- LEZIONE 5 DEL CORSO DI FISICA PER INFORMATICA - A.A. 2006/2007

Silvio De Siena

1 Dinamica del punto materiale (Seconda Parte)

Applicazione della legge di Newton nel caso della forza di richiamo elastica.

Passiamo ora ad introdurre un altro caso semplice ed esattamente risolubile di applicazione della legge di Newton: studiamo infatti il moto generato da una forza di richiamo elastica. Questa forza è quella che viene esercitata, su un corpo avente una certa massa, da una molla compressa o allungata. Per scrivere la legge della forza, scegliamo per comodità come origine del sistema di riferimento la posizione del corpo attaccato alla molla quando la molla si trova in equilibrio (cioè, non è né compressa n'e allungata), ed indichiamo con $\vec{s}$ *lo spostamento da questa posizione di equilibrio*; allora, la legge di questa forza (da inserire al primo membro della legge di Newton) si scrive:

$$\vec{F} = -\, k\, \vec{s}, \tag{1}$$

dove con k abbiamo indicato una costante (*costante elastica della molla*), che dipende solo dalle caratteristiche della molla e che, come si vede dalla relazione, ha dimensioni

$$[k] = [F\ l^{-1}] \equiv [m\ l\ t^{-2}\ l^{-1}] = [m\ t^{-2}]\ , \tag{2}$$

cioè di una massa diviso il quadrato di un tempo. Si noti che, se non avessimo scelto l'origine nel punto di equilibrio della molla, quest'ultimo non avrebbe avuto coordinate nulle, e sarebbe stato individuato da un vettore (costante) $\vec{s}_0$; quindi, avremmo dovuto scrivere lo spostamento dalla posizione di equilibrio della molla come $(\vec{s} - \vec{s}_0)$, e la legge (1) avrebbe assunto la forma

$$\vec{F} = -\, k\, (\vec{s} - \vec{s}_0).$$

Adesso, osserviamo che la forza che la molla esercita sul corpo ha verso opposto ed aumenta col modulo dello spostamento dall'equilibrio; abbiamo quindi una forza che si oppone all'allontanamento dall'equilibrio, e cerca di "richiamare" il corpo verso quel punto (e, se la molla viene compressa, tende a farla allungare, mentre se la molla viene allungata, tende a farla comprimere. Questo giustifica il nome di *forza di richiamo*. Inoltre, vediamo che la forza è proporzionale allo spostamento, e stiamo in quello che viene chiamato "regime elastico"; questo giustifica l'appellativo di *forza elastica*.

Adesso, osserviamo che, poichè la forza e lo spostamento hanno la stessa direzione, il moto non potrà che essere *unidimensionale*; quindi, conviene scegliere un sistema di riferimento che, oltre ad avere l'origine nel punto di equilibrio della molla, abbia uno degli assi, per esempio l'asse X, parallelo ai vettori forza e spostamento. In questo modo le componenti Y e Z dei due vettori saranno nulle, e quindi irrilevanti, e la legge (1) si riscrive semplicemente

$$F_x \equiv F = -\,k\,x, \tag{3}$$

dove, per semplicità, abbiamo indicato con F la componente lungo X della forza, e con x (al solito) la componente lungo X dello spostamento. Se scegliamo, ora, il verso dell'asse X diretto nel verso degli allungamenti, allora x sarà positivo e F sarà negativa se la molla si sta allungando, mentre x sarà negativo e F sarà positiva se la molla si sta comprimendo in modo che la forza punti sempre verso il punto di equilibrio della molla (vedi Figura).

A questo punto, possiamo scrivere la legge di Newton ($\vec{F} = m\,\vec{a}$) che, se indichiamo con m la massa del corpo attacatto alla molla, e sul quale quindi si esercita la forza, si scriverà in questo caso solo per l'unica componente lungo X, e sarà (usando la (3)):

$$-\,k\,x = m\,a_x\;,. \tag{4}$$

e, se ricordiamo che la componente X dell'accelerazione si scrive $a_x = d^2x(t)/dt^2$, e dividiamo tutto per la massa m, abbiamo

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\,\frac{k}{m}\,x(t)\;. \tag{5}$$

Ora, le dimensioni di k calcolate nella (2) ci dicono che quelle di $\sqrt{k/m}$ sono t^{-1}, così come risulta anche dall'analisi dimensionale dell'equazione (5).

Definisco allora

$$\omega \doteq \sqrt{k/m}, \tag{6}$$

e riscrivo l'equazione (5) come

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\,\omega^2\;x(t)\;. \tag{7}$$

Questa equazione ci dice che la funzione $x(t)$ che fornisce la legge del moto deve soddisfare la condizione che la sua derivata seconda deve ridare la funzione stessa cambiata di segno e moltiplicata per una costante positiva ω^2. Questa equazione è nota come *equazione del moto armonico* o anche come *equazione dell'oscillatore armonico* Per poterla risolvere, abbiamo bisogno di fare una digressione di tipo matematico.

- Le derivate di seno e coseno -

Prendiamo in considerazioni le funzioni trigonometriche seno e coseno già introdotte in precedenza; esse, come l'esponenziale, devono avere argomento adimensionale, e sono esse stesse adimensionali. Il loro argomento è anche interpretabile come un angolo, come abbiamo già visto. Se, quindi, dobbiamo considerare seno e coseno come funzioni del tempo, dobbiamo scrivere

$$\sin\,(\omega\;t) \qquad ; \qquad \cos\,(\omega\;t),$$

dove ω è una costante le cui dimensioni $[\omega] = [t^{-1}]$, in modo che il prodotto $\omega\;t$, cioè l'argomento del seno o del coseno, sia adimensionale. Si noti che, se definiamo il tempo T attraverso la relazione $\omega = 2\;\pi/T$, abbiamo

$$\omega\;(t+T) \equiv \frac{2\;\pi}{T}\;(t+T) = \frac{2\;\pi}{T}\;t + 2\;\pi \equiv \omega\;t + 2\;\pi,$$

e quindi

$$\sin(\omega\;(t+T)) = \sin(\omega\;t),$$

$$\cos(\omega\;(t+T)) = \cos(\omega\;t).$$

Le due funzioni riprendono quindi lo stesso valore dopo un tempo T (o, ovviamente, un suo multiplo intero), e sono quindi periodiche di periodo T.

Inoltre abbiamo, dalla definizione di frequenza $\nu = 1/T$ che, come sempre, $\omega = 2\,\pi\,\nu$

Adesso, consideriamo prima le funzioni $C\ \cos\ \theta$ e $C'\ \sin\ \theta$ di un angolo θ (dove C, C' sono due costanti), ed eseguiamo le loro derivate prime e seconde rispetto all'argomento θ:

$$\frac{d(C\ \cos\ \theta)}{d\theta} = C\frac{d(\cos\ \theta)}{d\theta} = -\ C\ \sin\ \theta\ ,$$

$$\frac{d(C'\sin\ \theta)}{d\theta} = C'\frac{d(\sin\ \theta)}{d\theta} = \ C'\cos\ \theta\ , \tag{8}$$

e derivando ancora

$$\frac{d^2(C\cos\ \theta)}{d\theta^2} = -\ \frac{d(C\ \sin\ \theta)}{d\theta} = -\ C\ \cos\ \theta\ ,$$

$$\frac{d^2(C'\sin\ \theta)}{d\theta^2} = \ \frac{d(C'\ \cos\ \theta)}{d\theta} = -\ C'\sin\ \theta\ . \tag{9}$$

Scopriamo, quindi, che le derivate seconde di queste funzioni danno ancora le stesse funzioni cambiate di segno.

Introduciamo allora, come secondo passo, le funzioni del tempo

$$f(t) \doteq C\cos\,(\omega\ t)\ ,$$

$$g(t) \doteq C'\sin\,(\omega\ t)\ , \tag{10}$$

e andiamo ad eseguire le loro derivate prime e seconde rispetto al tempo. Se definisco l'angolo $\theta(t) \doteq \omega\ t$ (che ovviamente è funzione del tempo), ho, secondo le regole delle funzioni composte, e considerando che $d\theta(t)/dt \equiv d(\omega\ t)/dt = \omega$, che le derivate prime di f e g sono

$$\frac{df(t)}{d\,t} = C\ \frac{d(\cos\ \theta(t))}{dt} = C\ \frac{d(\cos\ \theta(t))}{d\theta(t)} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$= -\ C\ \sin\ \theta(t)\cdot\omega = -\ C\ \omega\ \sin\,(\omega\ t),$$

$$\frac{dg(t)}{d\,t} = \frac{d(C^{'} \sin\ \theta)}{d\theta} = C^{'} \frac{d(\sin\ \theta)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$= C^{'}\ \cos\ \theta(t) \cdot \omega = C^{'}\ \omega\ \cos\,(\omega\ t)\ . \tag{11}$$

Derivando ulteriormente, otteniamo le derivate seconde

$$\frac{d^2 f(t)}{d\,t^2} = C\ \frac{d^2(\cos\ \theta(t))}{dt^2} = -\ C\ \omega\ \frac{d(\sin\ \theta(t))}{dt}$$

$$= -\ C\ \omega\ \frac{d(\sin\ \theta(t))}{d\theta(t)} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = -\ C\ \omega\ \cos\ \theta(t) \cdot \omega$$

$$= -\ \omega^2 \cdot [C\ \ \cos\,(\omega\ t)] \equiv -\ \omega^2\ f(t),$$

$$\frac{d^2 g(t)}{d\,t^2} = C\ \frac{d^2(\sin\ \theta(t))}{dt^2} = C^{'}\ \omega\ \frac{d(\cos\ \theta(t))}{dt}$$

$$= C^{'}\ \omega\ \frac{d(\cos\ \theta(t))}{d\theta(t)} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = -\ C^{'}\ \omega\ \sin\ \theta(t) \cdot \omega$$

$$= -\ \omega^2 \cdot [C^{'}\ \ \sin\,(\omega\ t)] \equiv -\ \omega^2\ g(t)\ , \tag{12}$$

dove abbiamo usato le espressioni (11) delle derivate prime e le definizioni (10) delle funzioni f e g.

Abbiamo quindi scoperto che ambedue le funzioni f e g soddisfano la proprietà che la loro derivata seconda rispetto al tempo è uguale a $-\ \omega^2$ moltiplicato per la funzione stessa:

$$\frac{d^2 f(t)}{d\,t^2} = -\ \omega^2\ f(t),$$

$$\frac{d^2 g(t)}{d\,t^2} = -\ \omega^2\ g(t)\ . \tag{13}$$

Ma sono queste le uniche funzioni che soddisfano questa proprietà? Per rispondere a questa domanda, consideriamo la funzione

$$h(t) = f(t) + g(t) \equiv C\ \cos\,(\omega\ t) + C^{'}\ \sin\,(\omega\ t)\ ; \tag{14}$$

$h(t)$ è quindi la somma delle due funzioni. Eseguiamo adesso la derivata seconda di $h(t)$, tenendo presente che le derivate di una somma di funzioni sono uguali alla somma delle derivate delle funzioni:

$$\frac{d^2 h(t)}{d\,t^2} = \frac{d^2[f(t)+g(t)]}{d\,t^2} = \frac{d^2 f(t)}{d\,t^2} + \frac{d^2 g(t)}{d\,t^2}$$

$$= -\,\omega^2\ f(t) -\ \omega^2\ g(t) \equiv -\,\omega^2\ (f(t)+g(t))$$

$$\equiv -\,\omega^2\ h(t)\ , \tag{15}$$

dove abbiamo usato le relazioni (13). Scopriamo, quindi, che non solo f e g, ma anche a loro funzione somma soddisfa la proprietà che la sua derivata seconda rispetto al tempo è uguale a $-\ \omega^2$ moltiplicato per la funzione stessa. Ora, bisogna tener presente che le costanti C e $C^{'}$ che compaiono nelle definizioni di f e g sono *arbitrarie*; infatti, qualsiasi sia il loro valore numerico, le funzioni f, g (e h) soddisfano la proprietà prima esposta sulla derivata seconda. Inoltre, se scegliamo $C^{'} = 0$, h diventa uguale a f, mentre, se scegliamo $C = 0$, h diventa uguale a g; quindi, f e g sono due *casi particolari di h*. Ne possiamo concludere che la funzione (17) *è la forma più generale di funzione che soddisfa alla proprietà che la sua derivata seconda rispetto al tempo è uguale a* $-\,\omega^2$ *moltiplicato per la funzione stessa.* Quindi $h(t)$ data da

$$h(t) = C\ \cos\,(\omega\ t) + C^{'}\ \sin\,(\omega\ t)\ , \tag{16}$$

con C e $C^{'}$ costanti arbitrarie *è la forma più generale di funzione che soddisfa alla proprietà che la sua derivata seconda rispetto al tempo è uguale a* $-\,\omega^2$ *moltiplicato per la funzione stessa.* Ci rendiamo anche conto che, poichè possiamo soddisfare questa proprietà cambiando a piacere i valori di C e $C^{'}$, e questo lo possiamo fare in *infiniti modi*, la forma (17) rappresenta *tutte le possibili infinite funzioni che soddisfano alla proprietà che la loro derivata seconda rispetto al tempo sia uguale a* $-\ \omega^2$ *moltiplicato per la funzione stessa.* Vediamo dalla relazione (17) che la funzione $h(t)$ è una *combinazione lineare con coefficienti costatnti* C *e* $C^{'}$ *delle funzioni* $\cos\,(\omega\ t)$ *e* $\sin\,(\omega\ t)$.

- Soluzione dell'equazione del moto armonico -

Siamo ora in grado di fornire la soluzione dell'equazione (7) del moto armonico generato dalla forza di richiamo elastica (3). Infatti, vediamo che la funzione incognita del tempo $x(t)$ che dà la legge oraria deve soddisfare la consizione che la sua derivata seconda rispetto al tempo è uguale a $-\ \omega^2$ moltiplicato per la funzione stessa. Ma abbiamo appena visto che la forma (17) rappresenta tutte le possibili infinite funzioni che soddisfano a questa proprietà; quindi, ne possiamo concludere che *la soluzione più generale dell'equazione (7) del moto armonico generato dalla forza di richiamo elastica ha la forma (17), cioè è una combinazione lineare delle funzioni* $\cos\,(\omega\ t)$ *e* $\sin\,(\omega\ t)$. Quindi

$$x(t) = C \cos\,(\omega\ t) + C^{'} \sin\,(\omega\ t)\ , \tag{17}$$

Abbiamo quindi la forma generale del nostro problema dinamico. Innanzitutto, però, cominciamo con il ricordare che, nel nostro caso, $\omega = \sqrt{k/m}$; quindi, dalla relazione che lega ω al periodo ed alla frequenza ($T = 2\ \pi/\omega\ ;\ \nu = \omega/2\ \pi$), abbiamo

$$T = 2\ \pi\ \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad ; \qquad \nu = \frac{1}{2\ \pi}\ \sqrt{\frac{k}{m}}\ . \tag{18}$$

Quindi: *il moto armonico generato da una molla su un corpo è un moto periodico con periodo e frequenza dipendenti dalla massa del corpo e dalla costante elastica della molla.* Il periodo rappresenta il tempo necessario alla molla per fare un'oscillazione completa (cioè, una volta che il corpo soggetto alla molla è partito da un certo punto, il tempo minimo necessario al corpo per tornare in quel punto a causa dell'oscillazione). Vediamo che, come risulta intuitivo, il periodo aumenta all'aumentare della massa del corpo e diminuisce all'aumentare della costante elastica della molla. La frequenza, che rappresenta il numero di oscillazioni per unità di tempo, ovviamente dipende in modo inverso da queste quantità.

Ora, però, rimane aperta una questione: cos'è che determina i particolari valori delle costanti arbitrarie C e $C^{'}$ quando siamo in presenza di uno specifico moto armonico ? La risposta deriva in modo naturale dall'osservazione che abbiamo fatto durante la discussione generale della legge di Newton, e cioè che, risultando che per risolvere un problema dinamico con la legge di Newton è necessario fornire lo stato iniziale del sistema, cioè, secondo la nostra definizione, la coppia di valori $x(0)$ e $v(0)$ della posizione e della velocità al tempo iniziale $t = 0$ del sistema. Abbiamo quindi a disposizione due valori numerici che, come ora vedremo, ci permetteranno di calcolare le costanti C e $C^{'}$.

Infatti, andiamo ad inserire nella soluzione generale (17) il tempo $t = 0$, e otteniamo (poichè $\cos(0) = 1$ e $\sin(0) = 0$)

$$x(0) = C \ , \tag{19}$$

cioè *la costante C rappresenta la posizione all'istante iniziale del corpo attaccato alla molla.* Vediamo anche dalla Eq. (17) che le dimensioni di C devono essere effettivamente quelle di una lunghezza perchè devono essere quelle di $x(t)$ divise per la quantità *adimensionale* $\cos(\omega\ t)$.

Per determinare $C^{'}$ cominciamo a calcolare la velocità $v(t) = dx(t)/dt$ al generico istante t del corpo attaccato alla molla; eseguendo la derivata prima dei due membri della (17) abbiamo:

$$\begin{aligned} v(t) \left(\equiv \frac{dx(t)}{dt} \right) &= \frac{d[C \cos(\omega\ t) + C^{'} \sin(\omega\ t)]}{dt} \\ &= -\ C\, \omega \sin(\omega\ t) + C^{'}\ \omega \cos(\omega\ t)\ . \end{aligned} \tag{20}$$

Inserendo ora nella (20) il tempo $t = 0$ otteniamo

$$v(0) = C^{'} \cdot \omega \ . \tag{21}$$

Da questa relazione possiamo ricavare la seconda costante $C^{'}$; vediamo quindi che *la costante $C^{'}$ è data dalla velocità iniziale divisa per ω.* Per quanto riguarda le dimensioni, la costante $C^{'}$ ha, come C, le dimensioni di una lunghezza, e il rapporto $v(0)/\omega$ ha le dimensioni $[l \cdot t^{-1} \cdot (t^{-1})^{-1}] = [l \cdot t^{-1} \cdot t] = [l]$; quindi, le dimensioni di $C^{'}$ e di $v(0)/\omega$ coincidono.

Ricapitolando:

$$C = x(0) \qquad ; \qquad C^{'} = \frac{v(0)}{\omega} \ . \tag{22}$$

Allora, inserendo questi dati nell'Eq. (17) abbiamo la soluzione dell'equazione del moto armonico con posizione iniziale $x(0)$ e velocità iniziale $V(0)$:

$$x(t) = x(0)\ \cos(\omega\ t) + \frac{v(0)}{\omega}\ \sin(\omega\ t)\ . \tag{23}$$

Ricordiamo infine che il moto armonico (7) generato dalla forza di richiamo elastica $F = -\ k\ x$ su una massa m ha frequenza ω data dalla relazione (6). Ricordiamo anche che la (23) ha questa forma perchè abbiamo scelto l'origine dell'asse X coincidente con il punto di equilibrio della molla (se no, dobbiamo sostituire il primo membro con $x(t) - x_e q$, dove $x_e q$ è la coordinata lungo X del punto di equilibrio).

A questo punto abbiamo risolto completamente la dinamica generata da una forza di richiamo elastica.

Esercizio 1): Si consideri un punto materiale di massa $m = 300\ g$ attaccato ad una molla di costante elastica $k = 2.7\ N/m$. Se all'istante iniziale il punto materiale si trova nel punto di equilibrio della molla, ed ha una velocità di $10\ m/s$, trovare la legge oraria $x(t)$.
Soluzione: Secondo dati del problema, a $t = 0$ il corpo si trova nel punto di equilibrio; quindi, con la nostra scelta dell'origine degli assi,

$$x(0) = 0.$$

Inoltre, ci viene anche data la velocità all'istante iniziale

$$v(0) = 10\ m/s.$$

Infine, la relazione (6) ci fornisce anche la frequenza; però, prima di applicare questa relazione, dobbiamo trasformare la massa da grammi a chilogrammi ($1\ g = 10^{-3}\ Kg$) perchè stiamo calcolando tutto nel sistema MKS:

$$m = 300 \cdot 10^{-3}\ Kg = 0.3\ Kg.$$

Adesso la relazione (6) ci dà

$$\omega = \sqrt{\frac{2.7}{0.3}}\ s^{-1} = \sqrt{9}\ s^{-1} = 3\ s^{-1}.$$

Allora, con questi dati la relazione (23) fornisce la legge oraria

$$x(t) = \frac{10}{3}\ \sin\ (3\ t) \approx 3.333 \cdot \sin\ (3\ t).$$

Esercizio 2): Si consideri un punto materiale di massa $m = 400\ g$ attaccato ad una molla di costante elastica $k = 6.4\ N/m$. Se all'istante iniziale la

molla é allungata, il punto materiale si trova a distanza di 20 cm dal punto di equilibrio della molla, ed ha velocità nulla, trovare la legge oraria $x(t)$.
Soluzione: Secondo dati del problema, a $t = 0$ il corpo si trova nella posizione iniziale

$$x(0) = 20\ cm$$

perchè la molla si sta allungando e abbiamo scelto il verso dell'asse X nel senso dell'allungamento (questo spiega il segno positivo di $x(0)$). Ora, prima di tutto conviene trasformare da centimetri a metri ($1\ cm = 10^{-2}\ m$ per mettersi nel sistema MKS:

$$x(0) = 20\ cdot 10^{-2}\ m = 0.2\ m.$$

L'altro dato che ci viene fornito é che la velocità iniziale è nulla:

$$v(0) = 0.$$

Infine, dopo aver trasformato da grammi a chilogrammi la massa

$$m = 400 \cdot 10^{-3}\ Kg = 0.4\ Kg,$$

usiamo la (6) per calcolare ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{6.4}{0.4}}\ s^{-1} = \sqrt{16}\ s^{-1} = 4\ s^{-1}.$$

Con questi dati la relazione (23) fornisce la legge oraria

$$x(t) = 0.2\ \sin\ (4\ t).$$

Nota: in questi due esercizi abbiamo visto in quali casi otteniamo come soluzione in particolare solo coseno o solo seno; i casi sono, rispettivamente, che la posizione iniziale coincide con quella di equilibrio e la velocità iniziale è diversa da zero, e con quella in cui la velocità iniziale è da zero e la posizione iniziale non coincide con quella di equilibrio. Nel prossimo esercizio considereremo invece un caso generale.

Esercizio 3): Si consideri un punto materiale di massa $m = 500\ g$ attaccato ad una molla di costante elastica $k = 12.5\ N/m$. Se all'istante iniziale la

molla é allungata, il punto materiale si trova a distanza di 30 cm dal punto di equilibrio della molla, ed ha una velocità di 18 Km/h, trovare la legge oraria $x(t)$.
Soluzione: Cominciamo a trasformare tutti i dati nel sistema MKS:

$$m = 500 \cdot 10^{-3}\ Kg = 0.5\ Kg,$$

$$x(0) = 30 \cdot 10^{-2}\ m = 0.3\ m.$$

$$v(0) = 18 \cdot \frac{1000}{3600}\ m\ s^{-1} = 5\ m\ s^{-1}.$$

Ora calcoliamo ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{12.5}{0.5}}\ s^{-1} = \sqrt{25}\ s^{-1} = 5\ s^{-1}.$$

Con questi dati la relazione (23) fornisce la legge oraria

$$x(t) = 0.3\ \cos\,(5\ t) + \frac{5}{5}\ \sin\,(5\ t) = 0.3\ \cos\,(5\ t) + \sin\,(5\ t).$$

Esercizio 4): Si consideri un punto materiale di massa $m = 1\ Kg$ attaccato ad una molla di costante elastica k. Sapendo che quando la molla é allungata di 40 cm il punto materiale risente di una forza di intensità 1.6 N ed ha una velocità di 36 Km/h, trovare la legge oraria $x(t)$.
Soluzione: Cominciamo a trasformare tutti i dati nel sistema MKS:

$$40\ cm = 40 \cdot 10^{-2}\ m = 0.4\ m.$$

$$36\ Km/h = 36 \cdot \frac{1000}{3600}\ m\ s^{-1} = 10\ m\ s^{-1}.$$

Poi, usando la legge (3) della forza elastica per ricavare la costante k, possiamo scrivere

$$k = \frac{|F|}{|x|};$$

sapendo che a $|x| = 0.4\ m$ l'intensità della forza è $|F| = 1.6\ N$, abbiamo allora

$$k = \frac{1.6}{0.4}\ N/m = 4\ N/m.$$

Possiamo ora calcolare anche ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{1}}\ s^{-1} = 2\ s^{-1}.$$

Adesso possiamo scegliere come istante iniziale $t = 0$ proprio quello nel quale la la molla è allungata di $0.4\ m$; i dati del problema ci dicono allora che la coordinata iniziale ha segno positivo (perchè la molla è allungata, ed abbiamo scelto il verso positivo di X nel senso degli allungamenti), e vale

$$x(0) = 0.4\ m,$$

mentre la velocità iniziale vale

$$v(0) = 10\ m\ s^{-1}.$$

Con questi dati la relazione (23) fornisce la legge oraria

$$x(t) = 0.4\ \cos\ (2\ t) + \frac{10}{2}\ \sin\ (5\ t) = 0.4\ \cos\ (2\ t) + 5\ \sin\ (2\ t).$$

Esercizi

Esercizio 5): Una forza di intensità costante F agisce per un tempo $t = 10\ s$ su un corpo, inizialmente fermo, di massa $m = 500\ g$; dopo tale tempo la forza F smette istantaneamente di agire sul corpo, che nello stesso istante colpisce una molla a riposo di costante elastica $k = 12.5\ N/m$, comprimendola. Se dopo $10\ s$ dall'impatto col corpo la molla è stata compressa di $20\ cm$, calcolare l'intensità della forza F, e lo spazio percorso dal corpo prima di colpire la molla.
Soluzione: Trasformiamo innanzitutto tutti i dati nel sistema MKS:

$$m = 500 \cdot 10^{-3}\ Kg = 0.5\ Kg,$$

$$20\ cm = 20 \cdot 10^{-2}\ m = 0.2\ m.$$

Esaminiamo poi i vari punti dell'esercizio:
- L'intero moto (accelerato + compressione molla) si svolge su una retta che scegliamo come asse X;
- la forza costante imprime al corpo un moto uniformemente accelerato, con accelerazione di modulo

$$a = F/m \equiv F/(0.5) = 2\ F\ m\ s^{-2};$$

- poichè il corpo parte da fermo, la velocità dopo un tempo $t = 10\ s$ è

$$v(t) = a\ t \equiv (2\ F) \cdot t = (2\ F) \cdot 10\ m\ s^{-1} = 20\ F\ m\ s^{-1};$$

- il corpo colpisce la molla con questa velocità, quando la forza smette di agire, e quando la molla è a riposo; quindi, ridefinendo l'origine degli assi in modo che coincida proprio con questo punto, che è quello di equilibrio per la molla, e azzerando di nuovo il tempo, cioè ridefinendo l'istante $t = 0$ come quello nel quale c'è l'impatto, abbiamo che il corpo in questo istante ha posizione iniziale nulla ($x(0) = 0$) e velocità iniziale data in modulo da quella precedentemente calcolata con il moto accelerato $v(0) = 20\ F\ m\ s^{-1}$;
- siccome il corpo comprime la molla, su di esso comincia a esercitarsi una forza di richiamo elastica $F' = -\ k\ x$, che genera un moto armonico (Eq. (23)) con ω data da

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12.5}{0.5}} = \sqrt{25} = 5\, s^{-1},$$

e con condizioni iniziali $x(0) = 0\,;\ v(0) = 20\ F\ m\ s^{-1}$;
- inserendo questi dati nell'Eq. (23), e calcolando il modulo dei due membri, abbiamo

$$|x(t)| = \frac{20\ F}{5}\ |\sin\,(5\ t)| = 4\ F\ |\sin\,(5\ t)|;$$

- sapendo che dopo $t = 10\ s$ la molla si è compressa di $|x(10)| = 0.2\ m$, inserendo quest'ultimo valore al primo membro dell'Eq. precedente, ed il valore $t = 10\ s$ al secondo membro della stessa equazione, abbiamo

$$0.2 = 4\ F\ |\sin\ (5 \cdot 10)| = 4\ F\ |\sin\ (50)| \approx 4\ F \cdot 0.2378 \approx 0.9512\ F,$$

- da cui

$$F \approx \frac{0.2}{0.9512} \approx 2.1\ N;$$

- infine, con questa forza l'accelerazione del primo moto risulta

$$a = 2\ F\ m\ s^{-2} \approx 4.2\ m\ s^{-2},$$

- e quindi lo spazio percorso dal corpo nei 10 s partendo da fermo risulta

$$x_0 = \frac{1}{2}\ a\ t^2 \approx \frac{1}{2} \cdot (4.2) \cdot (10)^2 = 210\ m.$$

Esercizio 6): Due corpi della stessa massa m svolgono due moti sotto l'azione di forze costanti; l'intensità della forza che agisce sul primo corpo è $F = 2\ N$, mentre quella che agisce sul secondo è $F^{'}$. Inoltre, il primo corpo parte a $t = 0$ con una velocità iniziale $v(0) = 18\ Km/h$, mentre il secondo parte da fermo. Sapendo che dopo 10 s il primo corpo ha percorso 100 m mentre il secondo corpo dopo lo stesso tempo ha percorso 50 m, calcolare l'intensità della forza $F^{'}$ che agisce sul secondo corpo.
Soluzione: Innanzitutto trasformiamo la velocità nel sistema MKS:

$$v(0) = 18 \cdot \frac{1000}{3600} = 5\ m\ s^{-1}$$

A questo punto scriviamo l'equazione dei due moti uniformemente accelerati generati dalle forze costanti, inserendo i dati (e scegliendo le posizioni iniziali nulle):

$$x(t) = v(0) \cdot t + \frac{1}{2}\ a\ t^2 = v(0) \cdot t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}\ t^2 = 5 \cdot t + \frac{1}{2}\ \frac{2}{m}\ t^2 = 5 \cdot t + \frac{t^2}{m};$$

$$x^{'}(t) = \frac{1}{2}\ a^{'}\ t^2 = \frac{1}{2}\frac{F^{'}}{m}\ t^2.$$

Inserendo nella prima $x(10) = 100\ m$ e $t = 10\ s$, e nella seconda $x^{'}(10) = 50\ m$ e $t = 10\ s$, abbiamo

$$100 = 5 \cdot 10 + \frac{(10)^2}{m} = 50 + \frac{100}{m};$$

$$50 = \frac{1}{2}\frac{F^{'}}{m} \cdot (10)^2 = \frac{1}{2}\frac{F^{'}}{m} \cdot 100 = 50\ \frac{F^{'}}{m};$$

ricavo dalla prima la massa m, ottenendo:

$$m = 2\ Kg,$$

e, inserendo questo dato, dalla seconda ricavo

$$50 = 25 \cdot F^{'},$$

cioè

$$F^{'} = 25\ N.$$

Esercizio 7): Un proiettile viene sparato con una velocità di modulo v_0 ed un'inclinazione rispetto al suolo di 45°. Sapendo che il proiettile raggiunge la sua quota massima quando la sua coordinata lungo X vale $x_m = 45\ m$, calcolare la velocità iniziale v_0 e la quota massima.

Esercizio 8): Un proiettile di massa $m = 2\ Kg$ viene sparato con una velocità di modulo v_0 ed un'inclinazione rispetto al suolo di 45°. Il proiettile colpisce il suolo dopo essere stato sparato ad una distanza di 160 m. Di quanto si comprimerebbe una molla di costante elastica $k = 72\ N/m$ posta nel punto di impatto e parallela alla velocità di impatto del proiettile?

Esercizio 9): Una molla di costante elastica $k = 4\ N/m$, alla quale è attaccata una massa $m = 400\ g$, viene compressa di 30 cm, e poi viene lasciata andare; quanto dovrebbe valere una forza costante applicata allo stesso corpo per imprimergli dopo 10 s la stessa velocità che la molla ha fatto acquistare al corpo quando quest'ultimo arriva nel punto di equilibrio della molla?