Prova in itinere n. 2 — Traccia A

26 novembre 2012

Nome ____________________ Cognome __________________________ Matricola _________________________

Esercizio A.1 *Utilizzando il metodo degli alberi semantici dire se la seguente formula è una tautologia:*

$$(A \to (B \vee \neg A)) \wedge B$$

$$\mathrm{F}((A \to (B \vee \neg A)) \wedge B)$$

$$\begin{array}{cc} \mathrm{F}(B) & \\ & \mathrm{F}((A \to B \vee \neg A)) \\ & | \\ & \mathrm{V}(A) \\ & | \\ & \mathrm{F}(B \vee \neg A) \\ & | \\ & \mathrm{F}(\neg A) \\ & | \\ & \mathrm{F}(B) \\ & | \\ & \mathrm{V}(A) \end{array}$$

Non è una tautologia, perché i rami sono rimasti aperti.

Esercizio A.2 *Siano date le seguenti:*

$$\begin{array}{rcl} X & = & \forall x \exists y (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(f^{(1)}(y), c_1)) \\ A & = & \mathbb{N}, \\ P_1^{\mathcal{A}}(a,b) & \textit{sse} & a \textit{ divide } b \\ f_1^{\mathcal{A}}(a) & = & 2 \cdot a, \\ c_1^{\mathcal{A}} & = & 8, \\ \mathcal{A} & = & \langle A, P_1^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}} \rangle, \\ \mathcal{I}(x) & = & 1, \\ \mathcal{I}(y) & = & 3. \end{array} ,$$

Scrivendo tutti i passaggi dire se $\mathcal{A}, \mathcal{I} \models X$.

$$\begin{array}{rr} \mathcal{A}, \mathcal{I} \models \forall x \exists y (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(f^{(1)}(y), c_1)) & \text{sse} \\ \text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models \exists y (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(f^{(1)}(y), c_1))[n/x] & \text{sse} \\ \text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(f^{(1)}(y), c_1))[n/x][m/y] & \text{sse} \\ \text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models (P_1^{(2)}(n, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(f^{(1)}(y), c_1))[m/y] & \text{sse} \\ \text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models (P_1^{(2)}(n, f^{(1)}(m)) \to P_1^{(2)}(f^{(1)}(m), c_1)) & \text{sse} \\ \text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models P_1^{(2)}(n, f^{(1)}(m)) \text{ oppure } \mathcal{A}, \mathcal{I} \models P_1^{(2)}(f^{(1)}(m), c_1) & \text{sse} \\ \text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } m \in \mathbb{N} \quad n \text{ non divide } 2m \text{ oppure } 2m \text{ divide } 8. & \end{array}$$

È vero perché dato un qualsiasi n esiste sempre m (ad esempio $m < \frac{n}{2}$) tale che n divide $2m$. Ma è anche vero perché esiste m (ad esempio $m = 4$) tale che $2m$ divide 8.

Esercizio A.3 *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 5\mathbb{N}_0 \to \frac{x-35}{5} \in \mathbb{Z} \quad e \quad g : y \in \mathbb{Z} \to 5|y+7| \in 5\mathbb{N}_0$$

1. *si calcolino:* $f(\{0,5,10,15\})$, $f(5\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-8,-10\})$, $f^{-1}(\mathbb{Z})$, $g(\{0,-7,-6,-8\})$, $g(\mathbb{Z})$, $g^{-1}(\{0,5,10,40\})$, $g^{-1}(5\mathbb{N}_0)$.
2. *Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.*
3. *Si determinino le applicazioni composte gof e fog, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive individuando in quest'ultimo caso le applicazioni inverse.*

1. $f(\{0,5,10,15\}) = \{-7,-6,-5,-4\}$, $f(5\mathbb{N}_0) = \{y \in \mathbb{Z} | y \geq -7\}$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-8-10\}) = \{35,40,30\}$, $f^{-1}(\mathbb{Z}) = 5\mathbb{N}_0$, $g(\{0,-7,-6,-8\}) = \{35,0,5\}$, $g(\mathbb{Z}) = 5\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0,5,10,40\}) = \{-7,-6,-8,-5,-9,-15,1\}$, $g^{-1}(5\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$
2. f è iniettiva e non è suriettiva ad esempio $\nexists x \in 5\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = -8, -10$, g è suriettiva ma non è iniettiva ad esempio $g(-6) = 5 = g(-8)$
3. $fog : y \in \mathbb{Z} \to |y+7| - 7 \in \mathbb{Z}$ non è suriettiva (ad esempio perchè f non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè g non lo è)quindi non è biettiva; invece gof è l'applicazione identica di $5\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa sè stessa

Esercizio A.4 *Nel insieme* $W = \{2^n 3^m | n, m \in \mathbb{N}_0\}$ *dei numeri naturali i cui divisori primi sono* 2 *e* 3, *si consideri la relazione binaria* $\mathcal{R}$ *definita da:*

$$2^n 3^m \mathcal{R} 2^h 3^k :\iff n+h, m+k \in 2\mathbb{N}_0$$

1. *Si dimostri che* $\mathcal{R}$ *è una relazione di equivalenza in* W*;*
2. *si determinino le classi* $[2]_\mathcal{R}$, $[3]_\mathcal{R}$, $[6]_\mathcal{R}$, $[1]_\mathcal{R}$, $[36]_\mathcal{R}$*;*
3. *quante sono le classi di equivalenza modulo* $\mathcal{R}$*?*
4. *La relazione binaria* $\mathcal{R}^*$ *in* W *definita da*

$$2^n 3^m \mathcal{R}^* 2^h 3^k :\iff n+h, m+k \ \textit{ sono dispari}$$

   è una relazione di equivalenza? (motivare la risposta)

2. $[2]_\mathcal{R} = \{2^n 3^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ pari}\}$, $[3]_\mathcal{R} = \{2^n 3^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ dispari}\}$, $[6]_\mathcal{R} = \{2^n 3^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ dispari}\}$, $[36]_\mathcal{R} = \{2^n 3^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ pari}\} = [1]_\mathcal{R}$
3. le classi sono 4; iv) $\mathcal{R}^*$ ad esempio non è riflessiva.

Esercizio A.5 *1. Quanti sono i numeri naturali positivi minori di 3921 divisibili per almeno uno tra 2,5,7?*

2. *Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono formare utilizzando una ed una sola volta tutte le lettere della parola PASTO?*

3. *Un gruppo di ragazzi va al ristorante di Angelo dove il menù comprende 4 primi, 2 secondi e 7 contorni. Ognuno dei ragazzi ordina un primo, un secondo ed un contorno e a ciascuno di essi Angelo serve un pranzo diverso. Da quanti ragazzi al più è formato il gruppo?*

1. 2576;

2. 5!=120;

3. 56

Esercizio A.6

i) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(1101)_2$, $(120)_3$;

ii) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale 382.

i)13, 15; ii) $(101111110)_2$, $(3012)_5$

Prova in itinere n. 2 — Traccia B

26 novembre 2012

Nome ____________ Cognome ________________ Matricola ______________

Esercizio B.1 *Utilizzando il metodo degli alberi semantici dire se la seguente formula è una tautologia:*

$$((A \vee B) \wedge \neg A)) \to B$$

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}(((A \vee B) \wedge \neg A) \to B) \\
| \\
\mathrm{F}(B) \\
| \\
\mathrm{V}((A \vee B) \wedge \neg A) \\
| \\
\mathrm{V}(\neg A) \\
| \\
\mathrm{V}(A \vee B) \\
| \\
\mathrm{F}(A) \\
\diagup \quad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
\mathrm{V}(B) & \mathrm{V}(A) \\
| & | \\
= & =
\end{array}
\end{array}
$$

È una tautologia perché tutti riami sono chiusi.

Esercizio B.2 *Siano date le seguenti:*

$$
\begin{array}{rcl}
X & = & \exists y \forall z (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(x, c_1)) \\
A & = & \mathbb{N}, \\
P_1^{\mathcal{A}}(a,b) & sse & a \leq b \\
f_1^{\mathcal{A}}(a) & = & 2 \cdot a, \\
c_1^{\mathcal{A}} & = & 16, \\
\mathcal{A} & = & \langle A, P_1^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}} \rangle, \\
\mathcal{I}(x) & = & 7, \\
\mathcal{I}(y) & = & 3.
\end{array}
,
$$

Scrivendo tutti i passaggi dire se $\mathcal{A}, \mathcal{I} \models X$.

$$
\begin{array}{rr}
\mathcal{A}, \mathcal{I} \models \exists y \forall z (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(x, c_1)) & \text{sse} \\
\text{Esiste } n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models \forall z (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(x, c_1))[n/y] & \text{sse} \\
\text{Esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(x, c_1))[n/y][m/z] & \text{sse} \\
\text{Esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(n)) \to P_1^{(2)}(x, c_1)) & \text{sse} \\
\text{Esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(n)) \text{ oppure } \mathcal{A}, \mathcal{I} \models P_1^{(2)}(x, c_1) & \text{sse} \\
\text{Esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{I}(x) \not\leq 2n \text{ oppure } \mathcal{I}(x) \leq 16 & \text{sse} \\
\text{Esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } m \in \mathbb{N} \quad 7 \not\leq 2n \text{ oppure } 7 \leq 16. &
\end{array}
$$

È vero perché esiste n (ad esempio $n = 1$) tale che per qualsiasi m $7 \not\leq 2n$. Ma è anche vero perché $7 \leq 16$.

Esercizio B.3 *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 7\mathbb{N}_0 \to \frac{x-21}{7} \in \mathbb{Z} \quad e \quad g : y \in \mathbb{Z} \to 7|y+3| \in 7\mathbb{N}_0$$

i) si calcolino: $f(\{0,7,14,21\})$, $f(7\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-4,-6\})$, $f^{-1}(\mathbb{Z})$, $g(\{0,-3,-2,-4\})$, $g(\mathbb{Z})$, $g^{-1}(\{0,7,14,28\})$, $g^{-1}(7\mathbb{N}_0)$.

ii) Si stabilisca se f *e* g *sono iniettive e se sono suriettive.*

iii) Si determinino le applicazioni composte gof *e* fog*, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive individuando in quest'ultimo caso le applicazioni inverse.*

i) $f(\{0,7,14,21\}) = \{-3,-2,-1,0\}$, $f(7\mathbb{N}_0) = \{y \in \mathbb{Z} | y \geq -3\}$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-4,-6\}) = \{0,14,28\}$, $f^{-1}(\mathbb{Z}) = 7\mathbb{N}_0$, $g(\{0,-3,-2,-4\}) = \{21,0,7\}$, $g(\mathbb{Z}) = 7\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0,7,14,28\}) = \{-3,-2,-4,-1,-5,-7,1\}$, $g^{-1}(7\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$

ii) f è iniettiva e non è suriettiva ad esempio $\nexists x \in 7\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = -4$, g è suriettiva ma non è iniettiva ad esempio $g(-2) = 7 = g(-4)$

iii) $fog : y \in \mathbb{Z} \to |y+3| - 3 \in \mathbb{Z}$ non è suriettiva (ad esempio perchè f non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè g non lo è)quindi non è biettiva; invece gof è l'applicazione identica di $7\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa sè stessa

Esercizio B.4 *Nel insieme* $W = \{2^n 5^m | n, m \in \mathbb{N}_0\}$ *dei numeri naturali i cui divisori primi sono* 2 *e* 5*, si consideri la relazione binaria* $\mathcal{R}$ *definita da:*

$$2^n 5^m \mathcal{R} 2^h 5^k :\Longleftrightarrow\ n+h, m+k \in 2\mathbb{N}_0$$

i) Si dimostri che $\mathcal{R}$ *è una relazione di equivalenza in* W*;*

ii) si determinino le classi $[2]_{\mathcal{R}}$*,* $[5]_{\mathcal{R}}$*,* $[10]_{\mathcal{R}}$*,* $[1]_{\mathcal{R}}$*,* $[100]_{\mathcal{R}}$*;*

iii) quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$*?*

iv) La relazione binaria $\mathcal{R}^*$ *in* W *definita da*

$$2^n 5^m \mathcal{R}^* 2^h 5^k :\Longleftrightarrow\ n+h, m+k \ \ \textit{sono dispari}$$

è una relazione di equivalenza? (motivare la risposta)

ii)$[2]_{\mathcal{R}} = \{2^n 5^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ pari}\}$, $[5]_{\mathcal{R}} = \{2^n 5^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ dispari}\}$, $[10]_{\mathcal{R}} = \{2^n 5^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ dispari}\}$, $[100]_{\mathcal{R}} = \{2^n 5^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ pari}\} = [1]_{\mathcal{R}}$ iii) le classi sono 4; iv) $\mathcal{R}^*$ ad esempio non è riflessiva.

Esercizio B.5

i) Quanti sono i numeri naturali positivi minori di 3102 divisibili per almeno uno tra 2,3,11?

ii) Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono formare utilizzando una ed una sola volta tutte le lettere della parola DARE?

iii) Un gruppo di ragazzi va al ristorante di Angelo dove il menù comprende 5 primi, 3 secondi e 2 contorni. Ognuno dei ragazzi ordina un primo, un secondo ed un contorno e a ciascuno di essi Angelo serve un pranzo diverso. Da quanti ragazzi al più è formato il gruppo?

i) 2162; ii) 4!=24; iii) 30

Esercizio B.6

i) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(1011)_2$*,* $(221)_3$*;*

ii) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale 124*.*

i)11, 25; ii) $(1111100)_2$, $(444)_5$

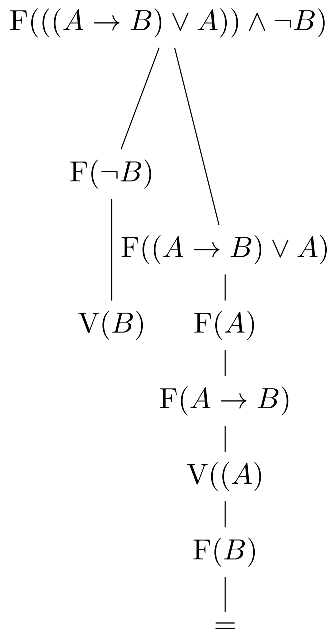
Prova in itinere n. 2 — Traccia C

26 novembre 2012

Nome ____________ Cognome ________________ Matricola ______________

Esercizio C.1 *Utilizzando il metodo degli alberi semantici dire se la seguente formula è una tautologia:*

$$((A \to B) \vee A)) \wedge \neg B$$



Non è una tautologia, perché il ramo di sinistra è rimasto aperto.

Esercizio C.2 *Siano date le seguenti:*

$$\begin{array}{rcl}
X & = & \forall x P_1^{(1)}(x) \vee \neg \exists y P_2^{(2)}(y,x) \\
A & = & \mathbb{N}, \\
P_1^{\mathcal{A}}(a) & sse & a \text{ è } pari \qquad , \\
P_2^{\mathcal{A}}(a,b) & sse & a \leq b \qquad , \\
f_1^{\mathcal{A}}(a) & = & 2 \cdot a, \\
\mathcal{A} & = & \langle A, P_1^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}} \rangle, \\
\mathcal{I}(x) & = & 0, \\
\mathcal{I}(y) & = & 0.
\end{array}$$

Scrivendo tutti i passaggi dire se $\mathcal{A}, \mathcal{I} \models X$.

$$\begin{array}{rl}
\mathcal{A}, \mathcal{I} \models \forall x P_1^{(1)}(x) \vee \neg \exists y P_2^{(2)}(y,x) & \text{sse} \\
\mathcal{A}, \mathcal{I} \models \forall x P_1^{(1)}(x) \text{ oppure } \mathcal{A}, \mathcal{I} \models \neg \exists y P_2^{(2)}(y,x) & \text{sse} \\
\text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models P_1^{(1)}(x)[n/x] \text{ oppure } \mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models \exists y P_2^{(2)}(y,x) & \text{sse} \\
\text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models P_1^{(1)}(n) \text{ oppure esiste } m \in \mathbb{N} \text{ tale che } \mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models P_2^{(2)}(y,x)[m/y] & \text{sse} \\
\text{O ogni } n \in \mathbb{N}\, n \text{ è pari oppure esiste } m \in \mathbb{N} \text{ tale che } m \not\leq \mathcal{I}(x) & \text{sse} \\
\text{O ogni } n \in \mathbb{N}\, n \text{ è pari oppure esiste } m \in \mathbb{N} \text{ tale che } m \not\leq 0 & \text{sse}
\end{array}$$

È vero perché esiste m (ad esempio $m = 1$) tale che $m \not\leq 0$.

Esercizio C.3 *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 3\mathbb{N}_0 \to \frac{x-33}{3} \in \mathbb{Z} \quad e \quad g : y \in \mathbb{Z} \to 3|y+11| \in 3\mathbb{N}_0$$

i) si calcolino: $f(\{0,3,6,33\})$, $f(3\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-12,-13\})$, $f^{-1}(\mathbb{Z})$, $g(\{0,-11,-10,-12\})$, $g(\mathbb{Z})$, $g^{-1}(\{0,3,6,36\})$, $g^{-1}(3\mathbb{N}_0)$.

ii) Si stabilisca se f *e* g *sono iniettive e se sono suriettive.*

iii) Si determinino le applicazioni composte gof *e* fog*, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive individuando in quest'ultimo caso le applicazioni inverse.*

i) $f(\{0,3,6,33\}) = \{-11,-9,-10,0\}$, $f(3\mathbb{N}_0) = \{y \in \mathbb{Z} | y \geq -11\}$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-12,-13\}) = \{30,33,36\}$, $f^{-1}(\mathbb{Z}) = 3\mathbb{N}_0$, $g(\{0,-11,-10,-12\}) = \{33,0,3\}$, $g(\mathbb{Z}) = 3\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0,3,6,36\}) = \{-11,-10,-12,-13,-9,-23,-1\}$, $g^{-1}(3\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$

ii) f è iniettiva e non è suriettiva ad esempio $\nexists x \in 3\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = -12$, g è suriettiva ma non è iniettiva ad esempio $g(-10) = 3 = g(-12)$

iii) $fog : y \in \mathbb{Z} \to |y+11| - 11 \in \mathbb{Z}$ non è suriettiva (ad esempio perchè f non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè g non lo è)quindi non è biettiva; invece gof è l'applicazione identica di $3\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa se stessa

Esercizio C.4 *Nel insieme* $W = \{3^n 5^m | n, m \in \mathbb{N}_0\}$ *dei numeri naturali i cui divisori primi sono* 3 *e* 5*, si consideri la relazione binaria* $\mathcal{R}$ *definita da:*

$$3^n 5^m \mathcal{R} 3^h 5^k :\Longleftrightarrow n+h, m+k \in 2\mathbb{N}_0$$

i) Si dimostri che $\mathcal{R}$ *è una relazione di equivalenza in* W*;*

ii) si determinino le classi $[3]_{\mathcal{R}}$*,* $[5]_{\mathcal{R}}$*,* $[15]_{\mathcal{R}}$*,* $[1]_{\mathcal{R}}$*,* $[225]_{\mathcal{R}}$*;*

iii) quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$*?*

iv) La relazione binaria $\mathcal{R}^*$ *in* W *definita da*

$$3^n 5^m \mathcal{R}^* 3^h 5^k :\Longleftrightarrow n+h, m+k \ \ \textit{sono dispari}$$

è una relazione di equivalenza? (motivare la risposta)

ii)$[3]_{\mathcal{R}} = \{3^n 5^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ pari}\}$, $[5]_{\mathcal{R}} = \{3^n 5^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ dispari}\}$, $[15]_{\mathcal{R}} = \{3^n 5^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ dispari}\}$, $[225]_{\mathcal{R}} = \{3^n 5^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ pari}\} = [1]_{\mathcal{R}}$ iii) le classi sono 4; iv) $\mathcal{R}^*$ ad esempio non è riflessiva.

Esercizio C.5

i) Quanti sono i numeri naturali positivi minori di 3003 divisibili per almeno uno tra 3,11,13?

ii) Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono formare utilizzando una ed una sola volta tutte le lettere della parola CORPI?

iii) Un gruppo di ragazzi va al ristorante di Angelo dove il menù comprende 3 primi, 5 secondi e 2 contorni. Ognuno dei ragazzi ordina un primo, un secondo ed un contorno e a ciascuno di essi Angelo serve un pranzo diverso. Da quanti ragazzi al più è formato il gruppo?

i) 1323; ii) 5!=120; iii) 30

Esercizio C.6

i) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(1001)_2$, $(210)_3$*;*

ii) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale 311.

i)9, 21; ii) $(100110111)_2$, $(2221)_5$

Prova in itinere n. 2 — Traccia D

26 novembre 2012

Nome ______________ Cognome __________________ Matricola ________________

Esercizio D.1 *Utilizzando il metodo degli alberi semantici dire se la seguente formula è una tautologia:*

$$((A \to B) \vee (B \to A)) \vee (B \wedge \neg B)$$

$$\begin{array}{c}
\mathrm{F}(((A \to B) \vee (B \to A)) \vee (B \wedge \neg B)) \\
| \\
\mathrm{F}(((A \to B) \vee (B \to A)) \\
| \\
\mathrm{F}((B \wedge \neg B)) \\
| \\
\mathrm{F}(A \to B) \\
| \\
\mathrm{F}(B \to A) \\
| \\
\mathrm{V}(A) \\
| \\
\mathrm{F}(B) \\
| \\
\mathrm{V}(B) \\
| \\
\mathrm{F}(A) \\
| \\
=
\end{array}$$

È una tautologia, perché tutti i rami sono chiusi.

Esercizio D.2 *Siano date le seguenti:*

$$
\begin{array}{rcl}
X & = & \forall x P_1^{(1)}(x) \leftrightarrow \neg P_2^{(2)}(y,x) \\
A & = & \mathbb{N}, \\
P_1^{\mathcal{A}}(a) & \textit{sse} & a \textit{ è divisibile per } 5, \\
P_2^{\mathcal{A}}(a,b) & \textit{sse} & a \leq b, \\
f_1^{\mathcal{A}}(a) & = & 2 \cdot a, \\
\mathcal{A} & = & \langle A, P_1^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}} \rangle, \\
\mathcal{I}(x) & = & 5, \\
\mathcal{I}(y) & = & 15.
\end{array}
$$

Scrivendo tutti i passaggi dire se $\mathcal{A}, \mathcal{I} \models X$.

$$
\begin{array}{rl}
\mathcal{A}, \mathcal{I} \models \forall x P_1^{(1)}(x) \leftrightarrow \neg P_2^{(2)}(y,x) & \text{sse} \\
\mathcal{A}, \mathcal{I} \models (\forall x P_1^{(1)}(x) \rightarrow \neg P_2^{(2)}(y,x)) \wedge \neg P_2^{(2)}(y,x) \rightarrow \forall x P_1^{(1)}(x) & \text{sse} \\
\mathcal{A}, \mathcal{I} \models (\forall x P_1^{(1)}(x) \rightarrow \neg P_2^{(2)}(y,x)) \text{ e } \mathcal{A}, \mathcal{I} \models \neg P_2^{(2)}(y,x) \rightarrow \forall x P_1^{(1)}(x) & \text{sse} \\
\mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models \forall x P_1^{(1)}(x) \text{ oppure } \mathcal{A}, \mathcal{I} \models \neg P_2^{(2)}(y,x)). \text{ Inoltre } \mathcal{A}, \mathcal{I} \models \neg P_2^{(2)}(y,x) \rightarrow \forall x P_1^{(1)}(x) & \text{sse} \\
\text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models P_1^{(1)}(x)[n/x] \text{ o } \mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models P_2^{(2)}(y,x)). & \\
\text{Inoltre } \mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models \neg P_2^{(2)}(y,x) \text{ o } \mathcal{A}, \mathcal{I} \models \forall x P_1^{(1)}(x) & \text{sse} \\
\text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models P_1^{(1)}(n) \text{ o } \mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models P_2^{(2)}(y,x)). & \\
\text{Inoltre } \mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models \neg P_2^{(2)}(y,x) \text{ o per ogni } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models P_1^{(1)}(x)[m/x] & \text{sse} \\
\text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \quad n \text{ non è divisibile per 5 oppure } \mathcal{I}(y) \not\leq \mathcal{I}(x). & \\
\text{Inoltre } \mathcal{A}, \mathcal{I} \models P_2^{(2)}(y,x) \text{ o per ogni } m \in \mathbb{N} \quad m \text{ è divisibile per 5.} & \text{sse} \\
\text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \quad n \text{ non è divisibile per 5 oppure } 15 \not\leq 5. & \\
\text{Inoltre } \mathcal{I}(y) \leq \mathcal{I}(x) \text{ o per ogni } m \in \mathbb{N} \quad m \text{ è divisibile per 5.} & \text{sse} \\
\text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \quad n \text{ non è divisibile per 5 oppure } 15 \not\leq 5. & \\
\text{Inoltre } 15 \leq 5 \text{ o per ogni } m \in \mathbb{N} \quad m \text{ è divisibile per 5.} & .
\end{array}
$$

È falso perché $15 \not\leq 5$ e ci sono $m \in \mathbb{N}$ divisibili per 5.

Esercizio D.3 *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 11\mathbb{N}_0 \to \frac{x-22}{11} \in \mathbb{Z} \quad e \quad g : y \in \mathbb{Z} \to 11|y+2| \in 11\mathbb{N}_0$$

i) si calcolino: $f(\{0, 11, 22, 33\})$, $f(11\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0, -1, 1, -3, -4\})$, $f^{-1}(\mathbb{Z})$, $g(\{0, -2, -4, -3\})$, $g(\mathbb{Z})$, $g^{-1}(\{0, 11, 22, 44\})$, $g^{-1}(11\mathbb{N}_0)$.

ii) Si stabilisca se f e g sono iniettive e se sono suriettive.

iii) Si determinino le applicazioni composte gof e fog, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive individuando in quest'ultimo caso le applicazioni inverse.

i) $f(\{0, 11, 22, 33\}) = \{-2, -1, 0, 1\}$, $f(11\mathbb{N}_0) = \{y \in \mathbb{Z} | y \geq -2\}$, $f^{-1}(\{0, -1, 1, -3, -4\}) = \{22, 11, 33\}$, $f^{-1}(\mathbb{Z}) = 11\mathbb{N}_0$, $g(\{0, -2, -4, -3\}) = \{22, 0, 11\}$, $g(\mathbb{Z}) = 11\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0, 11, 22, 44\}) = \{-2, -1, -3, 0, -4, 2, -6\}$, $g^{-1}(11\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$

ii) f è iniettiva e non è suriettiva ad esempio $\nexists x \in 11\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = -3$, g è suriettiva ma non è iniettiva ad esempio $g(0) = 22 = g(-4)$

iii) $fog : y \in \mathbb{Z} \to |y+2| - 2 \in \mathbb{Z}$ non è suriettiva (ad esempio perchè f non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè g non lo è)quindi non è biettiva; invece gof è l'applicazione identica di $11\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa se stessa

Esercizio D.4 *Nel insieme* $W = \{2^n 7^m | n, m \in \mathbb{N}_0\}$ *dei numeri naturali i cui divisori primi sono* 2 *e* 7*, si consideri la relazione binaria* $\mathcal{R}$ *definita da:*

$$2^n 7^m \mathcal{R} 2^h 7^k :\iff n+h, m+k \in 2\mathbb{N}_0$$

i) Si dimostri che $\mathcal{R}$ *è una relazione di equivalenza in* W*;*

ii) si determinino le classi $[2]_\mathcal{R}$, $[7]_\mathcal{R}$, $[14]_\mathcal{R}$, $[1]_\mathcal{R}$, $[196]_\mathcal{R}$*;*

iii) quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$*?*

iv) La relazione binaria $\mathcal{R}^*$ *in* W *definita da*

$$2^n 7^m \mathcal{R}^* 2^h 7^k :\iff n+h, m+k \ \textit{ sono dispari}$$

è una relazione di equivalenza? (motivare la risposta)

ii)$[2]_\mathcal{R} = \{2^n 7^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ pari}\}$, $[7]_\mathcal{R} = \{2^n 7^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ dispari}\}$, $[14]_\mathcal{R} = \{2^n 7^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ dispari}\}$, $[196]_\mathcal{R} = \{2^n 7^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ pari}\} = [1]_\mathcal{R}$ iii) le classi sono 4; iv) $\mathcal{R}^*$ ad esempio non è riflessiva.

Esercizio D.5

i) Quanti sono i numeri naturali positivi minori di 4928 divisibili per almeno uno tra 2,7,11?

ii) Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono formare utilizzando una ed una sola volta tutte le lettere della parola CANE?

iii) Un gruppo di ragazzi va al ristorante di Angelo dove il menù comprende 8 primi, 3 secondi e 2 contorni. Ognuno dei ragazzi ordina un primo, un secondo ed un contorno e a ciascuno di essi Angelo serve un pranzo diverso. Da quanti ragazzi al più è formato il gruppo?

i) 3008; ii) 4!=24; iii) 48

Esercizio D.6

i) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri $(1000)_2$, $(211)_3$*;*

ii) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale 255.

i)8, 22; ii) $(11111111)_2$, $(2010)_5$