Università degli Studi di Salerno

CdL Informatica: Matematica Discreta e Logica Matematica 2010/11

Programma delle lezioni tenute dal dr. Luca Vitagliano

Numeri: Insiemi numerici. Somma e prodotto di numeri. Proprietà delle operazioni in $\mathbb{K} = \mathbb{Q},\mathbb{R}$.

Matrici: definizioni e operazioni: Stringhe ordinate di n oggetti. Matrici di ordine m×n su $\mathbb{K}$. Matrici quadrate. Matrici a gradini pivot, matrici triangolari, matrici diagonali, matrice identica di ordine n e simbolo di Kronecker. Somma di matrici. Proprietà della somma. Prodotto esterno di una matrice per un numero. Proprietà del prodotto esterno. Proprietà distributive del prodotto esterno rispetto alle somme di numeri e di matrici. Matrici moltiplicabili. Prodotto righe per colonne. Proprietà del prodotto righe per colonne. Proprietà distributive del prodotto righe per colonne e compatibilità con il prodotto esterno. Prodotto per la matrice identica. Trasposizione. Proprietà della trasposizione.

Matrici: trasformazioni elementari: Trasformazioni elementari di I e II specie. Riduzione a gradini. Algoritmo di Gauss.

Matrici: determinante: Riordinamenti. Segno di un riordinamento. Determinante di una matrice quadrata. Proprietà dei determinanti: multilinearità, antisimmetria (senza dimostrazione), determinante di matrici trasposte (senza dimostrazione). Determinante di una matrice con una riga (colonna) nulla, determinante di una matrice con due righe (colonne) uguali, determinanti e trasformazioni elementari di I e II specie. Teorema di Binet (senza dimostrazione). Sottomatrici. Minori. Minori complementari. Complementi algebrici. I Teorema di Laplace (senza dimostrazione). Determinante di una matrice triangolare. Determinante della matrice identica. Calcolo del determinante mediante la riduzione a gradini. II Teorema di Laplace. Matrici Invertibili. Inversa di una matrice quadrata. Determinanti e matrice inversa. Matrice inversa della matrice identica.

Sistemi Lineari: Sistemi di m equazioni lineari in n incognite. Sistemi compatibili e incompatibili. Sistemi omogenei. Soluzione banale dei sistemi omogenei. Matrice dei coefficienti. Matrice completa. Forma matriciale di un sistema. Ricerca di soluzioni. Sistemi quadrati, Metodo di Cramer. Sistemi a gradini, soluzioni di un sistema a gradini. Sistemi equivalenti. Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema. Metodo di Gauss-Jordan (o di eliminazione di Gauss).

Spazi Vettoriali: definizioni. Spazi vettoriali su $\mathbb{K} = \mathbb{Q},\mathbb{R}$. Vettori. Scalari. Proprietà elementari: prodotto per il vettore nullo, prodotto per lo scalare nullo, prodotto per l'opposto di uno scalare, integrità. Spazio vettoriale geometrico. Spazi vettoriali numerici. Sottospazi vettoriali. Sottospazi vettoriali banali, sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, sottospazi dello spazio dei vettori geometrici.

Spazi vettoriali: sistemi di generatori. Combinazioni lineari di vettori. Sistemi di vettori. Sottospazi generati da sistemi di vettori. Sistemi di generatori. Spazi vettoriali finitamente generati. Sistema di generatori canonico dello spazio vettoriale numerico, sistemi di generatori dello spazio dei vettori geometrici. Sottospazi di uno spazio finitamente generato sono finitamente generati (senza dimostrazione). Sistemi di generatori per lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

Spazi Vettoriali: dipendenza e indipendenza lineare. Sistemi di vettori indipendenti. Sistemi di vettori dipendenti. Un sistema di vettori è indipendente sse un vettore del sistema è combinazione lineare degli altri. Singleton indipendente e dipendente, coppie di vettori dipendenti e indipendenti, un sistema che contiene il vettore nullo è dipendente, un sistema che contiene due vettori uguali è dipendente, il sistema di generatori canonico di $\mathbb{K}^n$ è indipendente, sistemi di vettori indipendenti dello spazio vettoriale geometrico.

Spazi Vettoriali: Basi. Basi. Base canonica dello spazio vettoriale numerico, basi degli spazi vettoriali geometrici. Componenti di un vettore in una base. Applicazione coordinata associata ad una base e proprietà. Riduzione ad una base di un sistema di generatori. Completamento ad una base di un sistema indipendente (cenni alla dimostrazione). Cardinalità delle basi (senza dimostrazione). Dimensione. Sistemi di generatori e sistemi indipendenti con dim V elementi. Dimensione dei sottospazi. Basi dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

Matrici: rango. Rango (per righe e per colonne) di una matrice. Rango della matrice nulla. Il rango di una matrice è il massimo ordine di un minore non nullo e le colonne (righe) che individuano il minore sono indipendenti (senza dimostrazione). Il rango per righe e il rango per colonne coincidono. Teorema degli orlati (senza dimostrazione). Una matrice quadrata è invertibile sse ha rango massimo. Rango di una matrice a gradini. Rango e trasformazioni elementari. Calcolo del rango mediante riduzione a gradini.

Sistemi Lineari. Teorema di Rouché-Capelli. Rango e numero di soluzioni di un sistema.

Applicazioni Lineari. Applicazioni lineri. Proprietà elementari: l'immagine del vettore nullo è il vettore nullo, l'immagine di una combinazione lineare è "combinazione lineare delle immagini", composta di applicazioni lineari è un'applicazione lineare. L'applicazione coordinata associata ad una base è lineare. Applicazioni lineari determinate da matrici. Ogni applicazione lineare di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ è determinata da una matrice (senza dimostrazione). Nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Applicazioni lineari suriettive e iniettive. Immagine di un'applicazione lineare suriettiva. Nucleo di un'applicazione lineare iniettiva. Un'applicazione lineare è suriettiva sse manda sistemi di generatori in sistemi di generatori. Un'applicazione lineare è iniettiva sse manda sistemi indipendenti in sistemi indipendenti. Nucleo e immagine dell'applicazione lineare determinata da una matrice. Rango di una matrice e dimensione dell'immagine e del nucleo dell'applicazione lineare associata. Verifica dell'iniettività e della suriettività dell'applicazione lineare determinata da una matrice.

Isomorfismi di Spazi Vettoriali. Isomorfismi. L'inversa di un isomorfismo è un'isomorfismo. Composta di isomorfismi è un isomorfismo. Un'applicazione lineare è un isomorfismo sse manda basi in basi. Gli isomorfismi conservano la dimensione. Identificazione di spazi vettoriali mediante isomorfismi e spazi isomorfi. Ogni applicazione coordinata è un isomorfismo. Due spazi vettoriali sono isomorfi sse hanno la stessa dimensione.

Applicazioni Lineari e Matrici. Matrici rappresentative di un'applicazione lineare. Matrice rappresentativa di un'applicazione lineare tra spazi vettoriali numerici. Matrici del cambiamento di base. Proprietà delle matrici del cambiamento di base (senza dimostrazione). Cambiamento di base e formula di trasformazione. Matrici del cambiamento di base negli spazi vettoriali numerici.

Endomorfismi e diagonalizzazione. Matrice rappresentativa di un endomorfismo. Endomorfismo associato ad una matrice quadrata. Formula di trasformazione per la matrice rappresentativa di un endomorfismo. Basi diagonalizzanti. Endomorfismi diagonalizzabili. Matrici diagonalizzabili. Autovalori ed autovettori di endomorfismi e matrici. Ricerca di autovalori. Equazione caratteristica. Polinomio caratteristico. Gli autovalori di un endomorfismo (matrice) sono le radici del polinomio caratteristico. Il polinomio caratteristico è indipendente dalla scelta di una base (senza dimostrazione). Richiami sui polinomi. Radici di un polinomio. Numero di radici di un polinomio. Decomposizione standard di un polinomio mediante le sue radici. Molteplicità delle radici di un polinomio. Un endomorfismo (una matrice) ha al più n autovalori distinti. Ricerca di autovettori. Equazione agli auto vettori. Unicità dell'autovalore relativo ad un autovettore. Autospazio relativo ad un autovalore. Ogni autospazio è un sottospazio vettoriale. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Relazione tra molteplicità algebrica e geometrica (senza dimostrazione). L'unione di sistemi indipendenti di autovettori (associati ad autovalori distinti) è indipendente (senza dimostrazione). Teorema Spettrale.

Bibliografia: Teoria.

A. Facchini, Algebra e Matematica Discreta, Decibel-Zanichelli: pagg. 51-58, 75-76, 181-190, 299-304, 308-309, 312-318, 326-328, 332-342, 348-349.
E. Sernesi, Geometria 1, Bollati Boringhieri: pagg. 33-43, 75-84, 166-171.
Appunti del Corso.

Bibliografia: Esercizi.

S. Lipschutz, M. Lipson, Algebra Lineare, collana Schaum's, McGraw-Hill.
Appunti del corso.

Luca Vitagliano

This document was created with Win2PDF available at http://www.win2pdf.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.