III Appello— Traccia A

19 febbraio 2013

Nome ________________ Cognome ____________________ Matricola __________________

Esercizio A.1 *Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi in $\mathbb{N}_0$ e si consideri l'insieme*

$$W := \{p_1p_2 | p_1, p_2 \in \mathbb{P}, p_1 \leq p_2\}$$

dei numeri naturali della forma p_1p_2 con $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, $p_1 \leq p_2$.

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ definita da:

$$p_1p_2\mathcal{R}q_1q_2 :\Longleftrightarrow (p_1 = q_1) \text{ oppure } (p_1q_1 = 15)$$

è una relazione d'equivalenza in W.

ii) Si determinino le classi $[4]$, $[6]$, $[9]$, $[21]$, $[25]$ e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$.

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ definita da:

$$p_1p_2\mathcal{R}^*q_1q_2 :\Longleftrightarrow (p_1 = q_1) \text{ e } (p_2 \leq q_2)$$

è una relazione d'ordine in W.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di W: $A = \{4, 6, 10, 14\}$ e $B = \{4, 6, 9, 15, 21\}$ si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati $(A, \mathcal{R}^*)$ e $(B, \mathcal{R}^*)$ e si stabilisca se sono reticoli.

ii) $[4] = [6] = \{p_1p_2 \in W | p_1 = 2\}$, $[9] = [21] = [25] = \{p_1p_2 | p_1 = 3 \text{ oppure } p_1 = 5\}$. Le classi sono infinite.

iv) l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 6 e 9 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Non esiste minimo ma infiniti elementi minimali: tutti gli elementi del tipo p^2 con $p \in \mathbb{P}$. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. v) $(A, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo perchè è totalmente ordinato, $(B, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo ad esempio non esiste $sup\{6, 21\}$.

Esercizio A.2

– *Siano $f : S \to T$ e $g : T \to W$ applicazioni; si dimostri che se gof è iniettiva, allora f è iniettiva.*

– *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 3\mathbb{Z} \to \frac{|x + 21|}{3} \in \mathbb{N}_0 \quad e \quad g : n \in \mathbb{N}_0 \to 3n - 21 \in 3\mathbb{Z}$$

i) si calcolino: $f(\{0, 3, -3, -39\})$, $f(3\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\{0, 5, 7\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, 1, 7, 8\})$, $g(\mathbb{N}_0)$, $g^{-1}(\{-21, -24, -27\})$, $g^{-1}(3\mathbb{Z})$.

ii) Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.

iii) Si determinino le applicazioni composte gof e fog, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive.

i) $f(\{0, 3, -3, -39\}) = \{7, 8, 6\}$, $f(3\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0$, $f^{-1}(\{0, 5, 7\}) = \{-21, -6, -36, 0, -42\}$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0) = 3\mathbb{Z}$, $g(\{0, 1, 7, 8\}) = \{-21, -18, 0, -3\}$, $g(\mathbb{N}_0) = \{z \in 3\mathbb{Z} | z \geq -21\}$, $g^{-1}(\{-21, -24, -27\}) = \{0\}$, $g^{-1}(3\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0$

ii) f non è iniettiva perchè ad esempio $f(-3) = 6 = f(-39)$, f è suriettiva , g è iniettiva ma non è suriettiva perchè ad esempio non esiste alcun elemento di $\mathbb{N}_0$ la cui immagine sia -27.

iii) $gof : y \in 3\mathbb{Z} \to |x + 21| - 21 \in 3\mathbb{Z}$ non è suriettiva (ad esempio perchè g non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè f non lo è)quindi non è biettiva; invece fog è l'applicazione identica di $\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa sè stessa

Esercizio A.3

– Si risolva, con uno dei metodi studiati, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ y + 5z = 2 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

– Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 11 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

$S = \{(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})\}$; i) $detB = 21$, $\rho(B) = 3$; ii)La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{11}{21} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{19}{21} & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$; iii) $p(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda+1)(7-\lambda)$, gli autovalori sono $-3, -1, 7$. Gli autovettori relativi a -3 $\{(0, x, -x)|x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, relativi a -1 $\{(0, 0, x)|x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 7 $\{(x, \frac{11}{10}x, \frac{3}{40}x)|x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Esercizio A.4 *Si considerino i punti A e B dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate $(3, 0, -1)$ e $(1, -2, 5)$, rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche della retta AB.

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la retta AB contiene l'origine del riferimento .

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $13x \equiv 5(mod 21)$.

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(11001)_2$, $(122)_3$;

v) Si dimostri, per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che per ogni $n \geq 1$ si ha:

$$14 + 27 + \cdots + (13n + 1) = \frac{13n^2 + 15n}{2}$$

i) La retta AB ha equazioni $x = 3 - 2t, y = -2t, z = -1 + 6t$; ii) La retta non contiene l'origine. iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[2]_{21}$ iv) 25,17.

Corso di Matematica Discreta e Logica Matematica

III Appello— Traccia B

19 febbraio 2013

Nome ____________ Cognome ________________ Matricola ______________

Esercizio B.1 *Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi in $\mathbb{N}_0$ e si consideri l'insieme*

$$W := \{p_1p_2 | p_1, p_2 \in \mathbb{P}, p_1 \leq p_2\}$$

dei numeri naturali della forma p_1p_2 con $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, $p_1 \leq p_2$.

i) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ definita da:

$$p_1p_2 \mathcal{R} q_1q_2 :\iff (p_1 = q_1) \text{ oppure } (p_1q_1 = 14)$$

è una relazione d'equivalenza in W.

ii) Si determinino le classi $[4]$, $[6]$, $[49]$, $[21]$, $[14]$ e si stabilisca quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$.

iii) Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}^*$ definita da:

$$p_1p_2\mathcal{R}^*q_1q_2 :\Longleftrightarrow\ (p_1 = q_1)\ \ e\ (p_2 \leq q_2)$$

è una relazione d'ordine in W.

iv) Si stabilisca se l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ è ben ordinato e se è totalmente ordinato, se esistono minimo, massimo, elementi minimali e massimali.

v) Considerati i seguenti sottoinsiemi di W: $A = \{9, 15, 21, 33\}$ e $B = \{4, 10, 9, 15, 14\}$ si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati $(A, \mathcal{R}^*)$ e $(B, \mathcal{R}^*)$ e si stabilisca se sono reticoli.

ii) $[4] = [6] = [14] = [49] = \{p_1p_2 \in W | p_1 = 2$ oppure $p_1 = 7\}$, $[21] = \{p_1p_2 | p_1 = 3\}$. Le classi sono infinite.

iv) l'insieme ordinato $(W, \mathcal{R}^*)$ non è totalmente ordinato (ad esempio 6 e 9 non sono confrontabili) e quindi neanche ben ordinato. Non esiste minimo ma infiniti elementi minimali: tutti gli elementi del tipo p^2 con $p \in \mathbb{P}$. Non esistono elementi massimali e quindi neanche massimo. v) $(A, \mathcal{R}^*)$ è un reticolo perchè è totalmente ordinato, $(B, \mathcal{R}^*)$ non è un reticolo ad esempio non esiste $sup\{9, 14\}$.

Esercizio B.2

– Siano $f : S \to T$ e $g : T \to W$ applicazioni; si dimostri che se gof è suriettiva, allora f è suriettiva.

– Considerate le applicazioni:

$$f : x \in 7\mathbb{Z} \to \frac{|x + 14|}{7} \in \mathbb{N}_0 \quad e \quad g : n \in \mathbb{N}_0 \to 7n - 14 \in 7\mathbb{Z}$$

i) si calcolino: $f(\{0, 7, -7, -21\})$, $f(7\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\{0, 3, 5\})$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0)$, $g(\{0, 1, 2, 3\})$, $g(\mathbb{N}_0)$, $g^{-1}(\{-21, -14, -35\})$, $g^{-1}(7\mathbb{Z})$.

ii) Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.

iii) Si determinino le applicazioni composte gof e fog, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive.

i) $f(\{0, 7, -7, -21\}) = \{2, 3, 1\}$, $f(7\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0$, $f^{-1}(\{0, 5, 3\}) = \{-14, 7, -35, 21, -49\}$, $f^{-1}(\mathbb{N}_0) = 7\mathbb{Z}$, $g(\{0, 1, 2, 3\}) = \{-14, -7, 0, 7\}$, $g(\mathbb{N}_0) = \{z \in 7\mathbb{Z} | z \geq -14\}$, $g^{-1}(\{-35, -21, -14\}) = \{0\}$, $g^{-1}(7\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0$

ii) f non è iniettiva perchè ad esempio $f(-7) = 1 = f(-21)$, f è suriettiva , g è iniettiva ma non è suriettiva perchè ad esempio non esiste alcun elemento di $\mathbb{N}_0$ la cui immagine sia -21.

iii) $gof : y \in 3\mathbb{Z} \to |x + 14| - 14 \in 7\mathbb{Z}$ non è suriettiva (ad esempio perchè g non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè f non lo è)quindi non è biettiva; invece fog è l'applicazione identica di $\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa sè stessa

Esercizio B.3

– Si risolva, con uno dei metodi studiati, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$$

– Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Si determinino il determinante ed il rango di B.

ii) Si stabilisca se B è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli B^{-1}.

iii) Si determino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori di B.

$S = \{(-\frac{1}{7}, \frac{20}{7}, \frac{5}{7})\}$; i) $detB = -22$, $\rho(B) = 3$; ii)La matrice è invertibile e $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ \frac{5}{22} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$; iii) $p(\lambda) = (-1-\lambda)(2-\lambda)(11-\lambda)$, gli autovalori sono $11, -1, 2$. Gli autovettori relativi a 2 $\{(0, 3x, x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, relativi a -1 $\{(0, 0, x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, quelli relativi a 11 $\{(-\frac{9}{5}x, x, -\frac{11}{30}x) | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Esercizio B.4 *Si considerino i punti A e B dello spazio aventi, in un fissato riferimento affine, coordinate* $(7, 3, 0)$ *e* $(-1, 1, 1)$*, rispettivamente.*

i) Si scrivano le equazioni parametriche della retta AB*.*

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se la retta AB *contiene l'origine del riferimento .*

iii) Si risolva l'equazione congruenziale $11x \equiv 9(mod 23)$*.*

iv) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(10110)_2$*,* $(211)_3$*;*

v) Si dimostri, per induzione su $n \in \mathbb{N}$*, che per ogni* $n \geq 1$ *si ha:*

$$12 + 23 + \cdots + (11n + 1) = \frac{11n^2 + 13n}{2}$$

i) La retta AB ha equazioni $x = 7 - 8t, y = 3 - 2t, z = t$; ii) La retta non contiene l'origine. iii) L'insieme delle soluzioni dell'equazione congruenziale è $[5]_{23}$ iv) 22,22.