Esercizi sulla semantica del Calcolo dei Predicati

1) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $x = (23, 17, 7)$ una valutazione delle variabili v_1, v_2, v_3. Inoltre sia:

$P_1(a)$ interpretato come "a è numero primo";

$P_2(a, b)$ interpretato come "a e b sono coprimi";

$P_3(a, b)$ interpretato come "a è un divisore di b";

$P_4(a)$ interpretato come "$a \geq 100$".

Dire se le seguenti affermazioni sono vere e spiegare il perché:

a) $\mathbb{N} \vDash_x \forall v((P_1(v) \wedge P_4(v)) \to P_2(v, v_1))$.

b) $\mathbb{N} \vDash_x \exists v P_3(v, v_2) \vee P_3(v_2, v_3)$.

2) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $x = (2, 16, 8)$ una valutazione delle variabili v_1, v_2, v_3. Inoltre sia:

$P_1(a)$ interpretato come "a è numero primo";

$P_2(a, b)$ interpretato come "a e b sono coprimi";

$P_3(a, b)$ interpretato come "a è un divisore di b";

$P_4(a)$ interpretato come "a è pari";

$P_5(a, b)$ interpretato come "$a = b$".

Dire se le seguenti affermazioni sono vere e spiegare il perché:

(i) $\mathbb{N} \vDash_x \forall v((P_1(v) \wedge P_4(v)) \to P_3(v, v_2))$.

(ii) $\mathbb{N} \vDash_x \neg P_1(v_3) \wedge \forall v(P_2(v, v_3) \to \neg P_5(v, v_1))$.

3) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $x = (3, 4, 5, 6, 7)$ una valutazione delle variabili v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Inoltre sia:

$P_1(a)$ interpretato come "a è numero primo";

$P_2(a, b)$ interpretato come "$a = b - 1$";

$P_3(a, b)$ interpretato come "$a = b + 1$";

$P_4(a, b, c)$ interpretato come "$a = b = c$".

Dire se le seguenti affermazioni sono vere e spiegare il perché:

(i) $\mathbb{N} \vDash_x \exists v(P_3(v, v_5) \wedge P_2(v_5, v)) \wedge P_1(v_1)$.

(ii) $\mathbb{N} \vDash_x \forall v(P_4(v, v_2, v_3) \vee (P_3(v, v_4) \to P_1(v)))$.

4) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $x = (3, 11, 13)$ una valutazione delle variabili v_1, v_2, v_3. Inoltre sia:

$P_1(a)$ interpretato come "a è numero primo";

$P_2(a, b)$ interpretato come "a divide b";

$P_3(a, b)$ interpretato come "$a \geq b + 1$".

Dire se le seguenti affermazioni sono vere e spiegare il perché:

(i) $\mathbb{N} \models_x \forall v(P_1(v) \leftrightarrow \neg(P_2(v_3, v) \vee P_2(v_2, v))) \vee P_1(v_1)$.

(ii) $\mathbb{N} \models_x \exists v((P_3(v, v_3) \wedge P_1(v)) \rightarrow \neg P_2(v_3, v))$.

4) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $x = (1, 2, 3, 5, 7, 11, 13)$ una valutazione delle variabili v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7. Inoltre sia:

$P_1(a)$ interpretato come "a è un numero pari";

$P_2(a, b)$ interpretato come "$a \leq b$";

$P_3(a, b)$ interpretato come "$a \geq b + 1$";

$P_4(a)$ interpretato come "$a \geq 10000$".

Dire se le seguenti affermazioni sono vere e spiegare il perché:

(i) $\mathbb{N} \models_x \forall v(P_1(v) \leftrightarrow \neg(P_2(v_7, v) \vee P_2(v_6, v))) \vee P_4(v_3)$.

(ii) $\mathbb{N} \models_x \exists v((P_3(v, v_7) \wedge P_1(v)) \rightarrow \neg P_2(v_7, v))$.

5) Si consideri il linguaggio contenente i predicati unari A, B, C, e il predicato binario D. Nell'insieme degli eventi naturali interpretiamo:

$A(x)$ come "x è un terremoto"

$B(x)$ come "l'epicentro di x è in fondo all'oceano"

$C(x)$ come "x è un'onda anomala"

$D(x, y)$ come "x causa y".

Scrivere il significato della formula

$$\exists x(A(x) \wedge B(x) \wedge \neg \exists y(C(y) \wedge D(x, y))).$$

7) Si consideri il linguaggio contenente i predicati unari A, B, C, e il predicato binario D. Nell'insieme delle squadre di calcio italiane interpretiamo:

$A(x)$ come "x retrocede in serie B"

$B(x)$ come "x vince lo scudetto"

$C(x)$ come "x partecipa alla Coppa UEFA"

$D(x, y)$ come "x è più forte di y".

Scrivere il significato della formula

$$\forall x \forall y((A(x) \wedge \neg C(x) \wedge B(y)) \rightarrow D(y, x)).$$

8) Si consideri il linguaggio contenente i predicati unari A, B, C, e il predicato binario D. Nell'insieme dei segni zodiacali interpretiamo:

$A(x)$ come "x è un segno d'aria"

$B(x)$ come "x è un segno di terra"

$C(x)$ come "x è un segno d'acqua"

$D(x, y)$ come "x ed y cadono nella stessa stagione".

Scrivere il significato della formula

$$\exists x \exists z(A(x) \wedge C(z) \wedge D(z, x)) \wedge \exists x \neg(A(x) \vee B(x) \vee C(x)).$$

9) Si consideri il linguaggio contenente i predicati unari A, B, C, e il predicato binario D. Nell'insieme dei corpi celesti interpretiamo:

$A(x)$ come "x è un pianeta"

$B(x)$ come "x è un satellite"

$C(x)$ come "x è una stella"

$D(x, y)$ come "x orbita intorno ad y".

Scrivere il significato della formula

$$\exists x \exists y (A(x) \wedge C(y) \wedge D(x, y) \wedge (\neg \exists z B(z) \wedge D(z, x))).$$

10) Si consideri il linguaggio contenente i predicati unari A, B, C, e il predicato binario D. Nell'insieme degli studenti universitari interpretiamo:

$A(x)$ come "x è iscritto al Corso di Laurea in Informatica"

$B(x)$ come "ad x piace la Logica Matematica"

$C(x)$ come "x supera l'esame di Logica Matematica"

$D(x, y)$ come "x aiuta y per l'esame di Logica Matematica".

Scrivere il significato della formula

$$\exists x \exists y (A(x) \wedge A(y) \wedge B(x) \wedge (\neg C(y) \rightarrow D(x, y))).$$

Soluzioni

Esercizio 1

a) Per ogni numero naturale v, se v è primo e maggiore o uguale a 100, allora v e 23 sono coprimi.

VERA. Infatti, se v è primo e maggiore o uguale a 100, allora $v \neq 23$ e, poiché anche 23 è primo, $\mathrm{MCD}(v, 23) = 1$.

b) Esiste un numero naturale v che divide 17, oppure 17 è un divisore di 7.

VERA. In $\mathbb{N}$ esistono 1 e 17 che sono divisori di 17.

Esercizio 2

(i) Per ogni numero naturale v, se v è primo e pari, allora v è un divisore di 16.

VERA. Infatti l'unico numero primo pari è 2, e 2 è anche - ovviamente - un divisore di 16.

(ii) Il numero 8 non è primo e, se v è un numero naturale primo con 8, v è diverso da 2.

VERA. Infatti 8 non è primo e, poiché $8 = 2^3$, qualunque numero che sia primo con 8 dev'essere necessariamente diverso da 2.

Esercizio 3

(i) Esiste un numero naturale v tale che $v = 7+1$ e $7 = v-1$, e 3 è un numero primo.

VERA. Infatti, scelto $v = 8$, si ha che $v = 7 + 1$ e $7 = v - 1$. Inoltre 3 è effettivamente un numero primo.

(ii) Per ogni numero naturale v, o $v = 4 = 5$ oppure, se $v = 7$, allora v è primo.

VERA. La seconda condizione è chiaramente verificata.

Esercizio 4

(i) Un qualunque numero naturale v è primo se e solo se non è divisibile né per 11 né per 13, oppure 3 è primo.

VERA. La prima parte è falsa, la seconda è vera e ad unirle c'è una disgiunzione.

(ii) Esiste un numero primo v maggiore di 14 e non divisibile per 13.

VERA. Ad esempio il numero 17 verifica l'asserzione.

Esercizio 5

(*i*) Un qualunque numero naturale v è pari se e solo se è minore di 13 e di 11, oppure 3 è maggiore o uguale a 10000.

FALSA. La prima parte è falsa perché esistono numeri pari maggiori di 13, e la seconda è falsa perché, ovviamente, 3 è minore di 10000.

(*ii*) Se esiste un numero pari v maggiore o uguale a 14, allora v è minore di 13.

FALSA. Chiaramente un numero maggiore o uguale a 14 non può essere minore di 13.

Esercizio 6

Esistono terremoti che, pur avendo l'epicentro in fondo all'oceano, non causano alcuna onda anomala.

Esercizio 7

Se x ed y sono due qualunque squadre di calcio tali che x retrocede in serie B e non partecipa alla Coppa UEFA e y vince lo scudetto, allora y è più forte di x.

Esercizio 8

Esistono un segno zodiacale d'aria e uno d'acqua che cadono nella stessa stagione, ed esiste un segno che non è né d'aria né di terra né d'acqua.

Esercizio 9

Esiste un pianeta che orbita intorno ad una stella ed intorno al quale non orbita alcun satellite.

Esercizio 10

Esistono due studenti, x ed y, entrambi iscritti al CdL in Informatica, tali che ad x piace la Logica Matematica e, se y non superasse l'esame di Logica Matematica, allora x lo aiuterebbe.