Esercizi sul Calcolo Proposizionale

Per ciascuna delle formule elencate, si svolgano i seguenti quesiti:

(*i*) Scrivere la tavola di verità di φ, dire se è soddisfacibile e, in caso affermativo, specificare le valutazioni delle variabili che la soddisfano.

(*ii*) Tracciare l'albero di formazione (parsing tree) di φ.

(*iii*) Utilizzando la tavola di verità, scrivere una formula in CNF o in DNF equivalente a φ.

(*iv*) Trasformare φ in CNF o in DNF mediante equivalenze logiche.

Formule:

1) $\varphi \equiv x \vee \neg((y \to z) \vee (x \to y))$.

2) $\varphi \equiv (x \vee \neg(y \to z)) \wedge (x \to (y \vee z))$.

3) $\varphi \equiv (\neg x \to \neg(y \wedge \neg z)) \to (x \to \neg(y \wedge z))$.

4) $\varphi \equiv (\neg x \to (y \vee \neg z)) \wedge (\neg x \vee \neg(y \wedge \neg z))$.

5) $\varphi \equiv (x \to (y \vee \neg z)) \wedge (\neg(z \to \neg x) \vee \neg(y \wedge x))$.

6) $\varphi \equiv (x \wedge \neg(y \wedge z)) \to (x \vee (y \wedge z))$.

7) $\varphi \equiv (x \wedge (y \to z)) \vee (x \wedge \neg(y \wedge z))$.

8) $\varphi \equiv (x \wedge (y \to z)) \vee (x \wedge (y \vee z))$.

9) $\varphi \equiv (x \vee (y \to \neg z)) \wedge ((z \to \neg x) \vee \neg(y \wedge x))$.

10) $\varphi \equiv (\neg x \wedge (y \to \neg z)) \vee ((z \to \neg x) \wedge \neg(y \wedge x))$.

Soluzioni

Esercizio 1

$\varphi \equiv x \vee \neg((y \to z) \vee (x \to y))$

(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z):

$$(1,0,0) \quad (1,0,1) \quad (1,1,0) \quad (1,1,1).$$

(ii) Parsing tree di φ:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x & \vee & \neg((y & \to & z) & \vee & (x & \to & y)) \\
\downarrow & & & & & \downarrow & & & \\
x & & \neg((y & \to & z) & \vee & (x & \to & y)) \\
 & & & & & \downarrow & & & \\
 & & (y & \to & z) & \vee & (x & \to & y) \\
 & & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
 & & y & \to & z & & x & \to & y \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & y & & z & & x & & y
\end{array}
$$

(iii)

DNF: $(x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

CNF: $(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$

(iv)

$$
\begin{aligned}
& x \vee \neg((y \to z) \vee (x \to y)) \\
& \equiv x \vee \neg((\neg y \vee z) \vee (\neg x \vee y)) \\
& \equiv x \vee \neg(\neg y \vee z \vee \neg x \vee y) \\
& \equiv x \vee (y \wedge \neg z \wedge x \wedge \neg y) \\
& \equiv x
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

$\varphi \equiv (x \lor \neg(y \to z)) \land (x \to (y \lor z))$

(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z):

$$(0,1,0) \quad (1,0,1) \quad (1,1,0) \quad (1,1,1).$$

(ii) Parsing tree di φ:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(x & \lor & \neg(y & \to & z)) & \land & (x & \to & (y & \lor & z)) \\
 & \downarrow & & & & & & \downarrow & & & \\
x & \lor & \neg(y & \to & z) & & x & \to & (y & \lor & z) \\
\downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & \\
x & & \neg(y & \to & z) & & x & & y & \lor & z \\
 & & & \downarrow & & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & y & \to & z & & & & y & & z \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
 & & y & & z & & & & & &
\end{array}
$$

(iii)

DNF: $(\neg x \land y \land \neg z) \lor (x \land \neg y \land z) \lor (x \land y \land \neg z) \lor (x \land y \land z)$

CNF: $(x \lor y \lor z) \land (x \lor y \lor \neg z) \land (\neg x \lor y \lor z) \land (x \lor \neg y \lor \neg z)$

(iv)

$$
\begin{aligned}
&(x \lor \neg(y \to z)) \land (x \to (y \lor z)) \\
&\equiv (x \lor \neg(\neg y \lor z)) \land (\neg x \lor (y \lor z)) \\
&\equiv (x \lor (y \land \neg z)) \land (\neg x \lor y \lor z) \\
&\equiv ((x \lor y) \land (x \lor \neg z)) \land (\neg x \lor y \lor z) \\
&\equiv (x \lor y) \land (x \lor \neg z) \land (\neg x \lor y \lor z)
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

$\varphi \equiv (\neg x \to \neg(y \wedge \neg z)) \to (x \to \neg(y \wedge z))$

(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Pertanto φ è soddisfacibile per tutte le valutazioni della terna (x, y, z) eccetto $(1, 1, 1)$.

(ii) Parsing tree di φ:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(\neg x & \to & \neg(y & \wedge & \neg z)) & \to & (x & \to & \neg(y & \wedge & z)) \\
 & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \\
\neg x & \to & \neg(y & \wedge & \neg z) & & x & \to & \neg(y & \wedge & z) \\
\downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & \\
\neg x & & \neg(y & \wedge & \neg z) & & x & & \neg(y & \wedge & z) \\
\downarrow & & & \downarrow & & & & & & \downarrow & \\
x & & y & \wedge & \neg z & & & & y & \wedge & z \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & y & & \neg z & & & & y & & z \\
 & & & & \downarrow & & & & & & \\
 & & & & z & & & & & &
\end{array}
$$

(iii)

DNF: $(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee$
$(\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$

CNF: $(\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$

(iv)

$$
\begin{aligned}
&(\neg x \to \neg(y \wedge \neg z)) \to (x \to \neg(y \wedge z)) \\
&\equiv (x \vee (\neg y \vee z)) \to (\neg x \vee (\neg y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg(x \vee (\neg y \vee z)) \vee (\neg x \vee (\neg y \vee \neg z)) \\
&\equiv \neg(x \vee \neg y \vee z) \vee (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \\
&\equiv (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \\
&\equiv (\neg x \vee \neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (y \vee \neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg z \vee \neg x \vee \neg y \vee \neg z) \\
&* \text{ poiché } (y \vee \neg x \vee \neg y \vee \neg z) \text{ è una tautologia} \\
&\equiv (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \\
&\equiv \neg x \vee \neg y \vee \neg z
\end{aligned}
$$

Esercizio 4

$\varphi \equiv (\neg x \to (y \vee \neg z)) \wedge (\neg x \vee \neg(y \wedge \neg z))$

(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z):

$$(0,0,0) \quad (0,1,0) \quad (0,1,1) \quad (1,0,0) \quad (1,0,1) \quad (1,1,1).$$

(ii) Parsing tree di φ:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(\neg x & \to & (y & \vee & \neg z)) & \wedge & (\neg x & \vee & \neg(y & \wedge & \neg z)) \\
 & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \\
\neg x & \to & (y & \vee & \neg z) & & \neg x & \vee & \neg(y & \wedge & \neg z) \\
\downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & \\
\neg x & & y & \vee & \neg z & & \neg x & & \neg(y & \wedge & \neg z) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\
x & & y & & \neg z & & x & & y & \wedge & \neg z \\
 & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & z & & & & y & & \neg z \\
 & & & & & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & & & & & \neg z
\end{array}$$

(iii)

$$\text{DNF:} \quad \begin{aligned} &(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee \\ &(x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \end{aligned}$$

$$\text{CNF:} \quad (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$$

(iv)

$$\begin{aligned} &(\neg x \to (y \vee \neg z)) \wedge (\neg x \vee \neg(y \wedge \neg z)) \\ &\equiv (x \vee (y \vee \neg z)) \wedge (\neg x \vee (\neg y \vee z)) \\ &\equiv (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \end{aligned}$$

Esercizio 5

$\varphi \equiv (x \to (y \vee \neg z)) \wedge (\neg(z \to \neg x) \vee \neg(y \wedge x))$

(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z):

$$(0,0,0) \quad (0,0,1) \quad (0,1,0) \quad (0,1,1) \quad (1,0,0) \quad (1,1,1).$$

(ii) Parsing tree di φ:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(x & \to & (y & \vee & \neg z)) & \wedge & (\neg(z & \to & \neg x) & \vee & \neg(y & \wedge & z)) \\
 & & \downarrow & & & & & & & \downarrow & & & \\
x & \to & (y & \vee & \neg z) & & \neg(z & \to & \neg x) & \vee & \neg(y & \wedge & z) \\
\downarrow & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
x & & y & \vee & \neg z & & \neg(z & \to & \neg x) & & \neg(y & \wedge & z) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
 & & y & & \neg z & & z & \to & \neg x & & y & \wedge & z \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & z & & z & & \neg x & & y & & z \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & & & & & x & & & &
\end{array}$$

(iii)

$$\text{DNF:} \qquad (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee$$
$$\vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

$$\text{CNF:} \qquad (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$$

(iv)

$$\begin{aligned}
& (x \to (y \vee \neg z)) \wedge (\neg(z \to \neg x) \vee \neg(y \wedge x)) \\
& \equiv (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg(\neg z \vee \neg x) \vee (\neg y \vee \neg x)) \\
& \equiv (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge ((z \wedge x) \vee (\neg y \vee \neg x)) \\
& \equiv (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (z \vee \neg y \vee \neg x) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg x) \\
& \equiv (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (z \vee \neg y \vee \neg x)
\end{aligned}$$

Esercizio 6

$\varphi \equiv (x \wedge \neg(y \wedge z)) \rightarrow (x \vee (y \wedge z))$

(*i*) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Pertanto φ è una tautologia.

(*ii*) Parsing tree di φ:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(x & \wedge & \neg(y & \wedge & z)) & \rightarrow & (x & \vee & (y & \wedge & z)) \\
 & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \\
x & \wedge & \neg(y & \wedge & z) & & x & \vee & (y & \wedge & z) \\
\downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & \\
x & & \neg(y & \wedge & z) & & x & & y & \wedge & z \\
 & & & \downarrow & & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & y & \wedge & z & & & & y & & z \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
 & & y & & z & & & & & &
\end{array}
$$

(*iii*) Poiché φ è una tautologia, possiamo scrivere $\varphi \equiv x \vee \neg x$, e quest'ultima è sia una DNF che una CNF.

(*iv*)

$$
\begin{aligned}
&(x \wedge \neg(y \wedge z)) \rightarrow (x \vee (y \wedge z)) \\
&\equiv \neg(x \wedge (\neg y \vee \neg z)) \vee (x \vee (y \wedge z)) \\
&\equiv (\neg x \vee \neg(\neg y \vee \neg z)) \vee (x \vee (y \wedge z)) \\
&\equiv (\neg x \vee (y \wedge z)) \vee (x \vee (y \wedge z)) \\
&\equiv \neg x \vee (y \wedge z) \vee x \vee (y \wedge z) \\
&\equiv (\neg x \vee x) \vee (y \wedge z) \\
&\equiv \neg x \vee x
\end{aligned}
$$

Esercizio 7

$\varphi \equiv (x \wedge (y \to z)) \vee (x \wedge \neg(y \wedge z))$

(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z):

$$(1,0,0) \quad (1,0,1) \quad (1,1,0) \quad (1,1,1).$$

(ii) Parsing tree di φ:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(x & \wedge & (y & \to & z)) & \vee & (x & \wedge & \neg(y & \wedge & z)) \\
 & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \\
x & \wedge & (y & \to & z) & & x & \wedge & \neg(y & \wedge & z) \\
\downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & \\
x & & y & \to & z & & x & & \neg(y & \wedge & z) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & & \downarrow & \\
 & & y & & z & & & & y & \wedge & z \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & & & & & y & & z
\end{array}
$$

(iii)

DNF: $(x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

CNF: $(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$

(iv)

$$
\begin{aligned}
&(x \wedge (y \to z)) \vee (x \wedge \neg(y \wedge z)) \\
&\equiv (x \wedge (\neg y \vee z)) \vee (x \wedge (\neg y \vee \neg z)) \\
&\equiv ((x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z)) \vee ((x \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge \neg z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge (z \vee \neg z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \vee x \\
&\equiv x
\end{aligned}
$$

Esercizio 8

$\varphi \equiv (x \wedge (y \rightarrow z)) \vee (x \wedge (y \vee z))$

(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z):

$$(1,0,0) \quad (1,0,1) \quad (1,1,0) \quad (1,1,1).$$

(ii) Parsing tree di φ:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(x & \wedge & (y & \rightarrow & z)) & \vee & (x & \wedge & (y & \vee & z)) \\
 & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \\
x & \wedge & (y & \rightarrow & z) & & x & \wedge & (y & \vee & z) \\
\downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & \\
x & & y & \rightarrow & z & & x & & y & \vee & z \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & y & & z & & & & y & & z
\end{array}$$

(iii)

DNF: $(x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

CNF: $(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$

(iv)

$$\begin{aligned}
&(x \wedge (y \rightarrow z)) \vee (x \wedge (y \vee z)) \\
&\equiv (x \wedge (\neg y \vee z)) \vee (x \wedge (y \vee z)) \\
&\equiv ((x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z)) \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\
&\equiv (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y) \\
&\equiv (x \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee \neg y)) \\
&\equiv (x \wedge z) \vee x \\
&\equiv x
\end{aligned}$$

Esercizio 9

$\varphi \equiv (x \vee (y \to \neg z)) \wedge ((z \to \neg x) \vee \neg(y \wedge x))$

(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z):

$$(0,0,0) \quad (0,0,1) \quad (0,1,0) \quad (1,0,0) \quad (1,0,1) \quad (1,1,0).$$

(ii) Parsing tree di φ:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(x & \vee & (y & \to & \neg z)) & \wedge & ((z & \to & \neg x) & \vee & \neg(y & \wedge & x)) \\
 & & \big\downarrow & & & & & & & \big\downarrow & & & \\
x & \vee & (y & \to & \neg z) & & (z & \to & \neg x) & \vee & \neg(y & \wedge & x) \\
\big\downarrow & & & \big\downarrow & & & & \big\downarrow & & & & \big\downarrow & \\
x & & y & \to & \neg z & & z & \to & \neg x & & \neg(y & \wedge & x) \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & & \big\downarrow & \\
 & & y & & \neg z & & z & & \neg x & & y & \wedge & x \\
 & & & & \big\downarrow & & & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
 & & & & z & & & & x & & y & & x
\end{array}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\text{DNF:} \quad & (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee \\
& \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)
\end{aligned}$$

$$\text{CNF:} \quad (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$$

(iv)

$$\begin{aligned}
& (x \vee (y \to \neg z)) \wedge ((z \to \neg x) \vee \neg(y \wedge x)) \\
\equiv\ & (x \vee (\neg y \vee \neg z)) \wedge ((\neg z \vee \neg x) \vee (\neg y \vee \neg x)) \\
\equiv\ & (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg z \vee \neg x \vee \neg y \vee \neg x) \\
\equiv\ & (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z).
\end{aligned}$$

Esercizio 10

$\varphi \equiv (\neg x \wedge (y \to \neg z)) \vee ((z \to \neg x) \wedge \neg(y \wedge x))$

(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z):

$$(0,0,0) \quad (0,0,1) \quad (0,1,0) \quad (0,1,1) \quad (1,0,0).$$

(ii) Parsing tree di φ:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(\neg x & \wedge & (y & \to & \neg z)) & \vee & ((z & \to & \neg x) & \wedge & \neg(y & \wedge & x)) \\
 & & \downarrow & & & & & & & \downarrow & & & \\
\neg x & \wedge & (y & \to & \neg z) & & (z & \to & \neg x) & \wedge & \neg(y & \wedge & x) \\
\downarrow & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
\neg x & & y & \to & \neg z & & z & \to & \neg x & & \neg(y & \wedge & x) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\
x & & y & & \neg z & & z & & \neg x & & y & \wedge & x \\
 & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & z & & & & x & & y & & x
\end{array}$$

(iii)

DNF: $(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee$
$\vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z)$

CNF: $(\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$

(iv)

$$\begin{aligned}
&(\neg x \wedge (y \to \neg z)) \vee ((z \to \neg x) \wedge \neg(y \wedge x)) \\
&\equiv (\neg x \wedge (\neg y \vee \neg z)) \vee ((\neg z \vee \neg x) \wedge (\neg y \vee \neg x)) \\
&\equiv ((\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z)) \vee ((\neg z \wedge (\neg y \vee \neg x)) \vee (\neg x \wedge (\neg y \vee \neg x))) \\
&\equiv (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z) \vee ((\neg z \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg z \wedge \neg x) \vee (\neg x \vee \neg x)) \\
&\equiv (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z) \vee (\neg z \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg z \wedge \neg x) \vee \neg x \\
&\equiv (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z) \vee (\neg z \wedge \neg y) \vee \neg x.
\end{aligned}$$