**Prova in itinere n. 2 — Traccia A**

*26 novembre 2012*

Nome ____________ Cognome ________________ Matricola ______________

**Esercizio A.1** *Utilizzando il metodo degli alberi semantici dire se la seguente formula è una tautologia:*

$$(A \to (B \vee \neg A)) \wedge B$$

$$\mathrm{F}((A \to (B \vee \neg A)) \wedge B)$$

$\mathrm{F}(B)$ $\qquad$ $\mathrm{F}((A \to (B \vee \neg A)))$

$$\mathrm{V}(A)$$

$$\mathrm{F}((B \vee \neg A)))$$

$$\mathrm{F}((A)$$

$$\mathrm{F}(B)$$

$$=$$

Non è una tautologia, perché il ramo a sinistra è rimasto aperto.

**Esercizio A.2** *Siano date le seguenti:*

$$\begin{aligned}
X &= \forall x \exists y (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(f^{(1)}(y), c_1)) \\
A &= \mathbb{N}, \\
P_1^{\mathcal{A}}(a,b) &\quad \textit{sse} \quad a \textit{ divide } b \\
f_1^{\mathcal{A}}(a) &= 2 \cdot a, \\
c_1^{\mathcal{A}} &= 8, \\
\mathcal{A} &= \langle A, P_1^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}} \rangle, \\
\mathcal{I}(x) &= 1, \\
\mathcal{I}(y) &= 3.
\end{aligned},$$

*Scrivendo tutti i passaggi dire se $\mathcal{A}, \mathcal{I} \models X$.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}, \mathcal{I} \models \forall x \exists y (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(f^{(1)}(y), c_1)) \quad & \text{sse} \\
\text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models \exists y (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(f^{(1)}(y), c_1))[n/x] \quad & \text{sse} \\
\text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(f^{(1)}(y), c_1))[n/x][m/y] \quad & \text{sse} \\
\text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models (P_1^{(2)}(n, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(f^{(1)}(y), c_1))[m/y] \quad & \text{sse} \\
\text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models (P_1^{(2)}(n, f^{(1)}(m)) \to P_1^{(2)}(f^{(1)}(m), c_1)) \quad & \text{sse} \\
\text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models P_1^{(2)}(n, f^{(1)}(m)) \text{ oppure } \mathcal{A}, \mathcal{I} \models P_1^{(2)}(f^{(1)}(m), c_1) \quad & \text{sse} \\
\text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste } m \in \mathbb{N} \quad n \text{ non divide } 2m \text{ oppure } 2m \text{ divide } 8. &
\end{aligned}$$

È vero perché dato un qualsiasi $n$ esiste sempre $m$ (ad esempio $m < \frac{n}{2}$) tale che $n$ divide $2m$. Ma è anche vero perché esiste $m$ (ad esempio $m = 4$) tale che $2m$ divide 8.

**Esercizio A.3** *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 5\mathbb{N}_0 \to \frac{x-35}{5} \in \mathbb{Z} \quad e \quad g : y \in \mathbb{Z} \to 5|y+7| \in 5\mathbb{N}_0$$

1. *si calcolino:* $f(\{0,5,10,15\})$, $f(5\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-8,-10\})$, $f^{-1}(\mathbb{Z})$, $g(\{0,-7,-6,-8\})$, $g(\mathbb{Z})$, $g^{-1}(\{0,5,10,40\})$, $g^{-1}(5\mathbb{N}_0)$.

2. *Si stabilisca se $f$ e $g$ sono iniettive e se sono suriettive.*

3. *Si determinino le applicazioni composte $gof$ e $fog$, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive individuando in quest'ultimo caso le applicazioni inverse.*

1. $f(\{0,5,10,15\}) = \{-7,-6,-5,-4\}$, $f(5\mathbb{N}_0) = \{y \in \mathbb{Z} | y \geq -7\}$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-8-10\}) = \{35,40,30\}$, $f^{-1}(\mathbb{Z}) = 5\mathbb{N}_0$, $g(\{0,-7,-6,-8\}) = \{35,0,5\}$, $g(\mathbb{Z}) = 5\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0,5,10,40\}) = \{-7,-6,-8,-5,-9,-15,1\}$, $g^{-1}(5\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$

2. $f$ è iniettiva e non è suriettiva ad esempio $\nexists x \in 5\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = -8, -10$, $g$ è suriettiva ma non è iniettiva ad esempio $g(-6) = 5 = g(-8)$

3. $fog : y \in \mathbb{Z} \to |y+7| - 7 \in \mathbb{Z}$ non è suriettiva ( ad esempio perchè $f$ non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè $g$ non lo è)quindi non è biettiva; invece $gof$ è l'applicazione identica di $5\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa sè stessa

**Esercizio A.4** *Nel insieme $W = \{2^n 3^m | n, m \in \mathbb{N}_0\}$ dei numeri naturali i cui divisori primi sono* 2 *e* 3*, si consideri la relazione binaria $\mathcal{R}$ definita da:*

$$2^n 3^m \mathcal{R} 2^h 3^k :\iff n+h, m+k \in 2\mathbb{N}_0$$

1. *Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in $W$;*

2. *si determinino le classi $[2]_\mathcal{R}$, $[3]_\mathcal{R}$, $[6]_\mathcal{R}$, $[1]_\mathcal{R}$, $[36]_\mathcal{R}$;*

3. *quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$?*

4. *La relazione binaria $\mathcal{R}^*$ in $W$ definita da*

$$2^n 3^m \mathcal{R}^* 2^h 3^k :\iff n+h, m+k \text{ sono dispari}$$

*è una relazione di equivalenza? (motivare la risposta)*

2. $[2]_\mathcal{R} = \{2^n 3^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ pari}\}$, $[3]_\mathcal{R} = \{2^n 3^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ dispari}\}$, $[6]_\mathcal{R} = \{2^n 3^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ dispari}\}$, $[36]_\mathcal{R} = \{2^n 3^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ pari}\} = [1]_\mathcal{R}$

3. le classi sono 4; iv) $\mathcal{R}^*$ ad esempio non è riflessiva.

**Esercizio A.5** 1. *Quanti sono i numeri naturali positivi minori di 3921 divisibili per almeno uno tra 2,5,7?*

2. *Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono formare utilizzando una ed una sola volta tutte le lettere della parola PASTO?*

3. *Un gruppo di ragazzi va al ristorante di Angelo dove il menù comprende 4 primi, 2 secondi e 7 contorni. Ognuno dei ragazzi ordina un primo, un secondo ed un contorno e a ciascuno di essi Angelo serve un pranzo diverso. Da quanti ragazzi al più è formato il gruppo?*

1. 2576;

2. 5!=120;

3. 56

**Esercizio A.6**

*i) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri* $(1101)_2$, $(120)_3$*;*

*ii) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale* 382.

i)13, 15; ii) $(101111110)_2$, $(3012)_5$

Corso di Matematica Discreta e Logica Matematica

---

**Prova in itinere n. 2 — Traccia B**

*26 novembre 2012*

Nome __________________ Cognome ______________________ Matricola ____________________

**Esercizio B.1** *Utilizzando il metodo degli alberi semantici dire se la seguente formula è una tautologia:*

$$((A \vee B) \wedge \neg A)) \to B$$

$$\begin{array}{c}
\mathrm{F}(((A \vee B) \wedge \neg A) \to B) \\
| \\
\mathrm{F}(B) \\
| \\
\mathrm{V}((A \vee B) \wedge \neg A) \\
| \\
\mathrm{V}(\neg A) \\
| \\
\mathrm{V}(B \vee A) \\
| \\
\mathrm{F}(A) \\
| \\
\mathrm{F}(B) \\
\diagup \quad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
\mathrm{V}(B) & \mathrm{V}(A) \\
| & | \\
= & =
\end{array}
\end{array}$$

È una tautologia perché tutti riami sono chiusi.

**Esercizio B.2** *Siano date le seguenti:*

$$\begin{array}{rcl}
X & = & \exists y \forall z (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(x, c_1)) \\
A & = & \mathbb{N}, \\
P_1^{\mathcal{A}}(a, b) & sse & a \leq b \\
f_1^{\mathcal{A}}(a) & = & 2 \cdot a, \\
c_1^{\mathcal{A}} & = & 16, \\
\mathcal{A} & = & \langle A, P_1^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}} \rangle, \\
\mathcal{I}(x) & = & 7, \\
\mathcal{I}(y) & = & 3.
\end{array} \quad ,$$

*Scrivendo tutti i passaggi dire se* $\mathcal{A}, \mathcal{I} \models X$.

$$\mathcal{A},\mathcal{I} \models \exists y \forall z (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(x, c_1)) \quad \text{sse}$$

$$\text{Esiste } n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A},\mathcal{I} \models \forall z (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(x, c_1))[n/y] \quad \text{sse}$$

$$\text{Esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A},\mathcal{I} \models (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(y)) \to P_1^{(2)}(x, c_1))[n/y][m/z] \quad \text{sse}$$

$$\text{Esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A},\mathcal{I} \models (P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(n)) \to P_1^{(2)}(x, c_1)) \quad \text{sse}$$

$$\text{Esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A},\mathcal{I} \not\models P_1^{(2)}(x, f^{(1)}(n)) \text{ oppure } \mathcal{A},\mathcal{I} \models P_1^{(2)}(x, c_1) \quad \text{sse}$$

$$\text{Esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{I}(x) \not\leq 2n \text{ oppure } \mathcal{I}(x) \leq 16 \quad \text{sse}$$

$$\text{Esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } m \in \mathbb{N} \quad 7 \not\leq 2n \text{ oppure } 7 \leq 16.$$

È vero perché esiste $n$ (ad esempio $n = 1$) tale che per qualsiasi $m$ $7 \not\leq 2n$. Ma è anche vero perché $7 \leq 16$.

**Esercizio B.3** *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 7\mathbb{N}_0 \to \frac{x-21}{7} \in \mathbb{Z} \quad e \quad g : y \in \mathbb{Z} \to 7|y+3| \in 7\mathbb{N}_0$$

*i) si calcolino:* $f(\{0,7,14,21\})$, $f(7\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-4,-6\})$, $f^{-1}(\mathbb{Z})$, $g(\{0,-3,-2,-4\})$, $g(\mathbb{Z})$, $g^{-1}(\{0,7,14,28\})$, $g^{-1}(7\mathbb{N}_0)$.

*ii) Si stabilisca se $f$ e $g$ sono iniettive e se sono suriettive.*

*iii) Si determinino le applicazioni composte $gof$ e $fog$, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive individuando in quest'ultimo caso le applicazioni inverse.*

i) $f(\{0,7,14,21\}) = \{-3,-2,-1,0\}$, $f(7\mathbb{N}_0) = \{y \in \mathbb{Z} | y \geq -3\}$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-4,-6\}) = \{0,14,28\}$, $f^{-1}(\mathbb{Z}) = 7\mathbb{N}_0$, $g(\{0,-3,-2,-4\}) = \{21,0,7\}$, $g(\mathbb{Z}) = 7\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0,7,14,28\}) = \{-3,-2,-4,-1,-5,-7,1\}$, $g^{-1}(7\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$

ii) $f$ è iniettiva e non è suriettiva ad esempio $\nexists x \in 7\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = -4$, $g$ è suriettiva ma non è iniettiva ad esempio $g(-2) = 7 = g(-4)$

iii) $fog : y \in \mathbb{Z} \to |y+3| - 3 \in \mathbb{Z}$ non è suriettiva ( ad esempio perchè $f$ non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè $g$ non lo è)quindi non è biettiva; invece $gof$ è l'applicazione identica di $7\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa sè stessa

**Esercizio B.4** *Nel insieme* $W = \{2^n 5^m | n, m \in \mathbb{N}_0\}$ *dei numeri naturali i cui divisori primi sono 2 e 5, si consideri la relazione binaria $\mathcal{R}$ definita da:*

$$2^n 5^m \mathcal{R} 2^h 5^k :\iff n+h, m+k \in 2\mathbb{N}_0$$

*i) Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in $W$;*

*ii) si determinino le classi* $[2]_\mathcal{R}$, $[5]_\mathcal{R}$, $[10]_\mathcal{R}$, $[1]_\mathcal{R}$, $[100]_\mathcal{R}$;

*iii) quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$?*

*iv) La relazione binaria $\mathcal{R}^*$ in $W$ definita da*

$$2^n 5^m \mathcal{R}^* 2^h 5^k :\iff n+h, m+k \text{ sono dispari}$$

*è una relazione di equivalenza? (motivare la risposta)*

ii)$[2]_\mathcal{R} = \{2^n 5^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ pari}\}$, $[5]_\mathcal{R} = \{2^n 5^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ dispari}\}$, $[10]_\mathcal{R} = \{2^n 5^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ dispari}\}$, $[100]_\mathcal{R} = \{2^n 5^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ pari}\} = [1]_\mathcal{R}$ iii) le classi sono 4; iv) $\mathcal{R}^*$ ad esempio non è riflessiva.

**Esercizio B.5**

*i) Quanti sono i numeri naturali positivi minori di 3102 divisibili per almeno uno tra 2,3,11?*

*ii) Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono formare utilizzando una ed una sola volta tutte le lettere della parola DARE?*

*iii) Un gruppo di ragazzi va al ristorante di Angelo dove il menù comprende 5 primi, 3 secondi e 2 contorni. Ognuno dei ragazzi ordina un primo, un secondo ed un contorno e a ciascuno di essi Angelo serve un pranzo diverso. Da quanti ragazzi al più è formato il gruppo?*

i) 2162; ii) 4!=24; iii) 30

**Esercizio B.6**

*i) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri* $(1011)_2$, $(221)_3$*;*

*ii) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale* 124.

i)11, 25; ii) $(1111100)_2$, $(444)_5$

CORSO DI MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

---

**Prova in itinere n. 2 — Traccia C**

*26 novembre 2012*

Nome ____________________ Cognome __________________________ Matricola ______________________

**Esercizio C.1** *Utilizzando il metodo degli alberi semantici dire se la seguente formula è una tautologia:*

$$((A \to B) \vee A)) \wedge \neg B$$

$$\mathrm{F}(((A \to B) \vee A)) \wedge \neg B)$$

$\mathrm{F}(\neg B)$ | $\mathrm{F}((A \to B) \vee A)$

$\mathrm{V}(B)$ | $\mathrm{F}(A)$

$\mathrm{F}(A \to B)$

$\mathrm{V}((A)$

$\mathrm{F}(B)$

$=$

Non è una tautologia, perché il ramo di sinistra è rimasto aperto.

**Esercizio C.2** *Siano date le seguenti:*

$$\begin{array}{rcll} X &=& \forall x P_1^{(1)}(x) \vee \neg\exists y P_2^{(2)}(y,x) & \\ A &=& \mathbb{N}, & \\ P_1^{\mathcal{A}}(a) & \textit{sse} & a \textit{ è pari} & , \\ P_2^{\mathcal{A}}(a,b) & \textit{sse} & a \leq b & , \\ f_1^{\mathcal{A}}(a) &=& 2 \cdot a, & \\ \mathcal{A} &=& \langle A, P_1^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}} \rangle, & \\ \mathcal{I}(x) &=& 0, & \\ \mathcal{I}(y) &=& 0. & \end{array}$$

*Scrivendo tutti i passaggi dire se* $\mathcal{A}, \mathcal{I} \models X$.

$$\begin{array}{rr} \mathcal{A}, \mathcal{I} \models \forall x P_1^{(1)}(x) \vee \neg\exists y P_2^{(2)}(y,x) & \text{sse} \\ \mathcal{A}, \mathcal{I} \models \forall x P_1^{(1)}(x) \text{ oppure } \mathcal{A}, \mathcal{I} \models \neg\exists y P_2^{(2)}(y,x) & \text{sse} \\ \text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models P_1^{(1)}(x)[n/x] \text{ oppure } \mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models \exists y P_2^{(2)}(y,x) & \text{sse} \\ \text{Per ogni } n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}, \mathcal{I} \models P_1^{(1)}(n) \text{ oppure esiste } m \in \mathbb{N} \text{ tale che } \mathcal{A}, \mathcal{I} \not\models P_2^{(2)}(y,x)[m/y] & \text{sse} \\ \text{O ogni } n \in \mathbb{N}\, n \text{ è pari oppure esiste } m \in \mathbb{N} \text{ tale che } m \not\leq \mathcal{I}(x) & \text{sse} \\ \text{O ogni } n \in \mathbb{N}\, n \text{ è pari oppure esiste } m \in \mathbb{N} \text{ tale che } m \not\leq 0 & \text{sse} \end{array}$$

È vero perché esiste $m$ (ad esempio $m = 1$) tale che $m \not\leq 0$.

**Esercizio C.3** *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 3\mathbb{N}_0 \to \frac{x-33}{3} \in \mathbb{Z} \quad e \quad g : y \in \mathbb{Z} \to 3|y+11| \in 3\mathbb{N}_0$$

*i) si calcolino:* $f(\{0,3,6,33\})$, $f(3\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-12,-13\})$, $f^{-1}(\mathbb{Z})$, $g(\{0,-11,-10,-12\})$, $g(\mathbb{Z})$, $g^{-1}(\{0,3,6,36\})$, $g^{-1}(3\mathbb{N}_0)$.

*ii) Si stabilisca se $f$ e $g$ sono iniettive e se sono suriettive.*

*iii) Si determinino le applicazioni composte $gof$ e $fog$, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive individuando in quest'ultimo caso le applicazioni inverse.*

i) $f(\{0,3,6,33\}) = \{-11,-9,-10,0\}$, $f(3\mathbb{N}_0) = \{y \in \mathbb{Z} | y \geq -11\}$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-12,-13\}) = \{30,33,36\}$, $f^{-1}(\mathbb{Z}) = 3\mathbb{N}_0$, $g(\{0,-11,-10,-12\}) = \{33,0,3\}$, $g(\mathbb{Z}) = 3\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0,3,6,36\}) = \{-11,-10,-12,-13,-9,-23,-1\}$, $g^{-1}(3\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$

ii) $f$ è iniettiva e non è suriettiva ad esempio $\nexists x \in 3\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = -12$, $g$ è suriettiva ma non è iniettiva ad esempio $g(-10) = 3 = g(-12)$

iii) $fog : y \in \mathbb{Z} \to |y+11| - 11 \in \mathbb{Z}$ non è suriettiva ( ad esempio perchè $f$ non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè $g$ non lo è)quindi non è biettiva; invece $gof$ è l'applicazione identica di $3\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa se stessa

**Esercizio C.4** *Nel insieme* $W = \{3^n 5^m | n, m \in \mathbb{N}_0\}$ *dei numeri naturali i cui divisori primi sono 3 e 5, si consideri la relazione binaria $\mathcal{R}$ definita da:*

$$3^n 5^m \mathcal{R} 3^h 5^k :\Longleftrightarrow n+h, m+k \in 2\mathbb{N}_0$$

*i) Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in $W$;*

*ii) si determinino le classi* $[3]_{\mathcal{R}}$, $[5]_{\mathcal{R}}$, $[15]_{\mathcal{R}}$, $[1]_{\mathcal{R}}$, $[225]_{\mathcal{R}}$;

*iii) quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$?*

*iv) La relazione binaria $\mathcal{R}^*$ in $W$ definita da*

$$3^n5^m\mathcal{R}^*3^h5^k :\Longleftrightarrow n+h, m+k \quad \textit{sono dispari}$$

*è una relazione di equivalenza? (motivare la risposta)*

ii)$[3]_{\mathcal{R}} = \{3^n5^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ pari}\}$, $[5]_{\mathcal{R}} = \{3^n5^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ dispari}\}$, $[15]_{\mathcal{R}} = \{3^n5^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ dispari}\}$, $[225]_{\mathcal{R}} = \{3^n5^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ pari}\} = [1]_{\mathcal{R}}$ iii) le classi sono 4; iv) $\mathcal{R}^*$ ad esempio non è riflessiva.

**Esercizio C.5**

*i) Quanti sono i numeri naturali positivi minori di 3003 divisibili per almeno uno tra 3,11,13?*

*ii) Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono formare utilizzando una ed una sola volta tutte le lettere della parola CORPI?*

*iii) Un gruppo di ragazzi va al ristorante di Angelo dove il menù comprende 3 primi, 5 secondi e 2 contorni. Ognuno dei ragazzi ordina un primo, un secondo ed un contorno e a ciascuno di essi Angelo serve un pranzo diverso. Da quanti ragazzi al più è formato il gruppo?*

i) 1323; ii) 5!=120; iii) 30

**Esercizio C.6**

*i) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri* $(1001)_2$, $(210)_3$;

*ii) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale* 311.

i)9, 21; ii) $(100110111)_2$, $(2221)_5$

Corso di Matematica Discreta e Logica Matematica

---

**Prova in itinere n. 2 — Traccia D**

*26 novembre 2012*

Nome __________________ Cognome ______________________ Matricola ____________________

**Esercizio D.1** *Utilizzando il metodo degli alberi semantici dire se la seguente formula è una tautologia:*

$$((A \to B) \vee (B \to A)) \vee (B \wedge \neg B)$$

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}(((A \to B) \vee (B \to A)) \vee (B \wedge \neg B)) \\
| \\
\mathrm{F}(((A \to B) \vee (B \to A)) \\
| \\
\mathrm{F}((B \wedge \neg B)) \\
| \\
\mathrm{F}(A \to B) \\
| \\
\mathrm{F}(B \to A) \\
| \\
\mathrm{V}(A) \\
| \\
\mathrm{F}(B) \\
| \\
\mathrm{V}(B) \\
| \\
\mathrm{F}(A) \\
| \\
=
\end{array}
$$

È una tautologia, perché tutti i rami sono chiusi.

**Esercizio D.2** *Siano date le seguenti:*

$$
\begin{array}{rcl}
X & = & \forall x P_1^{(1)}(x) \leftrightarrow \neg P_2^{(2)}(y, x) \\
A & = & \mathbb{N}, \\
P_1^{\mathcal{A}}(a) & \textit{sse} & a \textit{ è divisibile per } 5, \\
P_2^{\mathcal{A}}(a, b) & \textit{sse} & a \leq b, \\
f_1^{\mathcal{A}}(a) & = & 2 \cdot a, \\
\mathcal{A} & = & \langle A, P_1^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}} \rangle, \\
\mathcal{I}(x) & = & 5, \\
\mathcal{I}(y) & = & 15.
\end{array}
$$

*Scrivendo tutti i passaggi dire se* $\mathcal{A}, \mathcal{I} \models X$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A},\mathcal{I} \models \forall x P_1^{(1)}(x) \leftrightarrow \neg P_2^{(2)}(y,x) && \text{sse}\\
\mathcal{A},\mathcal{I} \models (\forall x P_1^{(1)}(x) \rightarrow \neg P_2^{(2)}(y,x)) \wedge \neg P_2^{(2)}(y,x) \rightarrow \forall x P_1^{(1)}(x) && \text{sse}\\
\mathcal{A},\mathcal{I} \models (\forall x P_1^{(1)}(x) \rightarrow \neg P_2^{(2)}(y,x)) \text{ e } \mathcal{A},\mathcal{I} \models \neg P_2^{(2)}(y,x) \rightarrow \forall x P_1^{(1)}(x) && \text{sse}\\
\mathcal{A},\mathcal{I} \not\models \forall x P_1^{(1)}(x) \text{ oppure } \mathcal{A},\mathcal{I} \models \neg P_2^{(2)}(y,x)). \text{ Inoltre } \mathcal{A},\mathcal{I} \models \neg P_2^{(2)}(y,x) \rightarrow \forall x P_1^{(1)}(x) && \text{sse}\\
\text{Per ogni } n\in\mathbb{N} \quad \mathcal{A},\mathcal{I} \not\models P_1^{(1)}(x)[n/x] \text{ o } \mathcal{A},\mathcal{I} \not\models P_2^{(2)}(y,x)). && \\
\text{Inoltre } \mathcal{A},\mathcal{I} \not\models \neg P_2^{(2)}(y,x) \text{ o } \mathcal{A},\mathcal{I} \models \forall x P_1^{(1)}(x) && \text{sse}\\
\text{Per ogni } n\in\mathbb{N} \quad \mathcal{A},\mathcal{I} \not\models P_1^{(1)}(n) \text{ o } \mathcal{A},\mathcal{I} \not\models P_2^{(2)}(y,x)). && \\
\text{Inoltre } \mathcal{A},\mathcal{I} \not\models \neg P_2^{(2)}(y,x) \text{ o per ogni } m\in\mathbb{N} \quad \mathcal{A},\mathcal{I} \models P_1^{(1)}(x)[m/x] && \text{sse}\\
\text{Per ogni } n\in\mathbb{N} \quad n \text{ non è divisibile per 5 oppure } \mathcal{I}(y) \not\leq \mathcal{I}(x). && \\
\text{Inoltre } \mathcal{A},\mathcal{I} \models P_2^{(2)}(y,x) \text{ o per ogni } m\in\mathbb{N} \quad m \text{ è divisibile per 5.} && \text{sse}\\
\text{Per ogni } n\in\mathbb{N} \quad n \text{ non è divisibile per 5 oppure } 15 \not\leq 5. && \\
\text{Inoltre } \mathcal{I}(y) \leq \mathcal{I}(x) \text{ o per ogni } m\in\mathbb{N} \quad m \text{ è divisibile per 5.} && \text{sse}\\
\text{Per ogni } n\in\mathbb{N} \quad n \text{ non è divisibile per 5 oppure } 15 \not\leq 5. && \\
\text{Inoltre } 15 \leq 5 \text{ o per ogni } m\in\mathbb{N} \quad m \text{ è divisibile per 5.} && .
\end{aligned}$$

È falso perché $15 \not\leq 5$ e ci sono $m \in \mathbb{N}$ divisibili per 5.

**Esercizio D.3** *Considerate le applicazioni:*

$$f : x \in 11\mathbb{N}_0 \rightarrow \frac{x-22}{11} \in \mathbb{Z} \quad e \quad g : y \in \mathbb{Z} \rightarrow 11|y+2| \in 11\mathbb{N}_0$$

*i) si calcolino:* $f(\{0,11,22,33\})$, $f(11\mathbb{N}_0)$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-3,-4\})$, $f^{-1}(\mathbb{Z})$, $g(\{0,-2,-4,-3\})$, $g(\mathbb{Z})$, $g^{-1}(\{0,11,22,44\})$, $g^{-1}(11\mathbb{N}_0)$.

*ii) Si stabilisca se $f$ e $g$ sono iniettive e se sono suriettive.*

*iii) Si determinino le applicazioni composte $gof$ e $fog$, si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biettive individuando in quest'ultimo caso le applicazioni inverse.*

i) $f(\{0,11,22,33\}) = \{-2,-1,0,1\}$, $f(11\mathbb{N}_0) = \{y \in \mathbb{Z} | y \geq -2\}$, $f^{-1}(\{0,-1,1,-3,-4\}) = \{22,11,33\}$, $f^{-1}(\mathbb{Z}) = 11\mathbb{N}_0$, $g(\{0,-2,-4,-3\}) = \{22,0,11\}$, $g(\mathbb{Z}) = 11\mathbb{N}_0$, $g^{-1}(\{0,11,22,44\}) = \{-2,-1,-3,0,-4,2,-6\}$, $g^{-1}(11\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}$

ii) $f$ è iniettiva e non è suriettiva ad esempio $\nexists x \in 11\mathbb{N}_0$ tale che $f(x) = -3$, $g$ è suriettiva ma non è iniettiva ad esempio $g(0) = 22 = g(-4)$

iii) $fog : y \in \mathbb{Z} \rightarrow |y+2|-2 \in \mathbb{Z}$ non è suriettiva ( ad esempio perchè $f$ non lo è) e non è iniettiva (ad esempio perchè $g$ non lo è)quindi non è biettiva; invece $gof$ è l'applicazione identica di $11\mathbb{N}_0$ dunque è biettiva ed ha come inversa se stessa

**Esercizio D.4** *Nel insieme $W = \{2^n 7^m | n,m \in \mathbb{N}_0\}$ dei numeri naturali i cui divisori primi sono 2 e 7, si consideri la relazione binaria $\mathcal{R}$ definita da:*

$$2^n 7^m \mathcal{R} 2^h 7^k :\Longleftrightarrow n+h, m+k \in 2\mathbb{N}_0$$

*i) Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in $W$;*

*ii) si determinino le classi $[2]_{\mathcal{R}}$, $[7]_{\mathcal{R}}$, $[14]_{\mathcal{R}}$, $[1]_{\mathcal{R}}$, $[196]_{\mathcal{R}}$;*

*iii) quante sono le classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$?*

*iv) La relazione binaria $\mathcal{R}^*$ in $W$ definita da*

$$2^n 7^m \mathcal{R}^* 2^h 7^k :\Longleftrightarrow n+h, m+k \ \ \textit{sono dispari}$$

*è una relazione di equivalenza? (motivare la risposta)* ii)$[2]_{\mathcal{R}} = \{2^n 7^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ pari}\}$, $[7]_{\mathcal{R}} = \{2^n 7^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ dispari}\}$, $[14]_{\mathcal{R}} = \{2^n 7^m \in W | n \text{ dispari}, m \text{ dispari}\}$, $[196]_{\mathcal{R}} = \{2^n 7^m \in W | n \text{ pari}, m \text{ pari}\} = [1]_{\mathcal{R}}$ iii) le classi sono 4; iv) $\mathcal{R}^*$ ad esempio non è riflessiva.

**Esercizio D.5**

*i) Quanti sono i numeri naturali positivi minori di 4928 divisibili per almeno uno tra 2,7,11?*

*ii) Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono formare utilizzando una ed una sola volta tutte le lettere della parola CANE?*

*iii) Un gruppo di ragazzi va al ristorante di Angelo dove il menù comprende 8 primi, 3 secondi e 2 contorni. Ognuno dei ragazzi ordina un primo, un secondo ed un contorno e a ciascuno di essi Angelo serve un pranzo diverso. Da quanti ragazzi al più è formato il gruppo?*

i) 3008; ii) 4!=24; iii) 48

**Esercizio D.6**

*i) Si determini la rappresentazione decimale dei seguenti numeri* $(1000)_2$, $(211)_3$*;*

*ii) Si determinino le rappresentazioni in base 2 e 5 del numero in forma decimale* 255.

i)8, 22; ii) $(11111111)_2$, $(2010)_5$