

IV Appello — Traccia A

20 giugno 2013

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

Esercizio A.1 Sia $W := \{5k + 1 | k \in \mathbb{N}_0\}$ l'insieme dei numeri naturali che sono successivi di un multiplo di 5.

i) Si dimostri che la relazione \mathcal{R} definita da:

$$5k + 1 \mathcal{R} 5h + 1 : \iff \text{il valore assoluto } |k - h| \in 3\mathbb{N}_0$$

è una relazione d'equivalenza in W .

ii) Si determinino le classi $[1]$, $[6]$, $[11]$, $[16]$, $[21]$, $[26]$ e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo \mathcal{R} .

iii) Si dimostri che la relazione \mathcal{R}^* definita da:

$$5k + 1 \mathcal{R}^* 5h + 1 : \iff k \text{ divide } h$$

è una relazione d'ordine in W .

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato (W, \mathcal{R}^*) è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali. Si dica infine se (W, \mathcal{R}^*) è un reticolo.

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di W : $A = \{6, 11, 16, 31\}$ e $B = \{11, 16, 21\}$ si disegnano i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati (A, \mathcal{R}^*) e (B, \mathcal{R}^*) e si stabilisca se sono reticoli.

ii) $[1] = \{5k + 1 | k \in 3\mathbb{N}_0\} = [16]$, $[6] = \{5k + 1 | k \equiv 1(\text{mod}3)\} = [21]$, $[11] = \{5k + 1 | k \equiv 2(\text{mod}3)\} = [26]$. Le classi sono tre.

iv) l'insieme ordinato (W, \mathcal{R}^*) non è totalmente ordinato (ad esempio 11 e 16 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Il minimo è 6 che quindi è anche l'unico elemento minimale. Il massimo è 1 che quindi è anche l'unico elemento massimale. (W, \mathcal{R}^*) è un reticolo. v) (A, \mathcal{R}^*) è un reticolo, (B, \mathcal{R}^*) non è un reticolo (ad esempio non esiste in B inf $\{11, 16\}$).

Esercizio A.2

– Sia $f : S \rightarrow T$ una applicazione; si dimostri che $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

– Considerate le applicazioni:

$$f : x \in 5\mathbb{N}_0 \rightarrow \frac{10 - x}{5} \in \mathbb{Z} \quad e \quad g : z \in \mathbb{Z} \rightarrow 5|z - 2| \in 5\mathbb{N}_0$$

i) si calcolino: $f(\{0, 5, 10, 15, 20\})$, $f(5\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, -1, -3, 2, 7\})$, $g(\mathbb{Z})$, $g^{-1}(\{0, 5, 10, 15\})$, $g^{-1}(5\mathbb{N}_0)$.

ii) Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.

iii) Si determinino le applicazioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$, si stabilisca se sono biettive e si calcolino, in caso affermativo le inverse.

i) $f(\{0, 5, 10, 15, 20\}) = \{0, 1, -1, 2, -2\}$, $f(5\mathbb{N}_0) = \{z \in \mathbb{Z} | z \leq 2\}$, $f^{-1}(\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}) = \{10, 5, 15, 0, 20, 25\}$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0) = \{0, 5, 10\}$, $g(\{-3, 2, -1, 0, 7\}) = \{0, 15, 10, 25\}$, $g(\mathbb{Z}) = 5\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0, 5, 10, 15\}) = \{2, 1, 3, 0, 4, -1, 5\}$, $g^{-1}(5\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$

ii) f è iniettiva ma non è suriettiva (ad esempio non esiste alcun $x \in 5\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = 3$), g non è iniettiva (infatti ad esempio $g(-3) = 25 = g(7)$) ma è suriettiva.

iii) $g \circ f : x \in 5\mathbb{N}_0 \rightarrow x \in 5\mathbb{N}_0$, dunque è l'applicazione identica ed ha per inversa sè stessa, $f \circ g : z \in \mathbb{Z} \rightarrow 2 - |z - 2| \in \mathbb{Z}$ non è biettiva.

Esercizio A.3

– Si risolva, con uno dei metodi studiati, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} 3x - y + z - 2t = 1 \\ 2y - 3z - t = -2 \\ x + y - 4t = 3 \end{cases}$$

– Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B .

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1} .

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B .

$S = \{(\frac{11t+4}{10}, \frac{29t+26}{10}, \frac{8t+12}{5}, t) | t \in \mathbb{R}\}$; i) $\det B = 6$, $\rho(B) = 3$; ii) La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; iii) $p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - 6$, gli autovalori sono $-3, -1, 2$. Gli autovettori relativi a -3 $\{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, relativi a -1 $\{(x, -23x, 2x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 2 $\{(0, x, 0) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Esercizio A.4 Si considerino i punti A e B dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 5)$, rispettivamente.

i) Si scrivano le equazioni parametriche della retta AB .

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la retta AB contiene il punto P di coordinate $(0, 0, 2)$.

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $11x \equiv 7 \pmod{29}$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(1100101)_2$, $(212201)_3$;

v) Si dimostri, per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che per ogni $n \geq 0$ si ha:

$$1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^n = \frac{6^{n+1} - 1}{5}$$

i) La retta AB ha equazioni $x = 1, y = 1 - t, z = 5t$; ii) La retta non contiene il punto P . iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[27]_{29}$ iv) $101,640$.