Matematica Discreta e Logica Matematica
CdL in Informatica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.
Università degli Studi di Salerno
A.A. 2008/2009
**Compito d'Esame di Geometria**
10/07/2009

**Esercizio 1**. Dimostrare, mediante il teorema di Rouché–Capelli, che il sistema lineare reale

$$S: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & -y & +z & & = & -\frac{1}{2} \\ -2x & +y & & -w & = & 1 \\ & -\frac{1}{2}y & +z & -\frac{1}{2}w & = & 0 \end{array} \right.$$

è compatibile. Quindi determinare nell'ordine 1) il "numero di soluzioni di $S$", 2) l'insieme $\mathrm{Sol}(S)$ delle soluzioni di $S$, 3) una base per lo spazio $\mathrm{Sol}(S_0)$ delle soluzioni del sistema omogeneo $S_0$ associato a $S$. Infine, dopo aver richiamato la definizione di sistema ridotto, discutere se $S$ sia o no un sistema ridotto, motivando la risposta.

**Esercizio 2**. Richiamare la definizione di autovalore, autovettore e diagonalizzabilità di una matrice quadrata. Quindi, sia $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Dimostrare, mediante il teorema spettrale, che la matrice reale

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & \varepsilon & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

è diagonalizzabile se, e solo se, $\varepsilon = 0$. In quest'ultimo caso, determinarne una base diagonalizzante.

## Soluzioni

**Esercizio 1.** Siano $A$ e $B$ rispettivamente la matrice incompleta e la matrice completa del sistema $S$. Dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema $S$ è compatibile sse $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$. Calcoliamo innanzitutto $\operatorname{rk} A$ mediante il teorema degli orlati. $\det A(1,1) = 1 \neq 0$ sicché $\operatorname{rk} A \geq 1$. L'orlato $\det A(1,2;1,2)$ del minore $\det A(1,1)$ è uguale a $-1 \neq 0$ sicché $\operatorname{rk} A \geq 2$. Calcoliamo l'orlato $\det A(1,2,3;1,2,3)$ mediante la regola di Sarrus:

$$\begin{aligned} \det A(1,2,3;1,2,3) &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + 0 + 1 - 0 - 2 - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Infine l'orlato

$$\begin{aligned} \det A(1,2,3;1,2,4) &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= -\tfrac{1}{2} + 0 + 0 - 0 + 1 - \tfrac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Perciò $\operatorname{rk} A = 2$. Similmente $\operatorname{rk} B \geq 2$. Per calcolarlo mediante il teorema degli orlati è sufficiente calcolare il minore $\det B(1,2,3;1,2,5)$. Applichiamo, per esempio, la regola di Sarrus:

$$\begin{aligned} \det B(1,2,3;1,2,5) &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 + 0 - \tfrac{1}{2} + 0 + 0 + \tfrac{1}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concludiamo che $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} A = 2$, e quindi il sistema $S$ è compatibile e ammette $\infty^N$ soluzioni in cui $N = \sharp\{\text{incognite}\} - \operatorname{rk} A = 4 - 2 = 2$.

Giacchè le prime due righe di $A$ sono linearmente indipendenti il sistema

$$S' : \begin{cases} x \quad -y \quad +z \qquad = -\frac{1}{2} \\ -2x \quad +y \qquad -w = 1 \end{cases}$$

è equivalente ad $S$. Per risolvere $S'$, e quindi $S$, possiamo, per esempio, applicare il metodo di eliminazione di Gauss. La matrice completa del sistema $S$ è

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

che va ridotta a gradini. Aggiungiamo alla seconda riga il doppio della prima:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Abbiamo effettuato su $B'$ la trasformazione elementare di prima specie

$$B' \longrightarrow B'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

che è già a gradini. Il sistema $S$ è perciò equivalente al sistema a gradini

$$S'' : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & -y & +z & & = & -\frac{1}{2} \\ & -y & +2z & -w & = & 0 \end{array} \right. .$$

I pivot di $B''$ sono gli elementi di posto $(1,1)$ e $(2,2)$ che corrispondono alle incognite $x$, e $y$ rispettivamente. Le rimanenti incognite $z$ e $w$ giocano il ruolo di parametri e "possono essere portate a destra dei segni di =". Si trova così

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & -y & = & -\frac{1}{2} - z \\ & -y & = & -2z + w \end{array} \right. .$$

Dall'ultima equazione si trova $y = 2z - w$ che, sostituita nella prima dà

$$x = 2z - w - \tfrac{1}{2} - z = -\tfrac{1}{2} + z - w.$$

Riassumendo

$$\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(S') = \mathrm{Sol}(S'') = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + s - t \\ 2s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

La generica soluzione del sistema omogeneo $S_0$ associato ad $S$ si ottiene "mettendo a zero i termini noti" nell'espressione per la generica soluzione di $S$:

$$\mathrm{Sol}(S_0) = \left\{ \begin{pmatrix} s - t \\ 2s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4,$$

ed una base $\mathcal{B}$ per $\mathrm{Sol}(S_0)$ si determina scegliendo per i parametri $s, t$ i valori $1, 0$ e $0, 1$:

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Infine, ricordiamo che un sistema compatibile $S$ è ridotto se, per definizione, le equazioni di $S$ sono indipendenti o, che è lo stesso, sono indipendenti le righe della matrice completa di $S$. Dunque $S$ non è ridotto perché la terza equazione dipende dalle prime due.

**Esercizio 2.** Sia $A \in M_n(\Bbbk)$, $\Bbbk = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di $A$ sse, per definizione, esiste un vettore colonna

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0$$

tale che

$$Av = \lambda v.$$

In questo caso, $v$ è, per definizione, un autovettore di $A$. $A$ si dice diagonalizzabile sse, per definizione, esiste una base di $\Bbbk^n$ composta di autovettori di $A$.

Il polinomio caratteristico di $A_\varepsilon$ è

$$\begin{aligned} P_{A_\varepsilon}(t) = \det(A_\varepsilon - t\, I_3) = \det &\begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 1 & -1-t & 0 \\ 1 & \varepsilon & -1-t \end{pmatrix} \\ = -t(-1-t)^2 & \\ = -t(1+t)^2 & \end{aligned}$$

ed è indipendente dal valore di $\varepsilon$. Concludiamo che $P_{A_\varepsilon}(t)$ ha 2 radici reali, 0 e $-1$, di molteplicità 1 e 2 rispettivamente. Dunque gli autovalori di $A_\varepsilon$ sono $\lambda_1 := 0$ e $\lambda_2 := -1$ e hanno molteplicità algebriche $a_1$ e $a_2$ pari a 1 e 2 rispettivamente. In particolare $a_1 + a_2 = 3$ e per verificare la diagonalizzabilità di $A_\varepsilon$ è sufficiente verificare che le molteplicità geometriche $g_1$ e $g_2$ di $\lambda_1$ e $\lambda_2$ siano uguali ad $a_1$ e $a_2$ rispettivamente. Ora, $g_1$ è almeno 1 per definizione di autovalore. D'altrocanto $g_1 \leq a_1 = 1$. Perciò $g_1 = 1$. $g_2$ è la dimensione dell'autospazio $V_2$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = -1$ che coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $S_2$ la cui matrice incompleta è

$$A_\varepsilon - \lambda_2\, I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda_2 & 0 \\ 1 & \varepsilon & -1-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

e cioè

$$S_2 : \begin{cases} x_1 & & = & 0 \\ x_1 & & = & 0 \\ x_1 & +\varepsilon x_2 & = & 0 \end{cases},$$

Evidentemente, il rango di $A_\varepsilon - \lambda_2 I_3$ è 1 se $\varepsilon = 0$ ed è 2 altrimenti. Di conseguenza la dimensione di $\mathrm{Sol}(S)$ è $g_2 = 3 - 1 = 2 = a_2$ se $\varepsilon = 0$ ed è $g_2 = 3 - 2 = 1 \neq a_2$ altrimenti. Concludiamo che $A_\varepsilon$ è diagonalizzabile sse $\varepsilon = 0$.

Per determinare una base diagonalizzante di $A_0$, determiniamo, innanzitutto, una base per l'autospazio $V_1$ relativo all'autovalore $\lambda_1$. $A_1$ coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $S_1$ la cui matrice incompleta è $A - \lambda_1\, I_3 = A$ e cioè

$$S_1 : \begin{cases} & & 0 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & 0 & = & 0 \\ x_1 & & -x_3 & = & 0 \end{cases}.$$

Ovviamente $x_1$ gioca il ruolo di parametro e può "essere portato a destra del segno di =". Concludiamo che $x_2 = x_1$ e $x_3 = x_1$. Dunque

$$A_1 = \mathrm{Sol}(S_1) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ed una sua base $B_1$ si trova sostituendo al parametro $s$ il valore 1:

$$B_1 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Determiniamo ora una base per l'autospazio $A_2$ relativo all'autovalore $\lambda_2$. Come già osservato $A_2$ coincide con lo spazio $\mathrm{Sol}(S_2)$ delle soluzioni del sistema omogeneo $S_2$ che, per $\varepsilon = 0$ si riduce a

$$S_2 : \begin{cases} x_1 & = & 0 \\ x_1 & = & 0 \\ x_1 & = & 0 \end{cases},$$

da cui

$$\mathrm{Sol}(S_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Una base di $V_2$ si trova sostituendo ai parametri $s, t$ i valori $1, 0$ e $0, 1$:

$$B_2 = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Concludendo il sistema di vettori

$$\mathcal{B} := \text{“}\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2\text{”} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

è una base diagonalizzante per $A_0$.