

I Appello— Traccia A

9 gennaio 2013

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

Esercizio A.1 *Data la formula*

$$(A \rightarrow (B \wedge \neg A)) \vee B$$

1. *Utilizzando le tavole di verità dire se la formula è una tautologia.*
2. *Utilizzando la tavola di verità scriverla in forma normale disgiuntiva.*
3. *Tramite equivalenze logiche ridurla a forma normale congiuntiva.*

1.

A	B	$\neg A$	$(B \wedge \neg A)$	$(A \rightarrow (B \wedge \neg A))$	$(A \rightarrow (B \wedge \neg A)) \vee B$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1

2. $(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee B)$.

3.

$$\begin{aligned}
 (A \rightarrow (B \wedge \neg A)) \vee B &\equiv \\
 (\neg A \vee (B \wedge \neg A)) \vee B &\equiv \\
 (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg A) \vee B &\equiv \\
 ((\neg A \vee B) \vee B) \wedge (\neg A \vee B) &\equiv \\
 (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) &\equiv \\
 (\neg A \vee B) &\equiv
 \end{aligned}$$

Esercizio A.2 Si consideri la formula

$$(\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)) \rightarrow (\forall x\exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))) .$$

i) Fissata l'interpretazione

$$D = \mathbb{N}, \quad P(n) \Leftrightarrow n \text{ è pari}, \quad Q(n) \Leftrightarrow n \text{ è dispari}$$

dare l'interpretazione della formula e dire se è vera,

ii) Trasformare la formula del primo ordine sopra in forma normale prenessa.

iii) Utilizzando il metodo degli alberi semantici **dire** se la formula è una tautologia del primo ordine.

i)

$$\mathbb{N} \models (\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)) \rightarrow (\forall x\exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))) \quad \text{sse}$$

$$\mathbb{N} \models \neg(\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)) \vee (\forall x\exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))) \quad \text{sse}$$

$$\mathbb{N} \models \neg(\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)) \quad \text{oppure} \quad \mathbb{N} \models (\forall x\exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))) \quad \text{sse}$$

$$\mathbb{N} \not\models (\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)) \quad \text{oppure per qualsiasi } n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{N} \models (\exists y(\neg P(n) \vee \neg Q(y))) \quad \text{sse}$$

$$\mathbb{N} \not\models \exists xP(x) \quad \text{oppure} \quad \mathbb{N} \not\models \exists xQ(x) \quad \text{oppure per qualsiasi } n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{N} \models (\exists y(\neg P(n) \vee \neg Q(y))) \quad \text{sse}$$

C'è un $m \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \not\models P(m)$ oppure c'è un $l \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \not\models Q(l)$

$$\text{oppure per qualsiasi } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{N} \models \neg P(n) \vee \neg Q(k) \quad \text{sse}$$

C'è un $m \in \mathbb{N}$ tale che m non è pari oppure c'è un $l \in \mathbb{N}$ tale che l non è dispari

$$\text{oppure per qualsiasi } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } k \in \mathbb{N} \text{ tale che } \mathbb{N} \models \neg P(n) \quad \text{oppure} \quad \mathbb{N} \models \neg Q(k) \quad \text{sse}$$

C'è un $m \in \mathbb{N}$ tale che m non è pari oppure c'è un $l \in \mathbb{N}$ tale che l non è dispari

$$\text{oppure per qualsiasi } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } k \in \mathbb{N} \text{ tale che } n \text{ non è pari oppure } k \text{ non è dispari} \quad .$$

Ovviamente vera.

ii)

$$(\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)) \rightarrow (\forall x\exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))) \equiv$$

$$(\exists xP(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x\exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))) \equiv$$

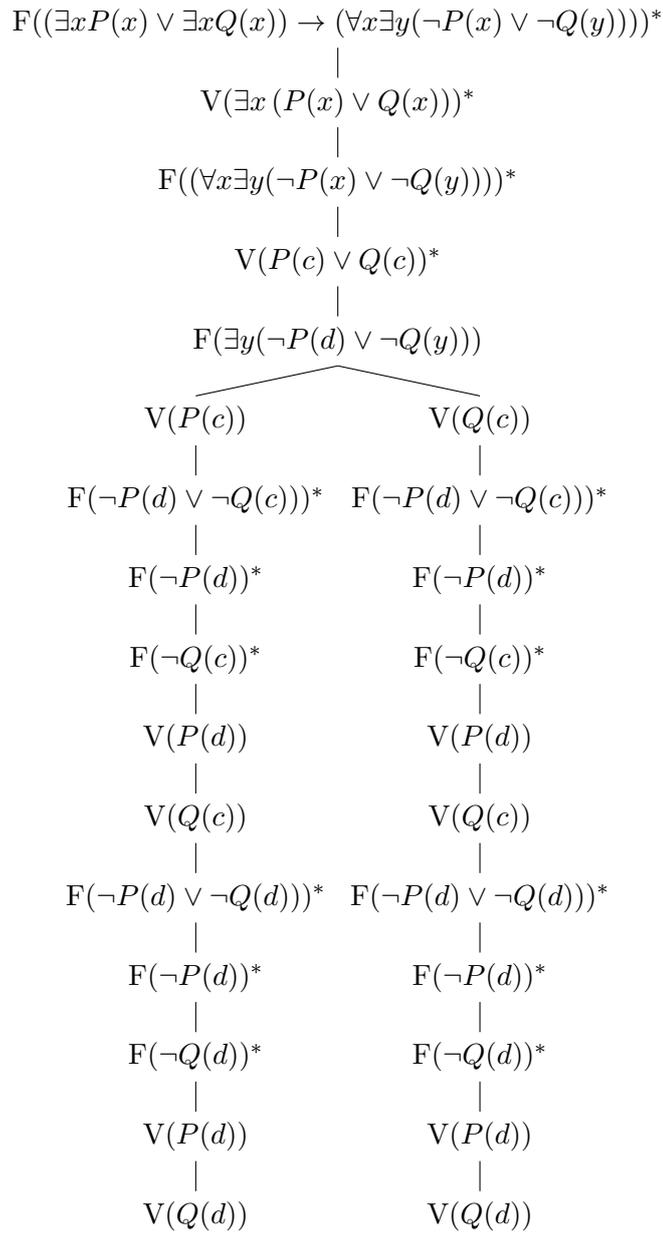
$$(\exists xP(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall z\exists y(\neg P(z) \vee \neg Q(y))) \equiv$$

$$\neg(\exists xP(x) \vee Q(x)) \vee (\forall z\exists y(\neg P(z) \vee \neg Q(y))) \equiv$$

$$(\forall x\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall z\exists y(\neg P(z) \vee \neg Q(y))) \equiv$$

$$\forall x\forall z(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\exists y(\neg P(z) \vee \neg Q(y))) \equiv$$

$$\forall x\forall z\exists y(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg P(z) \vee \neg Q(y) .$$



iii)

Non è una tautologia perché non si chiudono tutti i rami.

Esercizio A.3 Per ogni intero positivo $n \in \mathbb{N}$ si denoti con $h(n)$ l'esponente della massima potenza di 2 che divide n ; sia cioè $n = 2^{h(n)}t_n$ con t_n dispari.

i) Si dimostri che la relazione \mathcal{R} definita da:

$$n\mathcal{R}m : \iff |h(n) - h(m)| \in 3\mathbb{N}_0$$

è una relazione d'equivalenza in \mathbb{N} .

ii) Si determinino le classi $[1], [2], [10], [12], [24], [8]$ e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo \mathcal{R} .

iii) Si dimostri che la relazione \mathcal{R}^* definita da:

$$n\mathcal{R}^*m : \iff h(n) = h(m) \text{ e } t_n \leq t_m$$

è una relazione d'ordine in \mathbb{N} .

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{N} : $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 12, 24\}$ si disegnano i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati (A, \mathcal{R}^*) e (B, \mathcal{R}^*) e si stabilisca se sono reticoli.

ii) $[1] = [24] = [8] = \{2^{h(n)}t_n | t_n \text{ è dispari, } h(n) \equiv 0(3)\}$; $[2] = [10] = \{2^{h(n)}t_n | t_n \text{ è dispari, } h(n) \equiv 1(3)\}$; $[12] = \{2^{h(n)}t_n | t_n \text{ è dispari, } h(n) \equiv 2(3)\}$. Le classi sono 3.

iv) l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 2 e 4 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Non esiste minimo ma infiniti elementi minimali: tutte le potenze di 2. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. v) (A, \mathcal{R}^*) è un reticolo perchè è totalmente ordinato, (B, \mathcal{R}^*) non è un reticolo ad esempio non esiste $\sup\{2, 4\}$.

Esercizio A.4 Sia $f : S \rightarrow T$ una applicazione e siano $Y_1, Y_2 \subseteq T$, $X_1, X_2 \subseteq S$. Si dimostri che:

- $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)$
- $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$ e tale inclusione potrebbe essere stretta.
- Considerate le applicazioni:

$$f : z \in \mathbb{Z} \rightarrow |5z - 15| \in 5\mathbb{N}_0 \quad e \quad g : x \in 5\mathbb{N}_0 \rightarrow \frac{x + 15}{5} \in \mathbb{Z}$$

i) si calcolino: $f(\{0, 1, -2, 3, -3, 5, 6\})$, $f(\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\{0, 5, 10, 15\})$, $f^{-1}(5\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, 5, 15, 25\})$, $g(5\mathbb{N}_0)$, $g^{-1}(\{0, -1, -3, 1, 3, 4\})$, $g^{-1}(\mathbb{Z})$.

ii) Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.

iii) Si determinino le applicazioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive individuando in quest'ultimo caso le applicazioni inverse.

i) $f(\{0, 1, -2, 3, -3, 5, 6\}) = \{15, 10, 25, 0, 30\}$, $f(\mathbb{Z}) = 5\mathbb{N}_0$, $f^{-1}(\{0, 5, 10, 15\}) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f^{-1}(5\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$, $g(\{0, 5, 15, 25\}) = \{3, 4, 6, 8\}$, $g(5\mathbb{N}_0) = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid m \geq 3\}$, $g^{-1}(\{0, -1, -3, 1, 3, 4\}) = \{0, 5\}$, $g^{-1}(\mathbb{Z}) = 5\mathbb{N}_0$

ii) f non è iniettiva perchè ad esempio $f(0) = 15 = f(6)$, f è suriettiva, g è iniettiva ma non è suriettiva perchè ad esempio non esiste alcun elemento di $5\mathbb{N}_0$ la cui immagine sia 0.

iii) $g \circ f : y \in \mathbb{Z} \rightarrow |y - 3| + 3 \in \mathbb{Z}$ non è suriettiva (ad esempio perchè g non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè f non lo è) quindi non è biettiva; invece $f \circ g$ è l'applicazione identica di $5\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa sè stessa

Esercizio A.5

– Si risolva, con il metodo di Gauss-Jordan, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x , y , z e t :

$$\begin{cases} y + 2z + 2t = -1 \\ 3x + 7z + 4t = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

– Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha:

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & \sum_{i=0}^{n-1} 3^i \cdot 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}$$

– Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B .

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1} .

iii) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B .

$S = \{(t + \frac{21}{6}, 2, -t - \frac{3}{2}, t) | t \in \mathbb{R}\}$; i) $\det B = 21$, $\rho(B) = 3$; ii) La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{7} \\ 0 & -1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$; iii) $p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 1)(7 - \lambda)$, gli autovalori sono $-3, -1, 7$. Gli autovettori relativi a -3 $\{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, relativi a -1 $\{(x, 2x, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 7 $\{(\frac{61}{80}z, \frac{5}{8}z, z) | z \in \mathbb{R}, z \neq 0\}$

Esercizio A.6 Si considerino i punti A, B, C, D dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(1, -3, 5), (0, -6, 17), (2, 0, -7), (1, 1, 1)$ rispettivamente.

i) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette AB e CD .

ii) Si stabilisca se le rette AB e CD sono parallele, sghembe o incidenti determinando, in quest'ultimo caso, le coordinate del punto di intersezione.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $7x \equiv 3 \pmod{15}$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(101)_2, (211)_3$;

v) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale 323.

i) La retta AB ha equazioni $x=1-t, y=-3-3t, z=5+12t$; la retta CD ha equazioni $x=2-t, y=t, z=-7+8t$.

ii) Le due rette sono incidenti e il punto comune alle due rette è C . iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[9]_{15}$ iv) 5,22; v) $(10100011)_2, (2243)_5$

I Appello— Traccia B

9 gennaio 2013

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

Esercizio B.1 *Data la formula*

$$A \leftrightarrow (B \vee \neg A)$$

1. *Utilizzando le tavole di verità dire se la formula è una tautologia.*
2. *Utilizzando la tavola di verità scriverla in forma normale disgiuntiva.*
3. *Tramite equivalenze logiche ridurla a forma normale congiuntiva.*

1.

A	B	$\neg A$	$(B \vee \neg A)$	$(A \leftrightarrow (B \vee \neg A))$
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

2. $A \wedge B$

3.

$$\begin{aligned}
 A \leftrightarrow (B \vee \neg A) &\equiv \\
 ((B \vee \neg A) \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow (B \vee \neg A)) &\equiv \\
 (\neg(B \vee \neg A) \vee A) \wedge (\neg A \vee (B \vee \neg A)) &\equiv \\
 ((\neg B \vee A) \wedge (A \vee A)) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg A) &\equiv \\
 (\neg B \vee A) \wedge A \wedge (\neg A \vee B) . &
 \end{aligned}$$

Esercizio B.2 i) Fissata l'interpretazione

$$D = \mathbb{N}, \quad P(n) \Leftrightarrow n \text{ è multiplo di } 3, \quad Q(n) \Leftrightarrow n \text{ è divisibile per } 5$$

dare l'interpretazione della seguente formula del primo ordine se dire e è vera,

$$\exists x Q(x) \leftrightarrow (\forall x \neg P(x) \wedge \forall x \neg Q(x)) .$$

ii) Trasformare la formula sopra in forma normale prenessa.

iii) Utilizzando il metodo degli alberi semantici **dire** se la seguente formula è una tautologia del primo ordine.

$$(\forall x \exists y P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \vee Q(x))) .$$

i)

$$\mathbb{N} \models \exists x Q(x) \leftrightarrow (\forall x \neg P(x) \wedge \forall x \neg Q(x))$$

sse

$$\mathbb{N} \models \exists x Q(x) \text{ se e soltanto se } \mathbb{N} \models (\forall x \neg P(x) \wedge \forall x \neg Q(x))$$

sse

$$C'è n \in \mathbb{N} \mathbb{N} \models Q(n) \text{ se e soltanto se } \mathbb{N} \models (\forall x \neg P(x) \text{ e } \mathbb{N} \models \forall x \neg Q(x))$$

sse

C'è $n \in \mathbb{N}$ tale che n è multiplo di 3, se e soltanto se per qualsiasi $m \in \mathbb{N} \mathbb{N} \models \neg P(m)$ e per qualsiasi $k \in \mathbb{N} \mathbb{N} \models \neg Q(k)$

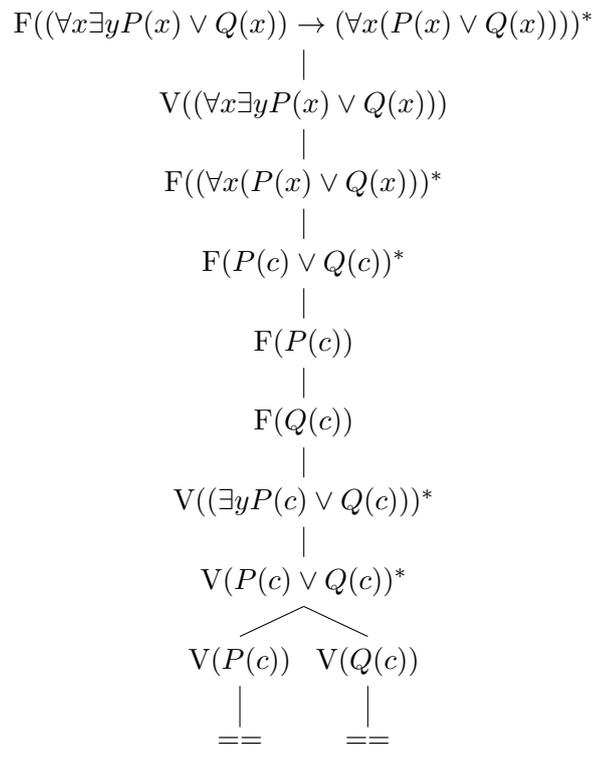
sse

C'è $n \in \mathbb{N}$ tale che n è multiplo di 3, se e soltanto se per qualsiasi $m \in \mathbb{N} m$ non è multiplo di 3 e per qualsiasi $k \in \mathbb{N} k$ non è divisibile per 5

Ovviamente falsa.

ii)

$$\begin{aligned} \exists x Q(x) \leftrightarrow (\forall x (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))) &\equiv \\ (\neg \exists x Q(x) \vee (\forall x \neg P(x) \wedge \forall x \neg Q(x))) \wedge (\neg (\forall x \neg P(x) \wedge \forall x \neg Q(x)) \vee \exists x Q(x)) &\equiv \\ (\forall x \neg Q(x) \vee \forall x (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))) \wedge \neg (\forall x (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x Q(x)) &\equiv \\ (\forall x \neg Q(x) \vee \forall y (\neg P(y) \wedge \neg Q(y))) \wedge (\exists x (P(x) \vee Q(x)) \vee \exists x Q(x)) &\equiv \\ (\forall x \neg Q(x) \vee \forall y (\neg P(y) \wedge \neg Q(y))) \wedge (\exists x (P(x) \vee Q(x)) \vee Q(x)) &\equiv \\ \forall x \forall y (\neg Q(x) \vee (\neg P(y) \wedge \neg Q(y))) \wedge (\exists z (P(z) \vee Q(z)) \vee Q(z)) &\equiv \\ \forall x \forall y \exists z (\neg Q(x) \vee (\neg P(y) \wedge \neg Q(y))) \wedge ((P(z) \vee Q(z)) \vee Q(z)) . & \end{aligned}$$



iii)

È una tautologia perché si chiudono tutti i rami.

Esercizio B.3 Per ogni intero positivo $n \in \mathbb{N}$ si denoti con $h(n)$ l'esponente della massima potenza di 3 che divide n ; sia cioè $n = 3^{h(n)}t_n$ con $t_n \notin 3\mathbb{N}$.

i) Si dimostri che la relazione \mathcal{R} definita da:

$$n\mathcal{R}m : \iff |h(n) - h(m)| \in 2\mathbb{N}_0$$

è una relazione d'equivalenza in \mathbb{N} .

ii) Si determinino le classi $[1]$, $[15]$, $[21]$, $[18]$, $[54]$, $[81]$ e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo \mathcal{R} .

iii) Si dimostri che la relazione \mathcal{R}^* definita da:

$$n\mathcal{R}^*m : \iff h(n) = h(m) \text{ e } t_n \leq t_m$$

è una relazione d'ordine in \mathbb{N} .

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{N} : $A = \{1, 2, 5, 7\}$ e $B = \{3, 9, 15, 27, 45, 135\}$ si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati (A, \mathcal{R}^*) e (B, \mathcal{R}^*) e si stabilisca se sono reticoli.

ii) $[1] = [18] = [81] = \{3^{h(n)}t_n | t_n \notin 3\mathbb{N}, h(n) \equiv 0(2)\}$; $[21] = [15] = [54] = \{3^{h(n)}t_n | t_n \notin 3\mathbb{N}, h(n) \equiv 1(2)\}$. Le classi sono 2.

iv) l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 3 e 9 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Non esiste minimo ma infiniti elementi minimali: tutte le potenze di 3. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. v) (A, \mathcal{R}^*) è un reticolo perchè è totalmente ordinato, (B, \mathcal{R}^*) non è un reticolo ad esempio non esiste $\sup\{3, 9\}$.

Esercizio B.4 Sia $f : S \rightarrow T$ una applicazione e siano $Y_1, Y_2 \subseteq T$, $X_1, X_2 \subseteq S$. Si dimostri che:

- $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$
- $f(X_1) \setminus f(X_2) \subseteq f(X_1 \setminus X_2)$ e tale inclusione potrebbe essere stretta.
- Considerate le applicazioni:

$$f : z \in \mathbb{Z} \rightarrow |7z - 14| \in 7\mathbb{N}_0 \quad e \quad g : x \in 7\mathbb{N}_0 \rightarrow \frac{x + 14}{7} \in \mathbb{Z}$$

i) si calcolino: $f(\{0, 1, -2, 2, -3, 4, 3\})$, $f(\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\{0, 7, 14, 21\})$, $f^{-1}(7\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, 7, 21, 49\})$, $g(7\mathbb{N}_0)$, $g^{-1}(\{0, -1, -2, 1, 2, 5\})$, $g^{-1}(\mathbb{Z})$.

ii) Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.

iii) Si determinino le applicazioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive individuando in quest'ultimo caso le applicazioni inverse.

i) $f(\{0, 1, -2, 2, 3, -3, 4\}) = \{14, 7, 28, 0, 35\}$, $f(\mathbb{Z}) = 7\mathbb{N}_0$, $f^{-1}(\{0, 7, 14, 21\}) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, -1\}$, $f^{-1}(7\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$, $g(\{0, 7, 21, 49\}) = \{2, 3, 5, 9\}$, $g(7\mathbb{N}_0) = \{m \in \mathbb{N}_0 | m \geq 2\}$, $g^{-1}(\{0, -1, -2, 2, 5\}) = \{0, 21\}$, $g^{-1}(\mathbb{Z}) = 7\mathbb{N}_0$

ii) f non è iniettiva perchè ad esempio $f(0) = 14 = f(4)$, f è suriettiva, g è iniettiva ma non è suriettiva perchè ad esempio non esiste alcun elemento di $7\mathbb{N}_0$ la cui immagine sia 0.

iii) $g \circ f : y \in \mathbb{Z} \rightarrow |y - 2| + 2 \in \mathbb{Z}$ non è suriettiva (ad esempio perchè g non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè f non lo è) quindi non è biettiva; invece $f \circ g$ è l'applicazione identica di $7\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa sè stessa

Esercizio B.5

– Si risolva, con il metodo di Gauss-Jordan, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x , y , z e t

$$\begin{cases} -7y + z + 8t = 1 \\ 5x - 3z - 3t = 0 \\ 12x - 2z - 2t = 4 \end{cases}$$

– Sia

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Si dimostri per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha:

$$A^n = \begin{pmatrix} 4^n & \sum_{i=0}^{n-1} 4^i \cdot 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$$

– Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B .

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1} .

iii) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B .

$S = \{(\frac{6}{13}, t - \frac{3}{91}, -t + \frac{10}{13}, t) | t \in \mathbb{R}\}$; i) $\det B = -12$, $\rho(B) = 3$; ii) La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; iii) $p(\lambda) = (3 - \lambda)(-\lambda - 1)(4 - \lambda)$, gli autovalori sono 3, -1, 4. Gli autovettori relativi a -1 sono $\{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$; quelli relativi a 4 sono $\{(x, \frac{5}{3}x, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 3 $\{(x, 4x, -4x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Esercizio B.6

– Si considerino i punti A, B, C, D dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(-4, 2, 0), (1, 2, -1), (-9, 2, 1), (3, -5, 1)$ rispettivamente.

i) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette AB e CD .

ii) Si stabilisca se le rette AB e CD sono parallele, sghembe o incidenti determinando, in quest'ultimo caso, le coordinate del punto di intersezione.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $11x \equiv 2 \pmod{21}$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(111)_2, (122)_3$;

v) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale 735.

i) La retta AB ha equazioni $x=-4+5t, y=2, z=-t$; la retta CD ha equazioni $x=-9+12t, y=2-7t, z=1$.

ii) Le due rette sono incidenti e il punto comune alle due rette è C . iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[4]_{21}$ iv) 7,17; v) $(1011011111)_2, (10420)_5$