A

Principio di induzione

Il principio d'induzione è un enunciato sui numeri naturali che in matematica trova un ampio impiego nelle dimostrazioni. Esso asserisce che:

Definition A.1. *Sia $\mathcal{P}(n)$ una proprietà che dipende dalla variabile naturale n. Se:*

- *$\mathcal{P}(n_0)$ è vera, e*
- *per ogni $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ vera implica anche $\mathcal{P}(n+1)$ vera,*

allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$

L'idea intuitiva con ci aiuta a comprendere il senso dell'enunciato è quella di un "effetto domino": affinchè delle tessere da domino, disposte lungo una fila, cadano tutte sono sufficienti due condizioni:

- che cada la prima tessera
- che le tessere siano posizionate in maniera tale che la caduta di ogni tessera provochi la caduta della tessera successiva

Il principio d'induzione estende questa idea al caso in cui la fila è composta da infinite tessere.

A.1 Dimostrazioni per induzione

Il principio d'induzione offre un importante strumento per le dimostrazioni. Per dimostrare che una certa proprietà $\mathcal{P}(n)$ in cui compare un numero naturale n vale per qualunque $n \in \mathbf{N}$ si può sfruttare il principio d'induzione come segue:

1. si dimostra che $\mathcal{P}(n_0)$ è vera;
2. si assume come ipotesi che la proprietà $\mathcal{P}$ valga per un generico $n \geq n_0$ (tale ipotesi va sotto il nome di **ipotesi induttiva**) e si dimostra che, sotto tale assunzione, anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

In base al principio di induzione possiamo concludere $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$. Il punto 1 è generalmente chiamato **base** dell'induzione, il punto 2 **passo induttivo**.

Un modo intuitivo con cui si può guardare a questo tipo di dimostrazioni è il seguente: se disponiamo di una dimostrazione della base $\mathcal{P}(0)$ e del passo induttivo $\forall n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ allora possiamo sfruttare queste informazioni per concludere che $\mathcal{P}(0) \Rightarrow \mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2) \Rightarrow \mathcal{P}(3) \ldots$. È chiaro, a questo punto, che possiamo produrre una dimostrazione in un numero finito di passi (eventualmente lunghissimo) di $\mathcal{P}(n)$ per qualunque numero naturale n, da cui deduciamo che $\mathcal{P}(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Example A.2. Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

per ogni $n \geq 1$.

Soluzione. Per quanto detto sopra ci basta dimostrare il caso base ed il passo induttivo

- Caso base; in questo caso $n_0 = 1$. Poichè $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$, possiamo concludere che $\mathcal{P}(1)$ è vera.
- Passo induttivo. Sia $n \geq n_0$, ed assumiamo $\mathcal{P}(n)$ vera, ossia $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Allora:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \big(\sum_{i=1}^{n} i\big) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} =$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}$$

ossia $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

A.2 Esercizi svolti

Exercise A.3. Sia $\alpha \in \mathbf{R}^+$ (reali positivi) con $\alpha \neq 1$. Dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha^i = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

per ogni $n \geq 0$.

Soluzione. • Caso base; in questo caso $n_0 = 0$. Poichè $\sum\limits_{i=0}^{0} \alpha^i = \alpha^0 = 1 = \frac{1-\alpha^{0+1}}{1-\alpha}$, possiamo concludere che $\mathcal{P}(1)$ è vera.

- Passo induttivo. Sia $n \geq 0$, ed assumiamo $\mathcal{P}(n)$ vera, ossia che $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha^i = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$. Allora:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \big(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i\big) + \alpha^{n+1} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} + \alpha^{n+1} = \frac{1-\alpha^{n+1} + (1-\alpha)\alpha^{n+1}}{1-\alpha} =$$

$$\frac{1-\alpha^{n+1} + \alpha^{n+1} - \alpha^{n+2}}{1-\alpha} = \frac{1-\alpha^{(n+1)+1}}{1-\alpha}$$

ossia $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

Exercise A.4. Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

per ogni $n \geq 1$.

Soluzione. • Caso base; in questo caso $n_0 = 1$. Poichè $\sum\limits_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$, $\mathcal{P}(1)$ è vera.

- Passo induttivo. Sia $n \geq n_0$, ed assumiamo $\mathcal{P}(n)$ vera, ossia $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Allora:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \big(\sum_{i=1}^{n} i\big) + (n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

ossia $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.