V Appello — Traccia A
10 luglio 2013

Nome ____________ Cognome ______________ Matricola ______________

Esercizio A.1 *Data la formula*

$$(A \to B) \to ((A \vee \neg B) \wedge A)$$

1. *Utilizzando le tavole di verità dire se la formula è una tautologia.*
2. *Utilizzando la tavola di verità scriverla in forma normale disgiuntiva.*
3. *Tramite equivalenze logiche ridurla a forma normale congiuntiva.*

1.

A	B	$\neg B$	$(A \to B)$	$A \vee \neg B$	$((A \vee \neg B) \wedge A)$	$(A \to B) \to ((A \vee \neg B) \wedge A)$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

2. $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$.

3.

$$\begin{aligned}
&(A \to B) \to ((A \vee \neg B) \wedge A) \equiv \\
&\neg(\neg A \vee B) \vee ((A \vee \neg B) \wedge A) \equiv \\
&(A \wedge \neg B) \vee ((A \vee \neg B) \wedge A) \equiv \\
&((A \wedge \neg B) \vee (A \vee \neg B)) \wedge ((A \wedge \neg B) \vee A) \equiv \\
&((A \vee A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee (A \vee \neg B))) \wedge ((A \wedge (\neg B \vee A))) \equiv \\
&(A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee A) \wedge A \wedge (\neg B \vee A) \equiv \\
&(A \vee \neg B) \wedge A \\
&(\equiv A)
\end{aligned}$$

Esercizio A.2 *Si consideri la formula*

$$\exists x \forall y (P(x, y)) \to \ (\forall x(x = c \to Q(x))).$$

i) Fissata l'interpretazione

$$D = \textit{Calciatori campionato italiano}, \quad P^D(x, y) \Leftrightarrow x \textit{ è molto più forte di } y,$$
$$Q^D(x) \Leftrightarrow x \textit{ è straniero} \quad c^D = \textit{Cavani}.$$

dare l'interpretazione della formula e dire se è vera,

ii) Trasformare la formula del primo ordine sopra in forma normale prenessa.

iii) Utilizzando il metodo degli alberi semantici ***dire*** *se la formula è una tautologia del primo ordine.*

i)

$D \models \exists x \forall y(P(x,y)) \rightarrow (\forall x(x = c \rightarrow Q(x)))$ sse

$D \models \neg(\exists x \forall y(P(x,y))) \vee (\forall x(\neg(x = c) \vee Q(x)))$ sse

$D \models (\forall x \exists y \neg(P(x,y))) \vee (\forall x(\neg(x = c) \vee Q(x)))$ sse

Per ogni calciatore d $D \models (\exists y \neg(P(d,y))) \vee (\forall x(\neg(x = c) \vee Q(x)))$ sse

Per ogni calciatore d, esiste un calciatore e $D \models \neg(P(d,e))) \vee (\forall x(\neg(x = c) \vee Q(x)))$ sse

Per ogni calciatore d, esiste un calciatore e tale che d non è molto più forte di e oppure $D \models (\forall x(\neg(x = c) \vee Q(x)))$ sse

Per ogni calciatore d, esiste un calciatore e tale che d non è molto più forte di e oppure Per ogni calciatore d $D \models (\neg(d = c) \vee Q(d)))$ sse

Per ogni calciatore d, esiste un calciatore e tale che d non è molto più forte di e oppure Per ogni calciatore d, d non è Cavani, oppure d è straniero.

Il primo enunciato è vero, perché preso un qualsiasi calciatore esiste sempre uno che non è molto più forte di lui (cioè se stesso); la seconda è falsa perché c'è almeno un giocatore che è Cavani e non è straniero. Poiché l'enunciato è una disgiunzione e la prima è vera, tutto l'enunciato è vero.

ii)

$$\begin{aligned}
&\exists x \forall y(P(x,y)) \rightarrow \ (\forall x(x = c \rightarrow Q(x))) \equiv \\
&\neg(\exists x \forall y(P(x,y))) \vee (\forall x(\neg(x = c) \vee Q(x))) \equiv \\
&(\forall x \exists y \neg(P(x,y))) \vee (\forall x(\neg(x = c) \vee Q(x))) \equiv \\
&(\forall x \exists y \neg(P(x,y))) \vee (\forall z(\neg(z = c) \vee Q(z))) \equiv \\
&\forall x \exists y \forall z(\neg(P(x,y)) \vee \neg(z = c) \vee Q(z)) \equiv
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\mathrm{F}(\exists x \forall y(P(x,y)) \rightarrow \ (\forall x(x = c \rightarrow Q(x))))^* \\
| \\
\mathrm{V}(\exists x \forall y(P(x,y)))^* \\
| \\
\mathrm{F}(\forall x(x = c \rightarrow Q(x)))^* \\
| \\
\mathrm{V}(\forall y(P(c_1,y))) \\
| \\
\mathrm{F}((c_2 = c) \rightarrow Q(c_2)))^* \\
| \\
\mathrm{V}((c_2 = c)) \\
| \\
\mathrm{F}(Q(c_2))) \\
| \\
\mathrm{V}(P(c_1,c_2))) \\
| \\
\mathrm{V}(P(c_2,c_2))) \\
| \\
\mathrm{V}(P(c,c_2)))
\end{array}$$

iii)

Non è una tautologia perché non si chiudono tutti i rami.

Esercizio A.3 *Sia* $W := \{7k + 1 | k \in \mathbb{N}_0\}$ *l'insieme dei numeri naturali che sono successivi di un multiplo di* 7.

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ definita da:

$$7k+1\mathcal{R}7h+1 :\Longleftrightarrow \textit{ il valore assoluto } |k-h| \in 5\mathbb{N}_0$$

è una relazione d'equivalenza in W.

ii) Si determinino le classi [1], [8], [15], [22], [29], [36] *e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$.*

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ definita da:

$$7k+1\mathcal{R}^*7h+1 :\Longleftrightarrow k \textit{ divide } h$$

è una relazione d'ordine in W.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali. Si dica infine se $(W, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo.

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di W: $A = \{8, 15, 22, 43\}$ e $B = \{15, 29, 50\}$ si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati $(A, \mathcal{R}^*)$ e $(B, \mathcal{R}^*)$ e si stabilisca se sono reticoli.

ii) $[1] = \{7k+1|k \in 5\mathbb{N}_0\} = [36]$, $[8] = \{7k+1|k \equiv 1(mod5)\}$, $[15] = \{7k+1|k \equiv 2(mod5)\}$, $[22] = \{7k+1|k \equiv 3(mod5)\}$, $[29] = \{7k+1|k \equiv 4(mod5)\}$. Le classi sono cinque.

iv) l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 15 e 22 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Il minimo è 8 che quindi è anche l'unico elemento minimale. Il massimo è 1 che quindi è anche l'unico elemento massimale. $(W, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo. v) $(A, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo , $(B, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo (ad esempio non esiste in B $inf\{15, 50\}$).

Esercizio A.4

– Sia $f : S \to T$ una applicazione; si dimostri che $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$ ma in generale non vale l'uguaglianza.

– Considerate le applicazioni:

$$f : x \in 7\mathbb{N}_0 \to \frac{14-x}{7} \in \mathbb{Z} \quad e \quad g : z \in \mathbb{Z} \to 7|z-2| \in 7\mathbb{N}_0$$

i) si calcolino: $f(\{0, 7, 14, 21, 28\})$, $f(7\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, -1, -3, 2, 7\})$, $g(\mathbb{Z})$, $g^{-1}(\{0, 7, 14, 21\})$, $g^{-1}(7\mathbb{N}_0)$.

ii) Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.

iii) Si determinino le applicazioni composte gof e fog, si stabilisca se sono biettive e si calcolino, in caso affermativo le inverse.

i) $f(\{0, 7, 14, 21, 28\}) = \{0, 1, -1, 2, -2\}$, $f(7\mathbb{N}_0) = \{z \in \mathbb{Z}|z \leq 2\}$, $f^{-1}(\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}) = \{14, 7, 21, 0, 28, 35\}$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0) = \{0, 7, 14\}$, $g(\{-3, 2, -1, 0, 7\}) = \{0, 21, 14, 35\}$, $g(\mathbb{Z}) = 7\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0, 7, 14, 21\}) = \{2, 1, 3, 0, 4, -1, 5\}$, $g^{-1}(5\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$

ii) f è iniettiva ma non è suriettiva (ad esempio non esiste alcun $x \in 7\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = 3$) , g non è iniettiva (infatti ad esempio $g(-3) = 35 = g(7)$) ma è suriettiva.

iii) $gof : x \in 7\mathbb{N}_0 \to x \in 7\mathbb{N}_0$, dunque è l'applicazione identica ed ha per inversa sè stessa, $fog : z \in \mathbb{Z} \to 2 - |z-2| \in \mathbb{Z}$ non è biettiva.

Esercizio A.5

– Si risolva, con uno dei metodi studiati, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3t = 1 \\ 3y - 2z - t = 2 \\ x + y - 4t = -3 \end{cases}$$

– *Si consideri la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B *è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli* B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

$S = \{(\frac{3t+7}{3}, \frac{9t-16}{3}, 4t-9, t) | t \in \mathbb{R}\}$; i) $detB = -45$, $\rho(B) = 3$; ii)La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$; iii) $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 9\lambda + 45$, gli autovalori sono $-3, 3, 5$. Gli autovettori relativi a -3 $\{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, relativi a 3 $\{(0, x, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 5 $\{(x, 4x, 8x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Esercizio A.6 *Si considerino i punti* A *e* B *dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate* $(3, -2, 1)$ *e* $(0, 4, -7)$, *rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche della retta AB.

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la retta AB *contiene l'origine.*

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $27x \equiv 7(mod29)$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(10111)_2$, $(221012)_3$;

v) Si dimostri, per induzione su $n \in \mathbb{N}$, *che per ogni* $n \geq 0$ *si ha:*

$$1 + 8 + 8^2 + \cdots + 8^n = \frac{8^{n+1} - 1}{7}$$

i) La retta AB ha equazioni $x = 3 - 3t, y = -2 + 6t, z = 1 - 8t$; ii) La retta non contiene l'origine. iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[11]_{29}$ iv) 23,680.