

Prova in itinere n. 1 — Traccia A

29 ottobre 2012

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

Esercizio A.1 Utilizzando le tavole di verità dire se la seguente formula è una tautologia:

$$(A \rightarrow (B \vee \neg A)) \wedge B$$

A	B	$\neg A$	$(B \vee \neg A)$	$(A \rightarrow (B \vee \neg A))$	$(A \rightarrow (B \vee \neg A)) \wedge B$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1

Esercizio A.2 Scrivendo tutti i passaggi ridurre mediante equivalenze logiche la seguente formula in forma normale disgiuntiva:

$$(A \rightarrow (B \vee \neg A)) \wedge B$$

$$\begin{aligned} (A \rightarrow (B \vee \neg A)) \wedge B &\leftrightarrow (\neg A \vee (B \vee \neg A)) \wedge B \\ &\leftrightarrow (\neg A \vee B \vee \neg A) \wedge B \\ &\leftrightarrow (B \vee \neg A) \wedge B \\ &\leftrightarrow (B \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \\ &\leftrightarrow B \vee (\neg A \wedge B) \end{aligned}$$

Esercizio A.3 Si dimostri che considerati comunque gli insiemi S, T, V vale la seguente uguaglianza

$$S \times (T \setminus V) = (S \times T) \setminus (S \times V)$$

Esercizio A.4 Si dimostri che per ogni $n \geq 1$ il numero naturale $28^n - 1$ è un multiplo di 27.

Esercizio A.5 Si risolva, con il metodo di Gauss-Jordan, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z .

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ 5x + 2y - z = 4 \\ 6x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{10-z}{17}, \frac{9+11z}{17}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio A.6 Si considerino le seguenti matrici su \mathbb{R} :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posto $D = AB - 3C$, si determinino il determinante e la trasposta di D . Si stabilisca se D è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli D^{-1}

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -3 \\ 6 & -9 & -24 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}, D^t = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 7 & -9 & -3 \\ -3 & -24 & -3 \end{pmatrix}, D^{-1} = \frac{1}{765} \begin{pmatrix} -45 & 90 & -45 \\ 30 & -9 & -21 \\ -195 & -18 & -42 \end{pmatrix}, \det D = 765.$$

Prova in itinere n. 1 — Traccia B

29 ottobre 2012

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

Esercizio B.1 Utilizzando le tavole di verità dire se la seguente formula è una tautologia:

$$((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B$$

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge \neg A$	$((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1

Esercizio B.2 Scrivendo tutti i passaggi ridurre mediante equivalenze logiche la seguente formula in forma normale disgiuntiva:

$$((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B$$

$$\begin{aligned} ((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B &\leftrightarrow \neg((A \vee B) \wedge \neg A) \vee B \\ &\leftrightarrow (\neg(A \vee B) \vee \neg\neg A) \vee B \\ &\leftrightarrow ((\neg A \wedge \neg B) \vee A) \vee B \\ &\leftrightarrow ((\neg A \vee A) \wedge (\neg B \vee A)) \vee B \\ &\leftrightarrow \neg B \vee A \vee B \\ &\leftrightarrow \top \end{aligned}$$

Esercizio B.3 Si dimostri che considerati comunque gli insiemi S, T, V vale la seguente uguaglianza

$$S \times (T \cap V) = (S \times T) \cap (S \times V)$$

Esercizio B.4 Si dimostri che per ogni $n \geq 1$ il numero naturale $33^n - 1$ è un multiplo di 32.

Esercizio B.5 Si risolva, con il metodo di Gauss-Jordan, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z .

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 2 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ x + 3y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{7z+4}{7}, \frac{-6-7z}{7}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio B.6 Si considerino le seguenti matrici su \mathbb{R} :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posto $D = AB - 2C$, si determinino il determinante e la trasposta di D . Si stabilisca se D è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli D^{-1}

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 7 & 1 & -6 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}, D^t = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}, D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-21}{170} & \frac{9}{85} & \frac{-11}{85} \\ \frac{33}{170} & \frac{-2}{85} & \frac{7}{85} \\ \frac{-23}{170} & \frac{-4}{85} & \frac{-14}{85} \end{pmatrix}, \det D = 170.$$

Prova in itinere n. 1 — Traccia C

29 ottobre 2012

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

Esercizio C.1 Utilizzando le tavole di verità dire se la seguente formula è una tautologia:

$$((A \rightarrow B) \vee A) \wedge \neg B$$

A	B	$\neg B$	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \vee A$	$((A \rightarrow B) \vee A) \wedge \neg B$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0

Esercizio C.2 Scrivendo tutti i passaggi ridurre mediante equivalenze logiche la seguente formula in forma normale disgiuntiva:

$$((A \rightarrow B) \vee A) \wedge \neg B$$

$$\begin{aligned} ((A \rightarrow B) \vee A) \wedge \neg B &\leftrightarrow ((\neg A \vee B) \vee A) \wedge \neg B \\ &\leftrightarrow (\neg A \vee B \vee A) \wedge \neg B \\ &\leftrightarrow \top \wedge \neg B \\ &\leftrightarrow \neg B \end{aligned}$$

Esercizio C.3 Si dimostri che considerati comunque gli insiemi S, T, V vale la seguente uguaglianza

$$S \times (T \cup V) = (S \times T) \cup (S \times V)$$

Esercizio C.4 Si dimostri che per ogni $n \geq 1$ vale la seguente uguaglianza:

$$1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n = \frac{7^{n+1} - 1}{6}$$

Esercizio C.5 Si risolva, con il metodo di Gauss-Jordan, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z .

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x - 5z = -3 \\ y + 4z = -2 \end{cases}$$

$$S = \{(-3, -2, 0)\}$$

Esercizio C.6 Si considerino le seguenti matrici su \mathbb{R} :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posto $D = AB + C$, si determinino il determinante e la trasposta di D . Si stabilisca se D è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli D^{-1}

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, D^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}, D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{-7}{8} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{11}{24} \end{pmatrix}, \det D = -24.$$

Prova in itinere n. 1 — Traccia D

29 ottobre 2012

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

Esercizio D.1 Utilizzando le tavole di verità dire se la seguente formula è una tautologia:

$$((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)) \vee (B \wedge \neg B)$$

A	B	$\neg B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$B \wedge \neg B$	$((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	$((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)) \vee (B \wedge \neg B)$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1

Esercizio D.2 Scrivendo tutti i passaggi ridurre mediante equivalenze logiche la seguente formula in forma normale congiuntiva:

$$((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)) \vee (B \wedge \neg B)$$

$$\begin{aligned} ((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)) \vee (B \wedge \neg B) &\leftrightarrow ((\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)) \vee (B \wedge \neg B) \\ &\leftrightarrow ((\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)) \vee \perp \\ &\leftrightarrow ((\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A)) \\ &\leftrightarrow \neg A \vee B \vee \neg B \vee A \\ &\leftrightarrow \top \end{aligned}$$

Esercizio D.3 Si dimostri che considerati comunque gli insiemi S, T, V vale la seguente uguaglianza

$$S \setminus (T \cup V) = (S \setminus T) \cap (S \setminus V)$$

Esercizio D.4 Si dimostri che per ogni $n \geq 1$ vale la seguente uguaglianza:

$$1 + 11 + 11^2 + \dots + 11^n = \frac{11^{n+1} - 1}{10}$$

Esercizio D.5 Si risolva, con il metodo di Gauss-Jordan, il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z .

$$\begin{cases} x + 5y - 3z = 1 \\ y - 2z = -7 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{37}{16}, \frac{21}{8}, \frac{77}{16} \right) \right\}$$

Esercizio D.6 Si considerino le seguenti matrici su \mathbb{R} :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posto $D = AB - C$, si determinino il determinante e la trasposta di D . Si stabilisca se D è invertibile e, in caso affermativo, si calcoli D^{-1}

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & 7 & -5 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}, D^t = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}, D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} & \frac{-3}{5} & \frac{29}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{-1}{5} & \frac{13}{25} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}, \det D = -25.$$