

Esercizi sul Calcolo Proporzionale

Per ciascuna delle formule elencate, si svolgano i seguenti quesiti:

- (i) Scrivere la tavola di verità di φ , dire se è soddisfacibile e, in caso affermativo, specificare le valutazioni delle variabili che la soddisfano.
- (ii) Tracciare l'albero di formazione (parsing tree) di φ .
- (iii) Utilizzando la tavola di verità, scrivere una formula in CNF o in DNF equivalente a φ .
- (iv) Trasformare φ in CNF o in DNF mediante equivalenze logiche.

Formule:

- 1)** $\varphi \equiv x \vee \neg((y \rightarrow z) \vee (x \rightarrow y))$.
- 2)** $\varphi \equiv (x \vee \neg(y \rightarrow z)) \wedge (x \rightarrow (y \vee z))$.
- 3)** $\varphi \equiv (\neg x \rightarrow \neg(y \wedge \neg z)) \rightarrow (x \rightarrow \neg(y \wedge z))$.
- 4)** $\varphi \equiv (\neg x \rightarrow (y \vee \neg z)) \wedge (\neg x \vee \neg(y \wedge \neg z))$.
- 5)** $\varphi \equiv (x \rightarrow (y \vee \neg z)) \wedge (\neg(z \rightarrow \neg x) \vee \neg(y \wedge x))$.
- 6)** $\varphi \equiv (x \wedge \neg(y \wedge z)) \rightarrow (x \vee (y \wedge z))$.
- 7)** $\varphi \equiv (x \wedge (y \rightarrow z)) \vee (x \wedge \neg(y \wedge z))$.
- 8)** $\varphi \equiv (x \wedge (y \rightarrow z)) \vee (x \wedge (y \vee z))$.
- 9)** $\varphi \equiv (x \vee (y \rightarrow \neg z)) \wedge ((z \rightarrow \neg x) \vee \neg(y \wedge x))$.
- 10)** $\varphi \equiv (\neg x \wedge (y \rightarrow \neg z)) \vee ((z \rightarrow \neg x) \wedge \neg(y \wedge x))$.

Soluzioni

Esercizio 1

$$\varphi \equiv x \vee \neg((y \rightarrow z) \vee (x \rightarrow y))$$

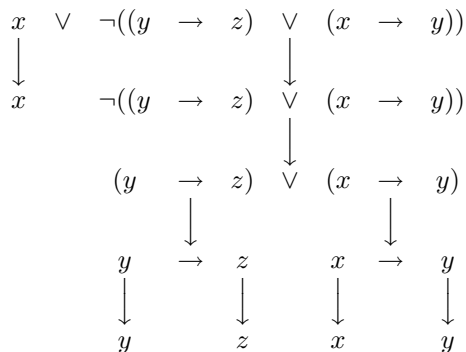
(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z) :

$$(1, 0, 0) \quad (1, 0, 1) \quad (1, 1, 0) \quad (1, 1, 1).$$

(ii) Parsing tree di φ :



(iii)

$$\text{DNF: } (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

$$\text{CNF: } (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 & x \vee \neg((y \rightarrow z) \vee (x \rightarrow y)) \\
 & \equiv x \vee \neg((\neg y \vee z) \vee (\neg x \vee y)) \\
 & \equiv x \vee \neg(\neg y \vee z \vee \neg x \vee y) \\
 & \equiv x \vee (y \wedge \neg z \wedge x \wedge \neg y) \\
 & \equiv x
 \end{aligned}$$

Esercizio 2

$$\varphi \equiv (x \vee \neg(y \rightarrow z)) \wedge (x \rightarrow (y \vee z))$$

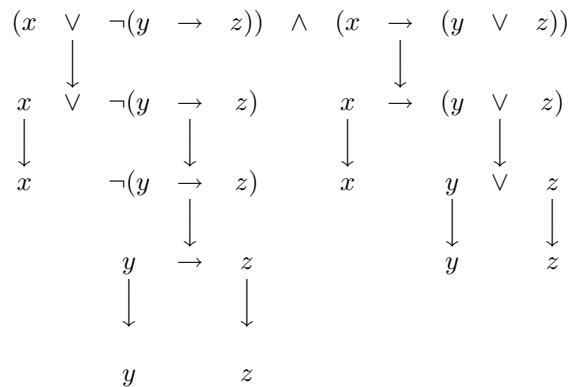
(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z) :

$$(0, 1, 0) \quad (1, 0, 1) \quad (1, 1, 0) \quad (1, 1, 1).$$

(ii) Parsing tree di φ :



(iii)

$$\text{DNF:} \quad (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

$$\text{CNF:} \quad (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 & (x \vee \neg(y \rightarrow z)) \wedge (x \rightarrow (y \vee z)) \\
 & \equiv (x \vee \neg(\neg y \vee z)) \wedge (\neg x \vee (y \vee z)) \\
 & \equiv (x \vee (y \wedge \neg z)) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \\
 & \equiv ((x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \\
 & \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)
 \end{aligned}$$

Esercizio 3

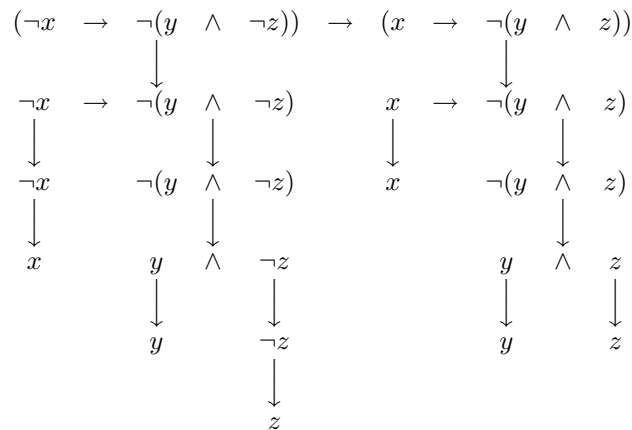
$$\varphi \equiv (\neg x \rightarrow \neg(y \wedge \neg z)) \rightarrow (x \rightarrow \neg(y \wedge z))$$

(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Pertanto φ è soddisfacibile per tutte le valutazioni della terna (x, y, z) eccetto $(1, 1, 1)$.

(ii) Parsing tree di φ :



(iii)

$$\begin{aligned}
 \text{DNF:} \quad & (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee \\
 & (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)
 \end{aligned}$$

$$\text{CNF:} \quad (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 & (\neg x \rightarrow \neg(y \wedge \neg z)) \rightarrow (x \rightarrow \neg(y \wedge z)) \\
 \equiv & (x \vee (\neg y \vee z)) \rightarrow (\neg x \vee (\neg y \vee \neg z)) \\
 \equiv & \neg(x \vee (\neg y \vee z)) \vee (\neg x \vee (\neg y \vee \neg z)) \\
 \equiv & \neg(x \vee \neg y \vee z) \vee (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \\
 \equiv & (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \\
 \equiv & (\neg x \vee \neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (y \vee \neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg z \vee \neg x \vee \neg y \vee \neg z) \\
 & * \text{ poiché } (y \vee \neg x \vee \neg y \vee \neg z) \text{ è una tautologia} \\
 \equiv & (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \\
 \equiv & \neg x \vee \neg y \vee \neg z
 \end{aligned}$$

Esercizio 4

$$\varphi \equiv (\neg x \rightarrow (y \vee \neg z)) \wedge (\neg x \vee \neg(y \wedge \neg z))$$

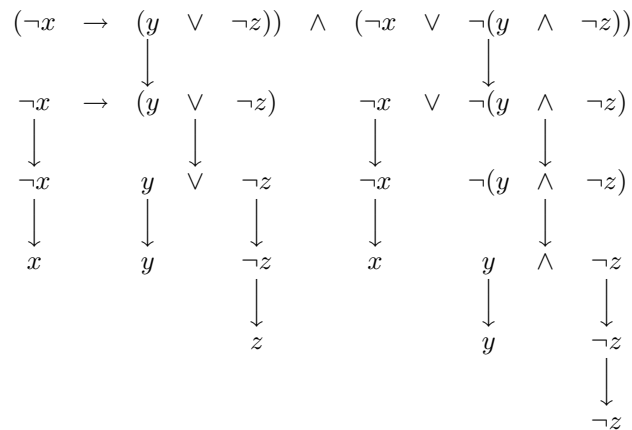
(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z) :

$$(0, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 1, 1) \quad (1, 0, 0) \quad (1, 0, 1) \quad (1, 1, 1).$$

(ii) Parsing tree di φ :



(iii)

$$\begin{aligned}
 \text{DNF:} \quad & (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee \\
 & (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)
 \end{aligned}$$

$$\text{CNF:} \quad (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 & (\neg x \rightarrow (y \vee \neg z)) \wedge (\neg x \vee \neg(y \wedge \neg z)) \\
 \equiv & (x \vee (y \vee \neg z)) \wedge (\neg x \vee \neg(y \wedge \neg z)) \\
 \equiv & (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)
 \end{aligned}$$

Esercizio 5

$$\varphi \equiv (x \rightarrow (y \vee \neg z)) \wedge (\neg(z \rightarrow \neg x) \vee \neg(y \wedge x))$$

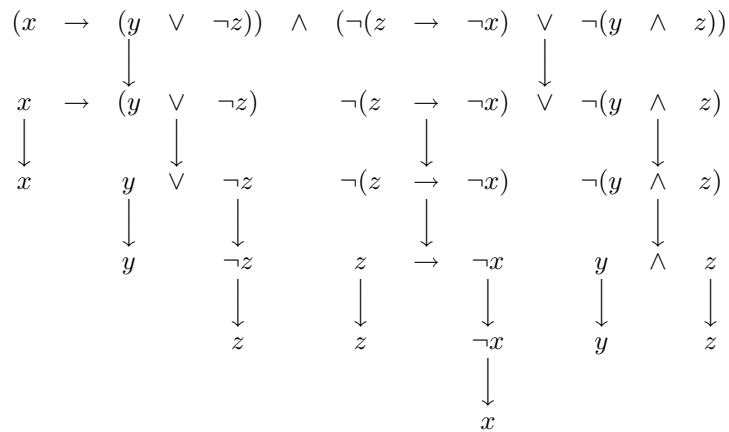
(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z) :

$$(0, 0, 0) \quad (0, 0, 1) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 1, 1) \quad (1, 0, 0) \quad (1, 1, 1).$$

(ii) Parsing tree di φ :



(iii)

$$\begin{aligned}
 \text{DNF:} \quad & (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee \\
 & \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)
 \end{aligned}$$

$$\text{CNF:} \quad (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 & (x \rightarrow (y \vee \neg z)) \wedge (\neg(z \rightarrow \neg x) \vee \neg(y \wedge x)) \\
 \equiv & (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg(\neg z \vee \neg x) \vee (\neg y \vee \neg x)) \\
 \equiv & (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge ((z \wedge x) \vee (\neg y \vee \neg x)) \\
 \equiv & (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (z \vee \neg y \vee \neg x) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg x) \\
 \equiv & (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (z \vee \neg y \vee \neg x)
 \end{aligned}$$

Esercizio 6

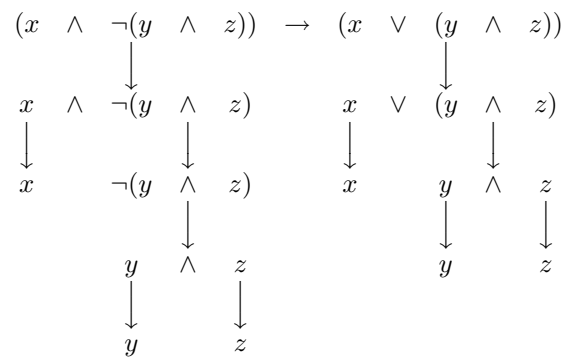
$$\varphi \equiv (x \wedge \neg(y \wedge z)) \rightarrow (x \vee (y \wedge z))$$

(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Pertanto φ è una tautologia.

(ii) Parsing tree di φ :



(iii) Poiché φ è una tautologia, possiamo scrivere $\varphi \equiv x \vee \neg x$, e quest'ultima è sia una DNF che una CNF.

(iv)

$$\begin{aligned}
 &(x \wedge \neg(y \wedge z)) \rightarrow (x \vee (y \wedge z)) \\
 &\equiv \neg(x \wedge (\neg y \vee \neg z)) \vee (x \vee (y \wedge z)) \\
 &\equiv (\neg x \vee \neg(\neg y \vee \neg z)) \vee (x \vee (y \wedge z)) \\
 &\equiv (\neg x \vee (y \wedge z)) \vee (x \vee (y \wedge z)) \\
 &\equiv \neg x \vee (y \wedge z) \vee x \vee (y \wedge z) \\
 &\equiv (\neg x \vee x) \vee (y \wedge z) \\
 &\equiv \neg x \vee x
 \end{aligned}$$

Esercizio 7

$$\varphi \equiv (x \wedge (y \rightarrow z)) \vee (x \wedge \neg(y \wedge z))$$

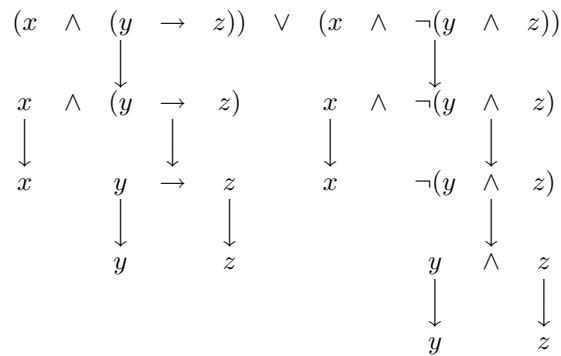
(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z) :

$$(1, 0, 0) \quad (1, 0, 1) \quad (1, 1, 0) \quad (1, 1, 1).$$

(ii) Parsing tree di φ :



(iii)

$$\text{DNF: } (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

$$\text{CNF: } (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 & (x \wedge (y \rightarrow z)) \vee (x \wedge \neg(y \wedge z)) \\
 & \equiv (x \wedge (\neg y \vee z)) \vee (x \wedge (\neg y \vee \neg z)) \\
 & \equiv ((x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z)) \vee ((x \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg z)) \\
 & \equiv (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge \neg z) \\
 & \equiv (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge (z \vee \neg z)) \\
 & \equiv (x \wedge \neg y) \vee x \\
 & \equiv x
 \end{aligned}$$

Esercizio 8

$$\varphi \equiv (x \wedge (y \rightarrow z)) \vee (x \wedge (y \vee z))$$

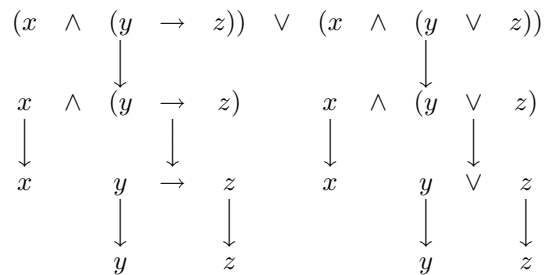
(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z) :

$$(1, 0, 0) \quad (1, 0, 1) \quad (1, 1, 0) \quad (1, 1, 1).$$

(ii) Parsing tree di φ :



(iii)

$$\text{DNF:} \quad (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

$$\text{CNF:} \quad (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 & (x \wedge (y \rightarrow z)) \vee (x \wedge (y \vee z)) \\
 & \equiv (x \wedge (\neg y \vee z)) \vee (x \wedge (y \vee z)) \\
 & \equiv ((x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z)) \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \\
 & \equiv (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\
 & \equiv (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y) \\
 & \equiv (x \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee \neg y)) \\
 & \equiv (x \wedge z) \vee x \\
 & \equiv x
 \end{aligned}$$

Esercizio 9

$$\varphi \equiv (x \vee (y \rightarrow \neg z)) \wedge ((z \rightarrow \neg x) \vee \neg(y \wedge x))$$

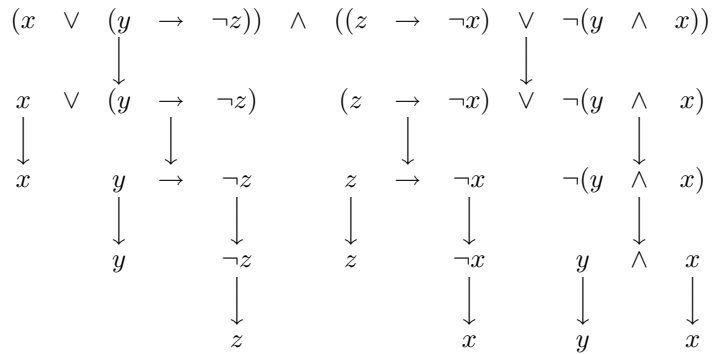
(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z) :

$$(0, 0, 0) \quad (0, 0, 1) \quad (0, 1, 0) \quad (1, 0, 0) \quad (1, 0, 1) \quad (1, 1, 0).$$

(ii) Parsing tree di φ :



(iii)

$$\begin{aligned}
 \text{DNF:} \quad & (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee \\
 & \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)
 \end{aligned}$$

$$\text{CNF:} \quad (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 & (x \vee (y \rightarrow \neg z)) \wedge ((z \rightarrow \neg x) \vee \neg(y \wedge x)) \\
 \equiv & (x \vee (\neg y \vee \neg z)) \wedge ((\neg z \vee \neg x) \vee (\neg y \vee \neg x)) \\
 \equiv & (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg z \vee \neg x \vee \neg y \vee \neg x) \\
 \equiv & (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z).
 \end{aligned}$$

Esercizio 10

$$\varphi \equiv (\neg x \wedge (y \rightarrow \neg z)) \vee ((z \rightarrow \neg x) \wedge \neg(y \wedge x))$$

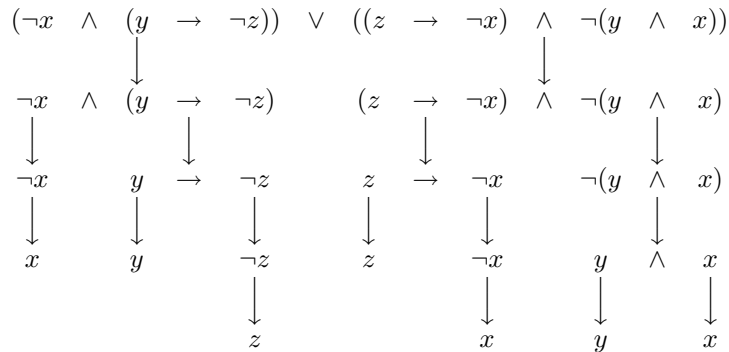
(i) La tavola di verità di φ è la seguente:

x	y	z	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Pertanto φ è soddisfacibile per le seguenti valutazioni della terna (x, y, z) :

$$(0, 0, 0) \quad (0, 0, 1) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 1, 1) \quad (1, 0, 0).$$

(ii) Parsing tree di φ :



(iii)

$$\begin{aligned}
 \text{DNF:} \quad & (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee \\
 & \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z)
 \end{aligned}$$

$$\text{CNF:} \quad (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 & (\neg x \wedge (y \rightarrow \neg z)) \vee ((z \rightarrow \neg x) \wedge \neg(y \wedge x)) \\
 \equiv & (\neg x \wedge (\neg y \vee \neg z)) \vee ((\neg z \vee \neg x) \wedge (\neg y \vee \neg x)) \\
 \equiv & ((\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z)) \vee ((\neg z \wedge (\neg y \vee \neg x)) \vee (\neg x \wedge (\neg y \vee \neg x))) \\
 \equiv & (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z) \vee ((\neg z \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg z \wedge \neg x) \vee (\neg x \vee \neg x)) \\
 \equiv & (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z) \vee (\neg z \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg z \wedge \neg x) \vee \neg x \\
 \equiv & (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg z) \vee (\neg z \wedge \neg y) \vee \neg x.
 \end{aligned}$$