V Appello — Traccia A

10 luglio 2013

Nome ______________ Cognome __________________ Matricola _________________

Esercizio A.1 *Sia* $W := \{7k+1 | k \in \mathbb{N}_0\}$ *l'insieme dei numeri naturali che sono successivi di un multiplo di* 7.

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ *definita da:*

$$7k+1\mathcal{R}7h+1 :\Longleftrightarrow \text{ il valore assoluto } |k-h| \in 5\mathbb{N}_0$$

è una relazione d'equivalenza in W.

ii) Si determinino le classi $[1]$, $[8]$, $[15]$, $[22]$, $[29]$, $[36]$ *e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo* $\mathcal{R}$.

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ *definita da:*

$$7k+1\mathcal{R}^*7h+1 :\Longleftrightarrow k \text{ divide } h$$

è una relazione d'ordine in W.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ *è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali. Si dica infine se* $(W, \mathcal{R}^*)$ *è un reticolo.*

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di W: $A = \{8, 15, 22, 43\}$ *e* $B = \{15, 29, 50\}$ *si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati* $(A, \mathcal{R}^*)$ *e* $(B, \mathcal{R}^*)$ *e si stabilisca se sono reticoli.*

ii) $[1] = \{7k+1 | k \in 5\mathbb{N}_0\} = [36]$, $[8] = \{7k+1 | k \equiv 1(mod5)\}$, $[15] = \{7k+1 | k \equiv 2(mod5)\}$, $[22] = \{7k+1 | k \equiv 3(mod5)\}$, $[29] = \{7k+1 | k \equiv 4(mod5)\}$. Le classi sono cinque.

iv) l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 15 e 22 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Il minimo è 8 che quindi è anche l'unico elemento minimale. Il massimo è 1 che quindi è anche l'unico elemento massimale. $(W, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo. v) $(A, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo , $(B, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo (ad esempio non esiste in B $inf\{15, 50\}$).

Esercizio A.2

– *Sia* $f : S \to T$ *una applicazione; si dimostri che* $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$ *ma in generale non vale l'uguaglianza.*

– *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 7\mathbb{N}_0 \to \frac{14-x}{7} \in \mathbb{Z} \quad e \quad g : z \in \mathbb{Z} \to 7|z-2| \in 7\mathbb{N}_0$$

i) si calcolino: $f(\{0, 7, 14, 21, 28\})$, $f(7\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, -1, -3, 2, 7\})$, $g(\mathbb{Z})$, $g^{-1}(\{0, 7, 14, 21\})$, $g^{-1}(7\mathbb{N}_0)$.

ii) Si stabilisca se f *e* g *sono iniettive e se sono suriettive.*

iii) Si determinino le applicazioni composte gof *e* fog, *si stabilisca se sono biettive e si calcolino, in caso affermativo le inverse.*

i) $f(\{0, 7, 14, 21, 28\}) = \{0, 1, -1, 2, -2\}$, $f(7\mathbb{N}_0) = \{z \in \mathbb{Z} | z \leq 2\}$, $f^{-1}(\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}) = \{14, 7, 21, 0, 28, 35\}$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0) = \{0, 7, 14\}$, $g(\{-3, 2, -1, 0, 7\}) = \{0, 21, 14, 35\}$, $g(\mathbb{Z}) = 7\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0, 7, 14, 21\}) = \{2, 1, 3, 0, 4, -1, 5\}$, $g^{-1}(5\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$

ii) f è iniettiva ma non è suriettiva (ad esempio non esiste alcun $x \in 7\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = 3$) , g non è iniettiva (infatti ad esempio $g(-3) = 35 = g(7)$) ma è suriettiva.

iii) $gof : x \in 7\mathbb{N}_0 \to x \in 7\mathbb{N}_0$, dunque è l'applicazione identica ed ha per inversa sè stessa, $fog : z \in \mathbb{Z} \to 2 - |z-2| \in \mathbb{Z}$ non è biettiva.

Esercizio A.3

– Si risolva, con uno dei metodi studiati, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3t = 1 \\ 3y - 2z - t = 2 \\ x + y - 4t = -3 \end{cases}$$

– Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

$S = \{(\frac{3t+7}{3}, \frac{9t-16}{3}, 4t-9, t) | t \in \mathbb{R}\}$; i) $detB = -45$, $\rho(B) = 3$; ii)La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$; iii) $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 9\lambda + 45$, gli autovalori sono $-3, 3, 5$. Gli autovettori relativi a -3 $\{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, relativi a 3 $\{(0, x, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 5 $\{(x, 4x, 8x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Esercizio A.4 *Si considerino i punti A e B dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(3, -2, 1)$ e $(0, 4, -7)$, rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche della retta AB.

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la retta AB contiene l'origine.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $27x \equiv 7(mod 29)$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(10111)_2$, $(221012)_3$;

v) Si dimostri, per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che per ogni $n \geq 0$ si ha:

$$1 + 8 + 8^2 + \cdots + 8^n = \frac{8^{n+1} - 1}{7}$$

i) La retta AB ha equazioni $x = 3 - 3t, y = -2 + 6t, z = 1 - 8t$; ii) La retta non contiene l'origine. iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[11]_{29}$ iv) 23,680.