini. Aggiungiamo la prima alla seconda riga di B:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Abbiamo effettuato su B la trasformazione elementare di prima specie

$$B \longrightarrow B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

che è già a gradini. Il sistema S è perciò equivalente al sistema a gradini

$$S' : \begin{cases} x & & +2z & = & \frac{1}{2} \\ & 2y & +2z & = & 2 \end{cases} .$$

I pivot di $B^{'}$ sono gli elementi di posto $(1,1)$ e $(2,2)$ che corrispondono alle incognite x, e y rispettivamente. La rimanente incognita z gioca il ruolo di parametro e "può essere portata a destra dei segni di $=$". Si trova così

$$\begin{cases} x & & = & \frac{1}{2} - 2z \\ & 2y & = & 2 - 2z \end{cases} .$$

Dall'ultima equazione si trova $y = 1 - z$. Riassumendo

$$\mathrm{Sol}(S_0) = \mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(S') = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2t \\ 1 - t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Esercizio 2. La matrice rappresentativa dell'endomorfismo f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A_f := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

e coincide con la matrice A dell'Esercizio 1. Il polinomio caratteristico di f è perciò

$$P_f(t) = P_A(t) = \det(A - t\, I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 2 \\ -1 & 2-t & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - t \end{pmatrix}.$$

Applichiamo la regola di Sarrus:

$$\begin{aligned} P_f(t) &= (1-t)(2-t)\left(\tfrac{3}{2} - t\right) + 0 + 1 - 2(2-t) - 0 - 0 \\ &= (1-t)(2-t)\left(\tfrac{3}{2} - t\right) - 3 + 2t \\ &= \left(\tfrac{3}{2} - t\right)[(1-t)(2-t) - 2] \\ &= \left(\tfrac{3}{2} - t\right)(2 - 3t + t^2 - 2) \\ &= t\left(\tfrac{3}{2} - t\right)(-3 + t) \end{aligned}$$

Concludiamo che $P_f(t)$ ha 3 radici reali, 0, $\frac{3}{2}$ e 3, di molteplicità 1. Dunque gli autovalori di f sono $\lambda_1 := 0$, $\lambda_2 := \frac{3}{2}$ e $\lambda_3 := 3$ e hanno molteplicità algebriche a_1, a_2 e a_3 pari a 1. In particolare $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ e per verificare la diagonalizzabilità di f è sufficiente verificare che le molteplicità geometriche g_1, g_2 e g_3 di λ_1, λ_2 e λ_3 siano anch'esse uguali ad 1. Ora, per ogni $i = 1, 2, 3$, g_i è almeno 1 per definizione di autovalore. D'altrocanto $g_i \leq a_i = 1$. Perciò $g_i = 1$. L'endomorfismo f è dunque diagonalizzabile per il teorema spettrale.

Una base diagonalizzante di f è una base di autovettori di A. Per determinarla, determiniamo, innanzitutto, una base per l'autospazio A_1 relativo all'autovalore λ_1. A_1 coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo S_1 la cui matrice incompleta è $A - \lambda_1 I_3 = A$ e cioè

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & & +2z & = & 0 \\ -x & +2y & & = & 0 \\ x & -\frac{1}{2}y & +\frac{3}{2}z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ora, S_1 è il sistema omogeneo associato al sistema S_0 di cui all'Esercizio 1, sicché $\mathrm{Sol}(S_1)$ si può trovare "mettendo a 0 le costanti nell'espressione per il generico elemento di $\mathrm{Sol}(S_1)$". Concludiamo che

$$\mathrm{Sol}(S_1) = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ed una sua base B_1 si trova sostituendo al parametro t il valore 1:

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Determiniamo ora una base per l'autospazio A_2 relativo all'autovalore λ_2. Analogamente a sopra A_2 coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo S_2 la cui matrice incompleta è

$$A - \lambda_2 I_3 = A - \tfrac{3}{2} I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

e cioè

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{ccccc} -\frac{1}{2}x & & +2z & = & 0 \\ -x & +\frac{1}{2}y & & = & 0 \\ x & -\frac{1}{2}y & 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

La terza equazione di S_2 è proporzionale alla seconda, sicché S_2 è equivalente al sistema ridotto

$$S_2' : \left\{ \begin{array}{ccccc} -\frac{1}{2}x & & +2z & = & 0 \\ -x & +\frac{1}{2}y & & = & 0 \end{array} \right. ,$$

da cui

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z & = & \frac{1}{4}x \\ y & = & 2x \end{array} \right. ,$$

cioè

$$\mathrm{Sol}(S_2) = \mathrm{Sol}(S_2') = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ \frac{1}{4}t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

e una sua base è

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right).$$

Resta da determinare una base per l'autospazio A_3 relativo all'autovalore λ_3. A_3 coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo S_3 la cui matrice incompleta è

$$A - \lambda_3 I_3 = A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1/2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

e cioè

$$S_3 : \begin{cases} -2x & & +2z & = & 0 \\ -x & -y & & = & 0 \\ x & -\frac{1}{2}y & -\frac{3}{2}z & = & 0 \end{cases}.$$

Sappiamo già che una delle tre equazioni di S_3 dipende dalle altre. Giacché le prime due sono indipendenti S_3 è equivalente al sistema ridotto

$$S_3' : \begin{cases} -2x & & +2z & = & 0 \\ -x & -y & & = & 0 \end{cases},$$

Da cui

$$\begin{cases} z & = & x \\ y & = & -x \end{cases},$$

cioè

$$\mathrm{Sol}(S_3) = \mathrm{Sol}(S_3') = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

e una sua base è

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Concludendo il sistema di vettori

$$\mathcal{B} := \text{“}\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3\text{”} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

è una base diagonalizzante per f.

Esercizio 3 (facoltativo). Ricordiamo che un sistema di vettori $(v_1, \ldots, v_k)$ di uno spazio vettoriale V su $\Bbbk = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ è linearmente indipendente se, per definizione, l'unica combinazione lineare nulla di $v_1, \ldots, v_k$ è quella banale, cioè se da

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Bbbk$$

segue $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Un sistema di vettori $(v_1, \ldots, v_k)$ è dipendente se, per definizione, non è indipendente, in particolare se esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Bbbk$ non tutti nulli tali che $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$.

In $\mathbb{Q}^2$ consideriamo dunque i vettori

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Se $a = 0$ o $b = 0$ uno dei due vettori è nullo e, perciò, i due vettori sono dipendenti. Supponiamo, allora, a e b entrambi diversi da 0. Sia

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$$

una loro combinazione lineare nulla. Cioè

$$0 = \alpha_1 \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 a \\ \alpha_2 b \end{pmatrix}$$

da cui segue che

$$\alpha_1 a = \alpha_2 b = 0.$$

Giacché a e b sono diversi da 0, segue $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, cioè la combinazione lineare nulla $\alpha_1 \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ è banale. $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ sono dunque indipendenti.