- LEZIONE 4 DEL CORSO DI FISICA PER INFORMATICA -
A.A. 2006/2007

Silvio De Siena

1 Dinamica del punto materiale (Prima Parte)

Finora abbiamo analizzato vari tipi di moto senza interessarci di come vengono generati. Nel momento in cui ci domandiamo *come* un certo tipo di moto viene generato, allora ci stiamo occupando della *dinamica* del punto materiale.

La dinamica del punto materiale, o di un sistema di punti materiali, è basata su tre *principi*, noti come il primo, il secondo ed il terzo principio della dinamica. Un principio consiste nel formulare un'ipotesi fisica generale, tradotta opportunamente in forma matematica, di cui poi viene verificata la validità generale per tutti i fenomeni all'interno di un settore della Fisica.

1.1 Primo principio della dinamica

Il primo principio della dinamica, o *Principio di Inerzia*, il cui concepimento si può originariamente far risalire a Galileo, stabilisce che;

In un sistema di riferimento inerziale un corpo non soggetto ad azioni esterne mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

In altre parole, se un corpo è fermo o si sta muovendo a velocità costante non può modificare il suo moto in assenza di una qualche azione esterna. La cosa risulta intuitiva, e verrà ulteriormente chiarita quando analizzeremo il secondo principio che, di fatto, contiene il primo come caso particolare. Tuttavia, resta da chiarire cosa si intende per *sistema inerziale*. Sostanzialmente, un sistema di rierimento inerziale è un sistema di riferimento Cartesiano nel quale vale il principio di inerzia; ma questa definizione sembra innescare un circolo vizioso. La soluzione a questo problema è trovare almeno *un* sistema di riferimento inerziale, e di definire tutti gli altri in funzione di questo. Il sistema di riferimento inerziale dal quale si parte è il cosiddetto *sistema di riferimento delle stelle fisse*; sembra naturale infatti rifarsi a corpi astronomici. Comunque, non ci soffermeremo su questo punto e sulle sottigliezze ad esso connesse; ci basta sapere che è possibile partire da un riferimento inerziale, per così dire, "primario" che è fissato rispetto a corpi astronomici. Tutti gli altri sistemi di riferimento inerziali vengono individuati secondo un opportuno criterio. Per poter enunciare questo criterio, dobbiamo prima capire come si trasformano le coordinate ed il moto di un punto materiale se passiamo da un sistema di riferimento Cartesiano ad un diverso riferimento Cartesiano che non coincide con il primo e/o si muove rispetto al primo.

Passaggio da un sistema di riferimento Cartesiano ad un altro, e composizione dei moti.

Supponiamo di descrivere il moto di un punto materiale in un sistema di riferimento Cartesiano di origine O e di assi X, Y, Z. In questo sistema Cartesiano il punto materiale avrà all'istante t una posizione $\vec{s}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$. Nel caso semplice nel quale il secondo sistema Cartesiano, di origine $O^{'}$, ha gli assi $X^{'}, Y^{'}, Z^{'}$ paralleli agli omologhi assi del primo, è abbastanza facile capire che la posizione $\vec{s}(t)^{'}$ del nostro punto materiale rispetto a questo nuovo sistema sarà

$$\vec{s}(t)^{'} = \vec{s}(t) + \vec{s}_{O'O}(t),$$

dove con $\vec{s}_{O'O}(t)$abbiamo indicato la posizione, nel secondo sistema di riferimento, dell'origine del primo sistema di riferimento, cioè il vettore che ha modulo pari alla distanza tra le due origini O e $O^{'}$, ed è diretto secondo la loro congiungente nel verso che va da $O^{'}$ a O. Il caso nel quale gli assi del secondo sistema non sono paralleli a quelli del primo richiede qualche complicazione formale in più ma non è essenziale ai fini del nostro ragionamento; quindi, lo tralasceremo. Si noti che abbiamo sempre indicato esplicitamente l'eventuale dipendenza dal tempo in tutti i vettori-posizione $(\vec{s}(t), \vec{s}(t)^{'}, \vec{s}_{O'O}(t))$, perchè questo ci permette di considerare anche il caso che non solo il punto materiale si stia muovendo nel primo sistema di riferimento, ma anche che il secondo sistema di riferimento si stia muovendo rispetto al primo; infatti, ci dobbiamo domandare come si presenterà il moto del punto se passiamo dal primo al secondo sistema di riferimento, cioè come si compongono i moti, rispettivamente, del punto nel primo riferimento, e del secondo riferimento rispetto al primo. Naturalmente, per i nostri scopi sarà sufficiente considerare alcuni casi semplici. In particolare, considereremo solo il caso in cui non solo il secondo riferimento ha gli assi paralleli al primo, ma, se si muove, il suo moto è parallelo all'asse $X^{'}$ (e, quindi, anche all'asse X del primo riferimento). Si pensi, per esempio, al primo riferimento fisso al suolo, con l'asse X coincidente con un binario ferroviario in un tratto rettilineo; e al secondo riferimento solidale con un treno che sta muovendosi sul binario, con l'asse $X^{'}$ parallelo al treno (e quindi al binario). Si capisce che, dal punto di vista del moto, quello che succede lungo gli assi $Y, Y^{'}$ e $Z, Z^{'}$ passando da un sistema di riferimento all'altro non è rilevante: contano solo gli assi X e $X^{'}$. Procediamo ora con i vari casi.

- 1° caso: il punto materiale è fermo nel primo riferimento, ed il secondo riferimento è fermo rispetto al primo. Allora, nessuno dei vettori posizione dipenderà dal tempo, ed il punto materiale sarà fermo, cioè in stato di quiete, anche nel secondo riferimento. Si trasformeranno solo le sue coordinate.

- 2° caso: il punto materiale è fermo nel primo sistema di riferimento, ma il secondo sistema di riferimento si muove rispetto al primo con velocità costante parallela all'asse X. Nel nostro esempio del treno, il punto materiale è un bagaglio che sta fermo sulla banchina della stazione (primo sistema di riferimento) mentre passa un treno a velocità costante (secondo sistema di riferimento). Allora, nel secondo riferimento (il treno) il punto materiale (il nostro bagaglio) non sarà fermo, ma avrà una velocità pari in modulo a quella del treno, ma opposta in verso: infatti, ad un viaggiatore affacciato ad un finestrino sembrerà che il bagaglio *si allontani* alla velocità (in modulo) del treno. Conclusione: uno stato di quiete rispetto ad un sistema di riferimento viene trasformato, in un secondo sistema di riferimento che si muove di moto uniforme rispetto al primo, in un moto uniforme.

- 3° caso: il punto materiale si muove nel primo sistema di riferimento di moto uniforme parallelo all'asse X, ed il secondo sistema di riferimento si muove a sua volta rispetto al primo con velocità costante anch'essa parallela all'asse X. Per esempio, abbiamo un viaggiatore che corre sulla banchina mentre passa il treno. Allora, per ottenere la velocità del viaggiatore nel secondo sistema di riferimento (che si sta muovendo con il treno) basterà sommare (con i segni relativi!) la sua velocità nel primo riferimento con la velocità del secondo riferimento rispetto al primo. Vediamo che può accadere. Se il viaggiatore riesce a correre alla stessa velocità del treno e nella direzione in cui procede il treno, allora nel secondo sistema di riferimento (quello del treno) il viaggiatore risulterà *fermo*: quindi, il moto uniforme del secondo riferimento ha trasformato il moto uniforme del viaggiatore (rispetto al primo riferimento) in uno stato di quiete. Se il viaggiatore, invece, corre con una velocità diversa da quella del treno, sia che vada nella direzione in cui sta andando il treno, sia nella direzione opposta, rispetto al riferimento del treno avrà ancora una velocità uniforme (un po' più bassa di quella che aveva nel primo riferimento se corre nella direzione del treno, un po' più alta se corre nella direzione opposta al treno, ma comunque uniforme): quindi, in questo caso il moto del secondo riferimento rispetto al primo ha trasformato un moto uniforme in un altro moto uniforme (anche se con velocità diversa).

La conclusione (che vale anche nel caso generale in cui il moto del secondo riferimento non è parallelo all'asse X) è che *stati di quiete o di moto uniforme un sistema di riferimento Cartesiano vengono trasformati in altri stati di quiete o di moto uniforme in un secondo sistema di riferimento Cartesiano fermo o in moto uniforme rispetto al primo.*

In base a questa considerazione possiamo enunciare quanto segue:

Dato un sistema di riferimento inerziale, tutti gli altri sistemi di riferimento inerziali sono quei sistemi di riferimento Cartesiani la cui origine si muove al più di moto rettilineo uniforme rispetto all'origine del sistema di riferimento originario.

In altre parole, se il sistema di riferimento originario è inerziale, e quindi lo stato di quiete o di moto uniforme di un corpo permangono in assenza di azioni esterne, poichè tale stato di quiete o di moto uniforme viene trasformato in un altro stato di quiete o di moto uniforme in un secondo sistema di riferimento che si muove di moto uniforme rispetto al primo, anche nel secondo sistema varrà il principio di inerzia, ed esso sarà quindi inerziale.

Capiremo meglio anche questo punto quando introdurremo il secondo principio, e mostreremo che esso implica il *Principio di Relatività Galileana.*

1.2 Il secondo principio della dinamica

Stato di un sistema e sua evoluzione dinamica.

Con il secondo principio della dinamica entriamo nel vivo della problematica fisica. Infatti, una volta individuato il sistema naturale da studiare, uno degli scopi principali della Fisica è quello di determinarne *l'evoluzione nel tempo*. A questo punto, dobbiamo naturalmente dare consistenza fisico-matematica a questo concetto, e ora lo faremo prendendo in considerazione il sistema costituito da un singolo punto materiale, che costituisce ovviamente il più semplice sistema meccanico. Innanzitutto, dobbiamo dare consistenza al termine "evoluzione nel tempo del sistema"; intuitivamente, questo termine indica il fatto che riusciamo a "conoscere" il sistema in vari istanti successivi. Ma tutti i termini contenuti in questa affermazione vanno opportunamente definiti e formalizzati. Cominciamo col definire cosa si intende in Fisica per "conoscere un sistema ad un certo istante". Definiamo quindi il concetto di *stato di un sistema*:

Lo stato di un sistema ad un certo istante è l'insieme di tutte le grandezze fisiche che sono necessarie per descrivere completamente il sistema all'istante scelto.

È chiaro da questa definizione che la determinazione delle grandezze che definiscono lo stato di un sistema è una cosa assolutamente non banale, e che di fatto definire attraverso delle grandezze lo stato di un sistema equivale, sostanzialmente, a definire il sistema stesso. Comunque, nel caso di un punto materiale lo stato è definito in maniera semplice nel modo seguente:

(***) Lo stato di un punto materiale ad un certo istante è definito dalla coppia costituita dalla posizione e dalla velocità del punto in quell'istante.

Questa definizione è molto intuitiva: infatti, per fare un esempio banale, se una pattuglia della polizia deve segnalare ad un'altra pattuglia una macchina sospetta da intercettare tipicamente dice "il veicolo è all'incrocio tra la terza e la settima strada (posizione), e si dirige lungo la nona strada verso il centro a circa 60 all'ora (velocità in direzione, verso e modulo)". Questo quindi è lo "stato" del veicolo sospetto nel momento in cui la prima pattuglia lo ha intercettato.

Quindi, lo stato di un punto materiale ad un certo istante t è definito dalla coppia $(\vec{s}(t), \vec{v}(t))$ data dalla posizione e dalla velocità del punto al tempo t.

Avendo definito (almeno nel caso del punto materiale) cosa intendiamo per "conoscere il sistema ad un certo istante", dobbiamo ora definire il concetto di "evoluzione nel tempo del sistema". Anche questo concetto può essere definito in modo che risulti puttosto intuitivo. Sostanzialmente, lo abbiamo già accennato nella sezione della cinematica. Infatti, in quel contesto abbiamo visto che è sempre necessario non solo stabilire un origine ed un sistema di riferimento, ma anche scegliere un *tempo iniziale*. Non solo, ma abbiamo anche visto che la soluzione dei problemi della cinematica richiede delle *condizioni iniziali*, e che queste condizioni sono la posizione all'istante iniziale, e la velocità all'istante iniziale. Ma la coppia (posizione iniziale, velocità iniziale) costituisce, secondo la nostra definizione di stato del punto materiale, lo *stato iniziale del sistema*. Quindi, se fissiamo convenzionalmente a zero l'istante iniziale prescelto (e lo chiamiamo "presente"), e consideriamo gli istanti $t > 0$ (e li chiamiamo "futuro"), il problema della dinamica del punto materiale diventa il seguente:

Qual'è la legge fisica generale che, dato lo stato iniziale di un punto materiale, permette di calcolare lo stato del punto a tutti gli istanti successivi?.

(Cioè, quale legge mi permette, conoscendo il presente, di calcolare il futuro?).

È forse opportuno ricordare, per essere più precisi, che tale legge deve permettere, una volta assegnata la coppia $(\vec{s}(0), \vec{v}(0))$ (posizione-velocità iniziali) di calcolare la coppia $(\vec{s}(t), \vec{v}(t))$ ad ogni istante $t > 0$. È anche opportuno rilevare che, in realtà, quanto appena affermato non è esaustivo, perchè la legge della dinamica permette di calcolare lo stato del sistema non solo per $t > 0$, ma per TUTTI gli istanti t differenti da 0, *compresi quelli "passati"* (cioè $t < 0$). Su questo torneremo brevemente in seguito.

La legge di Newton.

Siamo ora pronti ad introdurre il secondo principio della dinamica, espresso attraverso la *Legge di Newton*. Le grandezze fisiche che entreranno in questa legge saranno la *forza* che viene esercitata sul punto materiale che stiamo considerando, la *massa* del punto materiale, e l'*accelerazione* del punto materiale. Di queste tre grandezze, l'accelerazione è già stata definita all'interno della cinematica:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \frac{d^2\vec{s}(t)}{dt^2}.$$

Le altre due grandezze (forza e massa) le abbiamo nominate all'inizio quando abbiamo introdotto i sistemi di unità di misura e l'analisi dimensionale, ma ora dobbiamo definirle operativamente. Diamo innanzitutto una definizione della "forza". Per fare questo, dobbiamo, come per ogni grandezza fisica, associare, almeno in linea di principio, a tale definizione un metodo che permetta di misurare una forza. Una possibile definizione è la seguente:

La forza é quella grandezza fisica vettoriale che determina l'allungamento di materiali filiformi se ad essi applicata. La direzione ed il verso della forza sono definiti dalla direzione e dal verso dell'allungamento del materiale, e l'intensità della forza è misurata attraverso l'entità dell'allungamento.

In realtà, è chiaro che questa definizione operativa si presenta come piuttosto limitata, ma per ora è sufficiente.

Se indichiamo con $\vec{F}$ la forza, a questo punto possiamo scrivere la legge di Newton come:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}\,. \tag{1}$$

Questa relazione va ora opportunamente *interpretata*. Il primo membro, la forza, rappresenta la *causa* del moto; la forza si presenta quindi come quella grandezza fisica che è in grado di modificare il moto di un corpo (per esempio, di metterlo in movimento se è fermo, o di cambiare la sua velocità se è già in moto). Vediamo quindi che quelle che nel primo principio chiamiamo "azioni esterne" altro non sono che forze. Nel secondo membro, l'accelerazione costituisce l'*effetto* generato dalla causa (la forza). La legge di Newton, come spesso accade, connette semplicemente la causa al suo effetto, e si può enunciare nel moto seguente:

Una forza esercitata su un punto materiale genera un'accelerazione del punto alla quale la forza risulta direttamente proporzionale.

Vediamo che nella legge di newton compare anche la quantità m, che chiamiamo *massa* del corpo, e che è definita come *la costante di proporzionalità tra la forza e l'accelerazione da essa generata.*

Un'enunciato più preciso della legge di Newton è allora:

Una forza esercitata su un corpo (punto materiale) genera un'accelerazione del punto alla quale la forza risulta direttamente proporzionale attraverso una costante di proporzionalità (massa) che dipende dal corpo stesso.

Vediamo che, a parità di forza, l'accelerazione acquistata dal corpo è tanto più piccola quanto più grande è la sua massa. In altre parole, la massa tende a generare una resistenza, o *inerzia*, del corpo all'azione della forza; chiameremo quindi la massa definita dalla legge di Newton anche *massa inerziale* del corpo.

A questo punto, dobbiamo analizzare le dimensioni di una forza, e definira la sua unità di misura. Dalla legge di Newton vediamo che le dimensioni della forza sono

$$[F] = [m \cdot a] = [m \cdot l \cdot t^{-2}].$$

Nel sistema MKS la forza ha quindi le dimensioni di Kilogrammo per metro diviso secondi a meno due; definiamo allora l'unità di forza in questo sistema, che chiameremo *Newton* ed indicheremo con il simbolo N, come

$$1\ N \doteq 1\ Kg \cdot 1\ m \cdot 1\ s^{-2}. \tag{2}$$

È necessario ora precisare, in vista dell'uso della legge di Newton per calcolare la dinamica, che la relazione (1) è. in generale, una relazione *vettoriale*. Per poterla utilizzare, si deve ricordare che un vettore, in un riferimento Cartesiano, è scomponibile nelle sue tre componenti lungo i tre assi. Se indichiamo quindi con F_x, F_y, F_z le componenti della forza, e con a_x, a_y, a_z le componenti dell'accelerazione, l'Eq. (1) *è equivalente al sistema costituito dalle tre equazioni unidimensionali*

$$F_x = m\ a_x\ ,$$

$$F_y = m\ a_y\ ,$$

$$F_z = m\ a_z\ , \tag{3}$$

ed è in questa forma, come vedremo, che può essere utilizzata. D'altra parte, essendo le forze vettori, se su un punto materiale agiscono più forze, la legge di Newton per questo corpo deve contenere al primo membro la *forza totale* agente sul corpo, ovvero il vettore che si ottiene sommando vettorialmente tutte le forze che agiscono sul corpo.

Esercizio 1): Decomporre in componenti una forza di modulo pari a $3N$, posta nel piano (X, Y), e che forma con l'asse X un angolo di $30°$.
Soluzione: Stiamo considerando un problema bidimensionale. Poichè la componente lungo X della forza è la proiezione del vettore forza su questo asse, e quindi il cateto adiacente all'angolo di $30°$ che il vettore forma con l'asse, in un triangolo rettangolo di cui il modulo della forza è l'ipotenusa, abbiamo, usando le formule trigonometriche a suo tempo introdotte, che

$$F_x = |\vec{F}| \cos\ 30° = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ N,$$

mentre

$$F_y = |\vec{F}| \sin\ 30° = \frac{3}{2}\ N.$$

La legge di Newton per calcolare la dinamica del punto materiale.

Abbiamo già puntualizzato che il primo membro della legge di Newton (1) contiene la causa del moto (la forza) ed il secondo membro l'effetto (l'accelerazione). Per poter calcolare l'evoluzione dinamica dello stato del punto materiale, è necessario inserire al primo membro, volta per volta, la *legge della forza*. Infatti, una forza può avere diverse origini: può essere causata dalla compressione di una molla, oppure dall'attrazione gravitazionale tra due corpi, o da altro. In ognuno di questi casi il vettore che descrive la forza assumerà una forma diversa. Per esempio, nel caso della molla la forza avrà la forma $\vec{F} = -\ k\ \vec{s}$, cioè sarà proporzionale allo spostamento (rispetto alla posizione di equilibrio), ed avrà verso opposto ad esso (forza elastica di richiamo); nel caso di attrazione gravitazionale avremo $\vec{F} = (G\ m\ M/r^2)\ \hat{r}$, cioè la forza (attrattiva) che il corpo di massa M esercita a distanza r sul nostro punto materiale di massa m è diretta lungo la congiungente i due punti materiali, da M a m (questo è espresso dal versore $\hat{r}$ che ha, appunto, questa direzione e verso), è direttamente proporzionale alle due masse ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le masse.

Queste sono le leggi della forza nel caso della molla o dell'attrazione gravitazionale. In generale la legge della forza sarà definita determinando come la forza dipende dalle coordinate e/o da altre caratteristiche, e ci permetterà di inserire al primo membro dell'Eq. (1) una funzione nota. A questo punto, ricavando dalla (1) l'accelerazione, abbiamo

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}}{m} \; , \tag{4}$$

e ricordando che l'equazione vettoriale (1) è equivalente al sistema di equazioni (3), possiamo riscrivere questa relazione come

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{F_x}{m} \; , \\ a_y &= \frac{F_y}{m} \; , \\ a_z &= \frac{F_z}{m} \; . \end{aligned} \tag{5}$$

Ricordando, infine, che le componenti lungo gli assi dell'accelerazione sono ovviamente

$$a_x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \; ; \; a_y(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \; ; \; a_z(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2},$$

le relazioni (6) diventano

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{F_x}{m} \; , \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= \frac{F_y}{m} \; , \\ \frac{d^2z(t)}{dt^2} &= \frac{F_z}{m} \; . \end{aligned} \tag{6}$$

Poichè i secondi membri di queste equazioni sono funzioni assegnate delle coordinate x, y, z, possiamo affermare che:

La legge di Newton equivale a tre equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine per le funxioni incognite $x(t), y(t), z(t)$.

Quindi, se risolviamo tali equazioni otteniamo le coordinate $x(t), y(t), z(t)$ del punto materiale e le loro derivate prime nel tempo; in altri termini, otteniamo ad ogni istante la posizione $[\vec{s}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))]$ e la velocità $[\vec{v}(t) \equiv (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \equiv (dx(t)/dt, dy(t)/dt, dz(t)/dt)]$ del punto materiale, cioè, secondo la precedente definizione (***), lo *stato* ad ogni istante. Ricordiamo ora che, in sede di discussione della cinematica, abbiamo costatato che le equazioni differenziali del secondo ordine, come quelle dell'Eq. (6), possono essere risolte dopo aver assegnato le due condizioni iniziali. Quindi, per risolvere la prima dobbiamo assegnare $(x(0), v_x(0))$, per risolvere la seconda dobbiamo assegnare $(y(0), v_y(0))$, per risolvere la terza dobbiamo assegnare $(z(0), v_z(0))$; ma questo equivale a dire che le tre equazioni, e quindi l'equazione vettoriale (4), potranno essere risolte assegnando la coppia di vettori $\vec{s}(0) \equiv (x(0), y(0), z(0)), \vec{v}(0)(v_x(0), v_y(0), v_z(0))$, cioè la posizione e la velocità iniziali del punto, cioè lo *stato iniziale*. Possiamo allora riassumere quanto detto nella seguente affermazione:

Assegnato lo stato del sistema in un certo istante ("iniziale"), la legge di Newton permette di determinare lo stato del sistema ad ogni altro istante.

Ora, prima di procedere a mostrare in alcuni casi semplici come la legge di Newton permetta di determinare la dinamica di un sistema, osserviamo che la Legge di Newton permette in principio di calcolare *esattamente* o, con altro termine, *deterministicamente* lo stato di un punto materiale ad ogni altro istante, una volta assegnato lo stato in un certo istante; quindi, la Meccanica del punto materiale (e la Meccanica più in generale) viene definita una *teoria deterministica*.

Osserviamo inoltre un'altra cosa: *il fatto che una forza sia proporzionale all'accelerazione, e non alla velocità, del corpo al quale è applicata, costituisce un'ipotesi assolutamente non banale e contraria all'esperienza comune.* Infatti, noi ci aspettiamo che se una persona raddoppia la forza della vogata su una barca, quello che raddoppia è la velocità della barca e non la sua accelerazione: *e questo è assolutamente vero!*. Come si spiega allora questa apparente contraddizione? Il fatto è che, nel caso della barca, ed in tutta la nostra esperienza quotidiana, i corpi subiscono *l'azione dell'attrito* (o della viscosità); in queste condizioni vale quindi la cosiddetta *Fisica Aristotelica* e, almeno in buona approssimazione, la forza è effettivamente proporzionale alla velocità. Tuttavia già (in forma particolare) Galileo, e poi Newton, ebbero la grande intuizione che le leggi della Meccanica dovessero essere formulate in assenza di attrito, il quale può essere poi aggiunto come complicazione in un secondo momento. In realtà, questa loro intuizione nasceva dal fatto che questi scienziati erano interessati in modo primario a studiare i moti degli astri, *moti nei quali l'attrito è assolutamente assente.* Se si considerano moti senza attrito, allora vale la legge di Newton e la forza risulta proporzionale all'accelerazione!.

Concludiamo infine con una precisazione: lo stato all'istante t di un punto materiale di massa m, posizione $\vec{s}(t)$ e velocità $\vec{v}(t)$ è più propriamente definito assegnando la coppia formata da posizione e *momento*, e non quella posizione-velocità. Il momento , o *quantità di moto*, $\vec{p}(t)$ nel nostro caso è definito come

$$\vec{p}(t) = m \cdot \vec{v}(t),$$

e quindi lo stato è definito da $(\vec{s}(t), \vec{p}(t))$. Nei casi semplici che stiamo considerando, però, questa definizione è sostanzialmente equivalente a quella data attraverso la coppia $(\vec{s}(t), \vec{v}(t))$.

Applicazione della legge di Newton in casi semplici.

Ora illustreremo come la legge di Newton risolva il problema dell'evoluzione dinamica nel caso di sistemi semplici, cioè nei casi in cui la legge della forza ha una forma semplice.

a) Caso di forza nulla.

Supponiamo che la forza che agisce sul nostro punto materiale sia nulla; siamo, cioè, nel caso del principio di inerzia nel quale non vi sono azioni esterne sul corpo. Mettiamo allora $\vec{F} = 0$ al primo membro della legge di Newton (1), ed otteniamo

$$\vec{a}(t) = 0,$$

cioè che l'accelerazione ad ogni istante deve essere nulla.

Se l'accelerazione è nulla, allora sono ulle le sue tre componenti; quindi abbiamo

$$a_x = 0 \ ,$$

$$a_y = 0 \ ,$$

$$a_z = 0 \ , \tag{7}$$

che non è altro che l'Eq. (6) con le componenti della forza messe a zero. Ricordando che l'accelerazione è la derivata prima della velocità, riscriviamo questa relazione per componenti come

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \ ,$$

$$\frac{dv_y(t)}{dt} = 0 \ ,$$

$$\frac{dv_z(t)}{dt} = 0 \ . \tag{8}$$

Ricordando infine che le funzioni la cui derivata prima è nulla sono le costanti, ne ricaviamo che le tre componenti della velocità sono costanti, e quindi che il vettore velocità è costante. Essendo in particolare costante anche la direzione della velocità, possiamo, per semplificare le cose, scegliere il sistema di riferimento con l'asse X parallelo proprio a tale direzione; ciò significa che rimane diversa da zero solo la componente v_x della velocità, la quale è costante, e che il moto si svolge solo lungo la direzione X. Abbiamo scoperto allora che una forza nulla genera un moto con velocità costante, e quindi *un moto rettilineo uniforme*; vale allora la legge oraria (**??**) (Lezione 3), ricavata nell'ambito della cinematica, che qua riscriviamo per maggiore chiarezza:

$$x(t) = x(0) + v_0 \, t \ , \tag{9}$$

dove v_0 indica il valore costante della velocità (con unica componente lungo X nel nostro riferimento). Si noti che qui abbiamo scoperto che *la causa di un moto uniforme è l'assenza di forze.* Essendo ovviamente v_0 il valore che la velocità aveva all'inizio, ecco che abbiamo scoperto che il primo principio è una conseguenza del secondo, che ci dice che in assenza di forze il corpo segue la legge (9); il che significa che se il corpo era in quiete (cioè $v_0 = 0$) allora rimane in quiete, mentre se procedeva con moto uniforme (cioè $v_0 \neq 0$) allora continua a procedere con moto uniforme.

b) Caso di forza costante.

Consideriamo il caso in cui la forza che agisce sul punto materiale sia costante; allora la legge (1) ci dice che *anche l'accelerazione è costante*, e pari a

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \tag{10}$$

dove ora $\vec{F}$ è un vettore costante. Analogamente a quanto abbiamo fatto nel caso precedente, essendo anche la direzione dell'accelerazione costante possiamo scegliere l'asse X parallelo all'accelerazione stessa; sopravvive quindi solo la componente a_x che indicheremo semplicemente con a, con

$$a = \frac{F_x}{m} \equiv \frac{F}{m}, \tag{11}$$

ed il moto è evidentemente unidimensionale, cioè è un moto rettilineo uniformemente accelerato. Abbiamo quindi scoperto che: *un moto rettilineo uniformemente accelerato viene generato da una forza costante.* La soluzione di questo problema dinamico, date le condizioni iniziali $x(0), v(0)$ su posizione e velocità, è allora la legge oraria (**??**) ricavata nella Lezione 3 appunto per il moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$x(t) = x(0) + v(0)\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2 \ , \tag{12}$$

con la relazione tra la velocità e l'accelerazione data (vedi sempre Lezione 3) da

$$v(t) = v(0) + a\, t\ . \tag{13}$$

Se inseriamo la relazione (**??**), abbiamo infine

$$x(t) = x(0) + v(0)\, t + \frac{1}{2}\, \frac{F}{m}\, t^2 \ , \tag{14}$$

e

$$v(t) = v(0) + \frac{F}{m}\, t\ . \tag{15}$$

Esercizio 2): Un punto materiale di massa $m = 2Kg$ percorre, sotto l'effetto di una forza costante, e partendo da fermo, $10m$ in $2s$. Calcolare l'intensità della forza.

Soluzione: Abbiamo visto che una forza costante, di intensità F, genera un moto uniformemente accelerato dato dalla legge oraria (**??**). Coi dati a nostra disposizione possiamo intanto calcolare l'accelerazione $a = F/m$. Infatti, scelto l'origine del moto in maniera che $X(0) = 0$, il fatto che il corpo parta da fermo ci dice anche che $v(0) = 0$, e l'Eq. (**??**) diventa

$$x(t) = \frac{1}{2}\,\frac{F}{m}\,t^2.$$

Sapendo poi che a $t = 2\ s$ il corpo ha percorso 10 metri (cioè $x(2) = 10\ m$, ponendo a primo membro dell'equazione questo valore numerico e a secondo membro $t = 2$, abbiamo

$$10 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot 2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot 4 = 2 \cdot \frac{F}{m}.$$

Poichè $m = 2Kg$, abbiamo

$$10 = 2 \cdot \frac{F}{2},$$

cioè $F = 10\ N$.

c) Moti bidimensionali e moto del proiettile.

Finora abbiamo ricostruito i moti rettilinei (uniforme e uniformemente accelerato) che abbiamo già incontrato nella sezione della cinematica, e che sono moti unidimensionali. Ora introduciamo due casi di moti bidimensionali. Il primo caso lo introduciamo come esercizio per mostrare che a volte la descrizione in più di una dimensione è solo una complicazione di un moto che può essere descritto, scegliendo meglio il sistema di riferimento, come moto unidimensionale; il secondo caso, il moto del proiettile, è invece un caso genuinamente bidimensionale costruito tramite scomposizione e ricomposizione di moti lungo gli assi.

Esercizio 3): Calcolare la traiettoria di un punto materiale di massa $m = 1\ Kg$, soggetto alla forza dell'esercizio 1, e che parte da fermo dall'origine degli assi.
Soluzione: Per calcolare la legge oraria dobbiamo risolvere le equazioni (6) per le componenti; in questo caso bidimensionale, però, la componente lungo Z non compare, e quindi dobbiamo risolvere solo le due equazioni

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{F_x}{m},$$

e

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{F_y}{m}.$$

D'altra parte, la forza è costante, e così anche le sue componenti lungo X e Y; quindi, le due equazioni sopra descrivono moti unidimensionali generati lungo X e lungo Y rispettivamente dalle forze costanti, calcolate nell'esercizio 1, $F_x = 3\sqrt{3}/2$ e $F_y = 3/2$. Sappiamo allora dal punto b) che i due moti unidimensionali sono moti uniformemente accelerati, con accelerazioni date rispettivamente $a_x = F_x/m \equiv F_x/1 = 3\sqrt{3}/2\ m\ s^{-2}$ e $a_y = F_y/m \equiv F_y/1 = 3/2\ m\ s^{-2}$; tenendo presente che il corpo parte dall'origine degli assi, e quindi che $x(0) = y(0) = 0$, e che parte da fermo, e quindi che $v_x(0) = v_y(0) = 0$, i due moti sono descritti da:

$$x(t) = \frac{1}{2}\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\,t^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,t^2,$$

e da

$$y(t) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,t^2 = \frac{3}{4}\,t^2.$$

Adesso dobbiamo ricavare la traiettoria che, essendo il moto unidimensionale, si svolgerà nel piano XY, e sarà descritta ricavando come la coordinata y del punto dipende dalla coordinata x; per fare questo, basta ricavare il tempo t (o, in questo caso, il suo quadrato t^2) dalla prima equazione in funzione di x, e sostituire questo risultato al secondo membro dell'altra equazione (cioè, basta, *eliminare* il tempo tra le due equazioni. Procediamo. Dalla prima relazione abbiamo

$$t^2 = \frac{4}{3\sqrt{3}}\,x,$$

e, sostituendo nella seconda, otteniamo

$$y = \frac{3}{4}\,\frac{4}{3\sqrt{3}}\,x = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Risulta quindi che la traiettoria è un *retta*. Questo ci dice che la descrizione in due dimensioni di questo moto è ridondante ed inutilmente complicata; ed infatti, ci ricordiamo che nel punto b) abbiamo detto che, se la forza è costante , allora conviene scegliere uno degli assi, per esempio l'asse X lungo la direzione della forza, in modo da poter descrivere il moto come effettivamente è, cioè un moto rettilineo e quindi unidimensionale. Nel caso di questo esercizio conviene quindi mettersi in un nuovo sistema di riferimento, con l'origine coincidente con quella del sistema di riferimento orginario, ma con l'asse $X^{'}$ lungo la direzione della forza, e quindi formante un angolo di $30°$ con l'originale asse X (naturalmente, anche il nuovo asse $YX^{'}$ risulterà ruotato dello stesso angolo rispetto al vecchio asse Y). A questo punto, l'unica componente della forza è lungo $X^{'}$ e coincide con il suo modulo di $3\ N$. L'accelerazione lungo $X^{'}$, essendo la massa unitaria, coinciderà numericamente col modulo della forza e varrà quindi $3\ m\ s^{-2}$, e, chiamata $x^{'}(t)$ la coordinata del punto lungo l'asse $X^{'}$ all'istante t, la legge oraria sarà semplicemente data da

$$x^{'}(t) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot t^2 = \frac{3}{2}\, t^2.$$

Premessa al moto del proiettile: la forza di gravità.

Prima di procedere, dobbiamo introdurre una forza molto importante: la forza di gravità. Abbiamo già introdotto tra gli esempi di legge della forza la legge della gravitazione universale che si esercita tra due corpi dotati di massa, e che ha la forma

$$\vec{F} = G\, \frac{m\, M}{r^2} \hat{r},$$

dove i simboli sono stati già spiegati in precedenza. Ora, la forza di gravità è la forza di attrazione che la Terra esercita su un corpo dotato di massa che si trovi in prossimità della sua superficie; con questo intendiamo che, se $R_T \approx 6500\ Km \equiv 6.5 \cdot 10^6\ m$ è il raggio della Terra, e d denota la distanza del corpo considerato dalla superficie terrestre, dobbiamo essere nelle condizioni $d << R_T$ (cioè condizioni nelle quali la distanza d è praticamente trascurabile rispetto ad R_T). Adesso, ritorniamo alla legge di gravitazione universale, e notiamo che essa é scritta per due *punti materiali* di masse m

ed M. Ora, il problema è che la Terra può essere considerata un punto materiale se l'altra massa che con essa interagisce è, per esempio, il Sole; infatti, la distanza Terra-Sole è di circa 150*milioni* di chilometri, cioè circa $1.5 \cdot 10^{11}$, ed il raggio della Terra è trascurabile rispetto ad essa. Ma sicuramente non possiamo adottare questa approssimazione nel caso di interazione con un corpo piccolissimo prossimo alla sua superficie. Si può mostrare, però (con un argomento dello stesso tipo che incontreremo quando faremo il *Teorema di Gauss* in elettrostatica) che, dal punto di vista della gravitazione, ogni corpo sferico di massa M può essere sostituito a tutti gli effetti con un punto materiale posto nel centro del corpo sferico, e di massa pari alla massa totale M. Poichè agli effetti della forza di gravità la Terra può essere considerata, con buona approssimazione, sferica, allora un corpo di massa m vicino alla sua superficie "vede" la forza di attrazione esercitata da un punto materiale posto al centro della Terra e nel quale è concentrata tutta la massa terrestre M_T. Ora, il corpo a distanza d dalla superficie terrestre, dista $d + R_T \approx R_T$ dalcentro della Terra. Quindi, esso risente di una forza, diretta verso il centro della Terra e quindi *verticale verso il basso*, la cui intensità è ottenuta dalla legge di gravitazione sostituendo a M il valore della $M_T$massa Terrestre (che si può ottenere in principio moltiplicando il volume della Terra per la sua densità media), e a r il valore del raggio terrestre R_T:

$$|\vec{F}| \approx G\,\frac{m\,M_T}{{R_T}^2} \equiv m \cdot \left(G\,\frac{M_T}{{R_T}^2}\right).$$

In questa relazione abbiamo alla fine messo in evidenza che, nella nostra approssimazione nella quale la distanza d di un corpo dalla superficie terrestre è trascurabile rispetto al raggio terrestre, e quindi *tutti i corpi vengono attratti alla stessa distanza R_T dal centro in cui è concentrata tutta la massa*, il modulo della forza di gravitá risulta essere *il prodotto $|\vec{F}|m\ g$ della massa m del corpo considerato per una costante g uguale per tutti i corpi e che vale*

$$g = G\,\frac{M_T}{{R_T}^2}.$$

Se ora ci ricordiamo che vale la legge di Newton che ci dice che $|\vec{F}| = m\,|\vec{a}|$, dove $\vec{a}$ è l'accelerazione, vediamo che $g = |\vec{a}|$, cioè che *tutti i corpi prossimi alla superficie terrestre vengono accelerati a a causa dell'attrazione terrestre con la stessa accelerazione di modulo pari a g, diretta perpendicolarmente* *alla superficie terrestre, e verso il centro della Terra.* Indichiamo con $\vec{g}$ il vettore accelerazione così definito; tale vettore è noto come *accelerazione di gravità.* Riassumendo, dato un corpo di massa m prossimo alla Terra, la forza di gravità ha la forma

$$\vec{F} = m\vec{g}. \tag{16}$$

Il modulo di g può essere misurato, e, nel sistema MKS, vale

$$\vec{g} \approx 9.81 \; m \; s^{-2}, \tag{17}$$

valore che negli esercizi approssimeremo, per comodità a 10 $m \; s^{-2}$.

Prima di concludere questa premessa, accenniamo ad una questione che ha conseguenze profonde. Vogliamo infatti far notare che abbiamo parlato di "massa di un corpo" sia nella legge di Newton (dove la massa misura la resistenza al moto, e quindi è stata definita come "massa inerziale"), sia all'interno della legge di gravitazione universale (dove invece le masse sono le *sorgenti* che generano l'attrazione gravitazionale, e quindi vengono definite "masse gravitazionali"). Non solo, ma *abbiamo dato per scontato che massa inerziale e massa gravitazionale di un corpo coincidono.* Infatti, se non l'avessimo fatto, ed avessimo tenuta distinta la massa inerziale M_I del corpo dalla massa gravitazionale m_G dello stesso corpo, scrivendo la legge di Newton per l'attrazione terrestre sul corpo, avremmo scritto

$$G \, \frac{m_G \; M_G T}{{R_T}^2} = m_I \; |\vec{a}|,$$

e non avremmo potuto semplificare tra i due membri la massa del corpo attratto. L'ipotesi che massa inerziale e massa gravitazionale coincidano non è, quindi, affatto banale, ma è un'ipotesi concettualmente profonda che Einstein mette alla base della Teoria della Relatività Generale.

L'ipotesi che massa inerziale e massa gravitazionale coincidano ci permette anche di misurare le masse, tramite una bilancia, attraverso il *peso.* Il peso di un corpo di massa m non è altro che la forza di attrazione terrestre $m \, \vec{g}$; l'unità di misura del peso è il Kilogrammo-peso (dato dal prodotto della massa per g), distinto dall'unità di massa, il Kilogrammo-massa, ma ad essa proporzionale.

Il moto del proiettile.

Ora considereremo il problema di un punto materiale, soggetto alla forza di gravità, che parte dal suolo con una velocità iniziale di modulo v_0, inclinata rispetto al suolo di un angolo θ: questo problema è noto come "moto del proiettile" o, anche, come "moto del grave".

Immaginiamo quindi un proiettile sparato da un cannone o da un mortaio; è subito evidente che il moto del proiettile rimane confinato in un piano, ed in particolare nel piano che contiene il vettore velocità iniziale. Consideriamo allora un sistema di riferimento bidimensionale (vedi Figura) in questo piano, con l'asse X coincidente col suolo, e con l'asse Y che rappresenta la perpendicolare al suolo, e con l'origine fissata nel punto da cui parte il proiettile, la cui massa indichiamo con m.

Per poter risolvere il problema dinamico, dobbiamo scrivere come al solito la legge di Newton per componenti; in particolare, in questo caso, lungo le componenti X e Y:

$$F_x = m\ a_x\ ,$$

$$F_y = m\ a_y\ . \tag{18}$$

Analizziamo ora le forze che agiscono sul proiettile. In realtà, l'unica forza che agisce in questo caso è la forza di gravità, $\vec{F} = m\vec{g}$, che, per come abbiamo scelto il sistema di riferimento, è parallela all'asse Y (la verticale) ed ha verso opposto all'asse (dall'alto verso il basso). Quindi, l'unica componente della forza è lungo l'asse y e vale $F_y = -\ m\ g$, dove il segno negativo è dovuto al verso opposto rispetto a Y. Lungo X, invece, non agiscono forze, e quindi $F_x = 0$. L'Eq. (18) divemta quindi

$$0 = m\ a_x\ ,$$

$$-\ m\ g = m\ a_y\ , \tag{19}$$

cioè

$$a_x = 0\ ,$$

$$a_y = -\ g\ . \tag{20}$$

Allora: lungo l'asse X l'accelerazione è nulla, e quindi (caso a)) abbiamo un moto rettilineo uniforme:

$$x(t) = x(0) + v_x(0)\, t,$$

mentre lungo l'asse Y abbiamo un'accelerazione costante (pari a $-\ g$), e quindi (caso b)) abbiamo un moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$y(t) = y(0) + v_y(0)\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2.$$

Poichè il proiettile parte all'istante iniziale dall'origine abbiamo $x(0)0y(0) = 0$. Adesso dobbiamo calcolare le componenti $v_x(0), v_y(0)$ lungo i due assi della velocità iniziale; poichè questa in modulo vale v_0, e forma un angolo θ con il suolo (e quindi con l'asse X) abbiamo, al solito,

$$v_x(0) = v_0\ \cos\ \theta\ \ ;\ \ v_y(0) = v_0\ \sin\ \theta.$$

Inserendo questi dati nelle equazioni, abbiamo che la legge oraria è data dal sistema

$$x(t) = (v_0\ \cos\ \theta)\ t\ ,$$

$$y(t) = (v_0\ \sin\ \theta)\ t - \frac{1}{2}\, g\, t^2\ . \tag{21}$$

Avendo risolto il problema dell'evoluzione dinamica, ci proponiamo ora di ricavare la traiettoria del proiettile. Procedendo come nell'esercizio 3, eliminiamo il tempo, ricavandolo in funxione di x dalla prima equazione:

$$t = \frac{x}{v_0\ \cos\ \theta},$$

e sostituendolo nella seconda, in modo da avere la dipendenza di y da x:

$$y = \frac{v_0\ \sin\ \theta}{v_0\ \cos\ \theta}\, x - \frac{1}{2}\, g\, \frac{x^2}{(v_0\ \cos\ \theta)^2},$$

cioè

$$y = (tg\ \theta)\ x - \frac{1}{2}\, g\, \frac{x^2}{(v_0\ \cos\ \theta)^2}\ . \tag{22}$$

Vediamo quindi che *la traiettoria del proiettile è una parabola, la cui equazione dipende dal modulo e dall'inclinazione della velocità iniziale.*

Esercizio 4): Un proiettile viene sparato con una velocità di 40 $m\ s^{-1}$, e con una inclinazione di 60°. Calcolare a quale distanza colpisce il bersaglio al suolo.
Soluzione: Abbiamo $v_0 = 40\ m\ s^{-1}$ e $\theta = 60°$. Quindi, la traiettoria (22) diventa

$$y = (tg\ 60°)\ x - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{x^2}{(40\ \cos\ 60°)^2}\ ,$$

e quindi

Esercizio 5): Un proiettile viene sparato con una velocità v_0, e con una inclinazione di 45°, e colpisce il bersaglio al suolo ad una distanza di 250 m. Calcolare v_0.
Soluzione: l'equazione (22) con $\theta = 45°$ (e quindi $tg\theta = 1\ ;\ \cos\theta = \sqrt{2}/2$), e con $g \approx 10\ m\ s^{-2}$, è

$$y = x - 10\ \frac{x^2}{{v_0}^2}.$$

L'impatto col suolo si ottiene annullando il primo membro di questa equazion, e scegliendo la soluzione in x diversa da zero che è

$$x_i = \frac{{v_0}^2}{10};$$

poichè $x_i = 250\ m$, abbiamo ${v_0}^2 = 2500\ m^2/s^2$, cioè

$$v_0 = 50\ m\ s^{-1}.$$

$$y = \sqrt{3}\ x - \frac{x^2}{80}.$$

il punto di impatto col suolo è l'intersezione della parabola con l'asse X, e quindi è caratterizzato dalla condizione $y = 0$; annullando il primo membro della relazione precedente, abbiamo

$$\sqrt{3}\ x - \frac{x^2}{80} = 0,$$

cioè

$$x\left(\sqrt{3}-\frac{x}{80}\right)=0.$$

L'equazione ammette due soluzioni; la prima, $x=0$, la scartiamo perchè non è altro che l'origine degli assi, cioè il punto di partenza, mentre la seconda è la soluzione del nostro problema:

$$x_i = 80\cdot\sqrt{3}\ m \approx 138.56\ m.$$

Esercizio 5): Un proiettile viene sparato con una velocità v_0, e con una inclinazione di 45°, e colpisce il bersaglio al suolo ad una distanza di 250 m. Calcolare v_0.
Soluzione: l'equazione (22) con $\theta = 45°$ (e quindi $tg\theta = 1\ ;\ \cos\theta = \sqrt{2}/2$), e con $g \approx 10\ m\ s^{-2}$, è

$$y = x - 10\ \frac{x^2}{{v_0}^2}.$$

L'impatto col suolo si ottiene annullando il primo membro di questa equazion, e scegliendo la soluzione in x diversa da zero che è

$$x_i = \frac{{v_0}^2}{10};$$

poichè $x_i = 250\ m$, abbiamo ${v_0}^2 = 2500\ m^2/s^2$, cioè

$$v_0 = 50\ m\ s^{-1}.$$