- LEZIONE 10 DEL CORSO DI FISICA PER INFORMATICA - A.A. 2006/2007

Silvio De Siena

1 Alcuni elementi di Elettromagnetismo (parte II)

1.1 Il potenziale Elettrostatico

Spesso il campo elettrico, essendo un campo vettoriale, non è comodo da usare. È utile allora introdurre un *campo scalare* che prende il nome di *potenziale elettrostatico*. Per campo scalare si intende semplicemente una funzione del punto nello spazio (e quindi funzione delle tre coordinate x, y, z) che non possiede quindi direzione o verso.

In realtà, la possibilità di introdurre il potenziale è legata al fatto che si può dimostrare che la forza $\vec{E} = q\ \vec{E}$ generata su una carica q dal campo elettrostatico $\vec{E}$ è una *forza conservativa*. Non dimostreremo questo fatto. Tuttavia ricordiamo che una forza conservativa compie un lavoro tra due punti A e B che non dipende dal particolare percorso che congiunge i due punti, ma solo da A e B. Ricordiamo inoltre che questo permette di definire una differenza $U_A - U_B$ di energia potenziale tra i due punti, e che questa differenza rappresenta proprio il lavoro fatto dalla forza per spostare un corpo da A a B (cambiato di segno). Ora, se la forza è dovuta ad un campo elettrostatico, sposta le cariche. Allora il potenziale elettrostatico sarà l'energia potenziale (cambiata di segno) divisa per la carica q che viene spostata; quindi, la differenza di potenziale sarà la differenza di energia potenziale (cambiata di segno) divisa per la carica q che viene spostata: Equivalentemente, la differenza di potenziale sarà uguale al lavoro fatto dalla forza elettrostatica diviso per la carica q che viene spostata.

Comunque, qui preferiamo definire il potenziale come quella funzione "la cui derivata spaziale è connessa al campo elettrico".L'ultima frase va meglio definita. Consideriamo per semplicità il campo elettrico di una carica puntiforme dato dalla relazione (**??**), e scriviamone la sola intensità (senza la parte vettoriale):

$$E(r) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}.$$

Ora vediamo che la funzione

$$f(r) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r} \tag{1}$$

soddisfa alla proprietà che

$$E(r) = -\frac{df(r)}{dr};$$

infatti, se derivo $f(r)$ rispetto a r e cambio di segno ho

$$-\frac{df(r)}{dr} = -\frac{d(\frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r})}{dr} = -\frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{d(\frac{1}{r})}{dr}$$

$$= -\frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r^2}\right] = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r^2} \equiv E(r).$$

D'altra parte, sappiamo che la derivata di una costante C è nulla: $dC/dr = 0$. Allora, abbiamo che $E(r)$ è anche dato da

$$E(r) = -\frac{d(f(r)+C)}{dr} = -\frac{df(r)}{dr} - \frac{dC}{dr} = -\frac{dV(r)}{dr}.$$

Se chiamiamo *potenziale elettrostatico di una carica puntiforme* la funzione

$$V(r) = f(r) + C \equiv \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r} + C \tag{2}$$

dove C è una *costante arbitraria*, vediamo che conoscere il potenziale equivale a conoscere il campo elettrostatico perchè basta fare una derivata.

Ora, peró vediamo come possiamo scegliere una particolare costante C che sia "comoda": se mandiamo r all'infinito, vediamo che la funzione $f(r)$ tende a zero. Abbiamo allora, dalla (2)

$$\lim_{r\to\infty} V(r) \equiv V(\infty) = C\ . \tag{3}$$

Quindi: *la costante arbitraria C che compare nel potenziale elettrostatico di una carica puntiforme rappresenta il valore del potenziale a distanza infinita dalla carica.* Ne segue che *se fissiamo a zero il potenziale elettrostatico a distanza infinita della carica abbiamo $C = 0$.* In questo caso il potenziale elettrostatico di una carica puntiforme è dato dalla funzione $f(r)$, cioè

$$V(r) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r}\,. \tag{4}$$

C'è però un problema. Infatti, qualsiasi quantità che sia definita a meno di una costante arbitraria *non può essere una quantità fisica*; infatti, non ne possiamo misurare il valore che dipende da una C arbitraria e quindi è arbitrario. Tuttavia, *una differenza di potenziale non dipende dalla costante arbitraria C*; infatti, consideriamo due punti P_1 e P_2 a distanze dalla carica r_1 ed r_2, rispettivamente. Allora il potenziale in P_1 sarà

$$V(r_1) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r_1} + C,$$

mentre il potenziale in P_2 sarà

$$V(r_2) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r_2} + C,$$

e la differenza di potenziale $V(r_2) - V(r_1)$ sarà chiaramente

$$V(r_2) - V(r_1) = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_2} - \frac{Q}{r_1}\right],$$

indipendente dalla costante arbitraria C. Quindi: *una differenza di potenziale è una quantità fisica misurabile.*

Da quanto accennato all'inizio, la differenza di potenziale tra i due punti P_1 e P_2 calcolata precedentemente, moltiplicata per la carica, rappresenta il lavoro fatto dalla forza elettrica dovuta $\vec{F} = q\,\vec{E}$ per spostare la carica dal primo al secondo punto.

Il potenziale, che abbiamo introdotto per una carica puntiforme, può essere definito per *qualsiasi* distribuzione di carica e, quindi, per qualsiasi campo elettrostatico: per esempio, per un campo dovuto a più cariche puntiformi, o dovuto a distribuzioni continue di carica associate a densità superficiali o volumiche. Diamo allora la definizione generale di potenziale associato ad un campo qualsiasi $\vec{E}$. Per fare questo, però, è necessario prima illustrare il concetto di *derivata parziale di una funzione.*

Data una funzione $f(x, y, z)$ delle tre variabili spaziali x, y, z, otteniamo *derivata parziale della funzione f rispetto a x* come *derivando f rispetto a x e trattando le altre due variabili y e z come costanti.* Per far capire la cosa, consideriamo la funzione

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Eseguiamo la derivata parziale di g rispetto a x, che indichiamo con

$$\frac{\partial g}{\partial x};$$

dovendo considerare y e z come costanti, anche $y^2 + z^2$ sarà una costante, e quindi la sua derivata rispetto a x sarà nulla:

$$\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} = 0.$$

Allora la la derivata parziale rispetto a x darà

$$\frac{\partial g}{\partial x} \equiv \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + 0;$$

poichè la derivata parziale di x^2, che non dipende da y e da z, coincide ovviamente con la normale derivata di x^2, ed è quindi uguale a $2\,x$, abbiamo

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x} = 2\,x.$$

Adesso possiamo definire il collegamento tra un campo elettrostatico generico $\vec{E}(x, y, z)$ ed il potenziale $V(x, y, z)$ ad esso associato:

Le componenti lungo gli assi X, Y, Z del vettore campo elettrico $\vec{E}$ sono date, rispettivamente, dalla derivata parziale rispetto a x del potenziale cambiata di segno, dalla derivata parziale rispetto a y del potenziale cambiata di segno, dalla derivata parziale rispetto a z del potenziale cambiata di segno.

Quindi abbiamo

$$\vec{E} \equiv (E_x, E_y, E_z) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right), \tag{5}$$

oppure, equivalentemente,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ , \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ , \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ . \tag{10}$$

Come ulteriore esempio, facciamo vedere che questa relazione, applicata al potenziale della carica puntiforme (4), dà le tre componenti del campo elettrico della stessa carica puntiforme. Per fare questo conto dobbiamo però calcolare prima l'espressione delle tre componenti del campo elettrico. Ricordiamo che l'espressione del campo elettrico della carica puntiforme è

$$\vec{E} = \frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{Q}{r^2}\ \hat{r};$$

per poter procedere al conto, però, dobbiamo prima ricordare l'espressione del versore $\hat{r}$ che è

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r},$$

dove r denota il modulo del vettore $\vec{r}$. Adesso, ricordando che le componenti di $\vec{r}$ lungo gli assi sono

$$\vec{r} \equiv (x, y, z),$$

abbiamo quindi che le tre componenti di $\hat{r}$ sono

$$\hat{r} \equiv \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right);$$

di conseguenza le tre componenti del campo sono

$$(*)\ \vec{E} \equiv \left(\frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{Q}{r^3}\ x, \frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{Q}{r^3}\ y, \frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{Q}{r^3}\ z \right).$$

Adesso, per procedere con la verifica della (10) dobbiamo scrivere esplicitamente il modulo di $\hat{r} = r$ in termini di x, y, z; ricordando che il modulo di un vettore è la radice quadrata delle sue componenti, abbiamo

$$(**)\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ora eseguiremo la derivata parziale rispetto a x del potenziale (4), e mostreremo che tale derivata, cambiata di segno, è uguale alla prima componente x del campo elettrico la cui espressione abbiamo calcolato nella equazione $*$ contenuta sopra. Per eseguire la derivata dobbiamo usare la regola di derivazione delle funzioni composte; infatti, il potenziale V è funzione di r, che a sua volta è funzione di x, y, z. Abbiamo

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}.$$

Calcoliamo la prima derivata:

$$()\ \frac{dV}{dr} = \frac{Q}{4\ \pi\ \epsilon_0} \frac{d(\frac{1}{r})}{dr}$$

$$= \frac{Q}{4\ \pi\ \epsilon_0} \left[\frac{-1}{r^2} \right] = -\frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

Calcoliamo poi la seconda derivata:

$$\frac{\partial r}{\partial x} \equiv \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x};$$

anche qui dobbiamo usare la regola di derivazione delle funzioni composte, perchè dobbiamo derivare la radice rispetto a tutto il suo argomento $x^2 + y^2 + z^2$, e poi eseguire la derivata parziale dell'argomento rispetto a x:

$$\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2\ x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ricordando che $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$, possiamo scrivere

$$() \; \frac{\partial r}{\partial x} \equiv \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{r}.$$

Moltiplicando tra loro le derivate e e cambiando poi il segno, si ottiene la componente x del campo (vedi Eq. $*$); le altre due componenti si ricavano nello stesso modo.

Si noti che la relazione (10) ci dice che un potenziale costante genera un campo elettrico nullo, perchè le derivate di una costante rispetto a qualsiasi coordinata è zero. Usando questa informazione abbiamo:

la presenza di un campo elettrico diverso da zero in una regione di spazio genera una differenza di potenziale diversa da zero tra due punti diversi della regione,

e

se il campo elettrico è nullo in una regione di spazio, in quella regione il potenziale è costante.

D'altra parte, questo fatto non ci meraviglia perchè la differenza di potenziale, come abbiamo accennato prima, non è altro che il lavoro fatto dalla forza elettrostatica diviso per la carica, e la forza diviso la carica dà il campo elettrico.

Concludiamo introducendo l'unità di misura del potenziale. Dalla relazione tra campo e potenziale vediamo che il potenziale è il rapporto tra un campo elettrico e una lunghezza, quindi $[V] = [E\ l^{-1}]$; allora, poichè il campo ha le dimensioni di forza diviso carica, abbiamo

$$[V] = [E\ l] = [F\ q^{-1}\ l]. \tag{11}$$

Nel sistema MKSQ abbiamo allora che il potenziale si può misurare in Newton diviso per il prodotto di un Coulomb per un metro. Tuttavia, si preferisce introdurre per il potenziale un'unità di misura apposita, chiamata *Volt* (che indicheremo con V). Per definire il Volt ricordiamo che abbiamo detto che la differenza di potenziale moltiplicata per la carica è uguale al lavoro fatto per spostare la carica; allora diamo la seguente definizione:

un Volt è la differenza di potenziale che moltiplicata per la carica di un Coulomb dà un lavoro pari ad un Joule.

In formula: $1V = 1C \cdot 1J$. Avendo definito il Volt, si preferisce poi esprimere in termini di questa quantità anche il campo elettrico. Le dimensioni del campo elettrico, come abbiamo visto sono quelle di potenziale diviso lunghezza, in MKSQ abbiamo che il campo si può misurare in Volt diviso metri (V/m). Da ora in poi adotteremo queste unità.

1.2 Capacità, condensatore

Capacità di un conduttore isolato

Consideriamo un conduttore isolato di forma qualsiasi. Abbiamo visto in precedenza che in un conduttore in condizioni elettrostatiche:
1) il campo elettrico nell'interno del conduttore è zero,

2) le cariche si dispongono sulla superficie,

3) il campo elettrico sulla superficie non è nullo, ma è perpendicolare alla superficie in ogni punto.

Dal punto 1), e dal fatto che abbiamo visto che un campo nullo corrisponde ad un potenziale costante, abbiamo:

in condizioni elettrostatiche all'interno di un conduttore il potenziale è costante, cioè il potenziale assume lo stesso valore in tutti i punti all'interno di un conduttore.

In realtà, anche sulla superficie del conduttore il potenziale deve essere costante; infatti, se il potenziale avesse due valori diversi in due punti della superficie del conduttore allora la differenza di potenziale, e quindi il campo elettrico non nullo tangente alla superficie, così creatasi farebbe muovere le cariche lungo la superficie del conduttore, contraddicendo le in condizioni elettrostatiche. D'altra parte, il potenziale non può essere diverso in un punto all'interno rispetto ad un punto sulla superficie; infatti, siccome i punti interni possono essere arbitrariamente vicini alla superficie, se il potenziale all'interno fosse diverso da quello sulla superficie allora, come funzione delle coordinate x, y, z, dovrebbe fare un brusco salto, cioè non potrebbe essere una funzione *continua.* Ma noi sappiamo che una funzione discontinua in un punto in quel punto non possiede derivata; quindi, il campo elettrico, che è definito tramite derivate del potenziale, non potrebbe essere definito in alcuni punti, il che non è possibile dal punto di vista fisico. A questo punto, poichè abbiamo concluso che sia all'interno del conduttore che sulla sua superficie il potenziale è costante, possiamo affermare che:

in condizioni elettrostatiche il potenziale assume lo stesso valore in tutti i punti di un conduttore.

Possiamo quindi parlare ora di *potenziale di un conduttore*, intendendo con questo il valore comune che il potenziale assume in tutti i punti del conduttore.

Adesso consideriamo un conduttore caricato con una carica totale Q, e che possiede un potenziale V. Ci domandiamo: che relazione cè tra la carica Q e il potenziale V? Dall'espressione (2) del potenziale della carica puntiforme vediamo che, almeno in questo caso, la carica e il potenziale sono *proporzionali*; si può però verificare che questo fatto *vale in generale, per qualsiasi distribuzione di carica.* Allora, anche per un conduttore Q e V sono proporzionali; quindi, il loro rapporto non potrà dipendere dai loro particolari valori, perchè se raddoppia la carica raddoppia anche il potenziale, se triplica la carica triplica anche il potenziale ecc., e quindi il rapporto non cambia. Sembra quindi naturale definire la *capacità* C di un conduttore proprio come il rapporto tra carica e potenziale

$$C \doteq \frac{Q}{V}. \tag{12}$$

Possiamo affermare che:

la capacità di un conduttore non dipende nè dalla carica nè dal potenziale del conduttore, ma solo dalla sua forma e dalle sue dimensioni.

L'unità di misura della capacità si ricava dalla sua definizione (12): $1C/1V$. Come al solito, si preferisce dare un nome apposito, *Farad* (simbolo: F), a questa unità; definiamo quindi il Farad come:

$$1\ F \doteq \frac{1\ C}{1\ V}, \tag{13}$$

Il problema ora è che abbiamo visto che il Coulomb è una carica troppo grande; e sappiamo che il Volt è invece una differenza di potenziale abbastanza piccola (infatti, la tensione in ogni casa è 220 V). Ci aspettiamo quindi che il rapporto tra queste due quantità sia *troppo grande*. Per verificare questo fatto, calcoliamo esplicitamente la capacitš di un conduttore *sferico* di raggio R. Sappiamo che la carica è distribuita sulla superficie che, in questo caso, è una sfera. Sappiamo anche che, per simmetria, la densità superficiale di carica σ sarà *costante*. Ancora, sappiamo che il valore del potenziale è lo stesso in ogni punto del potenziale; quindi, per calcolare il potenziale del conduttore ci conviene scegliere il punto più "conveniente", che è quello equidistante da tutti i punti della superficie, cioè il centro del conduttore sferica. Per calcolare il potenziale nel centro usiamo la solita tecnica: dividiamo la superficie della sfera in N "piccolissime" superfici ΔS_i $(i = 1, ..., N)$; su ogni superficie sarà concentrata una carica "elementare"

$$\Delta q_i = \sigma \, \Delta S_i$$

che può essere considerata puntiforme. Abbiamo quindi N cariche puntiformi $\Delta q_i \quad , \quad i = 1, ..., N$, e dobbiamo calcolare il potenziale generato da queste cariche nel centro del conduttore sferico. Poichè tutte le cariche Δq_i, stando sulla superficie, hanno la stessa distanza R dal centro della sfera, il potenziale V_i generato da ciascuna di esse è dato da

$$V_i = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{\Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{\sigma \Delta S_i}{R}.$$

Ovviamente, il potenziale totale generato dalle N cariche è la somma di tutti i potenziali V_i, e quindi

$$\begin{aligned} V = \sum_{i=1,\dots,N} V_i &= \sum_{i=1,\dots,N} \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{\sigma \Delta S_i}{R} \\ &= \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{\sigma}{R} \sum_{i=1,\dots,N} \Delta S_i, \end{aligned}$$

dove abbiamo portato fuori dalla sommatoria le quantità costanti. Poichè, ovviamente, la somma $\sum_{i=1,\dots,N} \Delta S_i$ di tutte le superfici elementari dà la superficie totale della sfera S $(= 4\,\pi\, R^2)$, e il prodotto della densità di carica costante σ per la superficie totale S dà la carica totale Q, abbiamo

$$V = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{\sigma\, S}{R} = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{R}.$$

Adesso possiamo calcolare la capacità:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\ \frac{Q}{R}} = 4\,\pi\,\epsilon_0\ R. \tag{14}$$

Essendo il raggio l'unica caratteristica geometrica del conduttore sferico, la sua capacità non può che dipendere solo da R.

Per mostrare che il Farad è troppo grande, andiamo a calcolare quanto deve essere il raggio del conduttore per ottenere questa capacità; imponiamo quindi

$$4\,\pi\,\epsilon_0\ R = 1\ F,$$

e ricaviamo R mettendo anche i valori numerici di π e di ϵ_0:

$$R = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \approx 10^{10}\ m.$$

Quindi, per ottenere una sfera della capacità di un Farad, il raggio deve essere di dieci miliardi di metri, cioè dieci milioni di chilometri!. Allora, la capacità di un conduttore sferico "ragionevole" (con raggio che va dal centimetro al metro) dovrà essere da $10-12$ a $10-10$ volte più piccola del Farad. Si introducono quindi le seguenti capacità:

- il *picofarad* pF con valore $1\ pF = 10-12\ F$;

- il *nanofarad* nF con valore $1\ nF = 10-9\ F$;

- il *microfarad* μF con valore $1\ \mu F = 10-6\ F$.

Si noti che per arrivare ad un microfarad un conduttore sferico non va bene, perch'e dovrebbe avere un raggio di $10^{-4}\ m$ (un decimo di millimetro). Peró vedremo tra poco che possiamo costruire sistemi che permettono di ottenere capacità più elevate: i *condensatori*.

Il fenomeno dell'induzione elettrostatica

Supponiamo di avere due conduttori, e supponiamo che sul primo conduttore ci sia una carica positiva, mentre il secondo conduttore sia scarico. In realtà, il secondo conduttore apparirà scarico perchè le cariche microscopiche a livello atomico (elettroni, carica del nucleo) saranno "mischiate" in modo tale che a livello macroscopico la carica risulterà nulla. Supponiamo ora di avvicinare i due conduttori. Allora, la carica del primo conduttore eserciterà la forza di Coulomb sulle cariche microscopiche del secondo conduttore; avendo supposto positiva la carica del primo conduttore, essa attirerà le cariche negative (gli elettroni), e respingerà le cariche positive (quelle dei nuclei) del secondo conduttore. Poichè nei conduttori le cariche si possono spostare, le cariche negative si sposteranno verso il primo conduttore, e si fermeranno sulla superficie del secondo conduttore più vicina al primo conduttore. Le cariche positive dovrebbero spostarsi verso la parte più lontana dal primo conduttore; si può mostrare però che nei conduttori si spostano solo una parte delle cariche negative (elettroni di conduzione. Tuttavia, essendosi spostatialcuni elettroni dalla parte più lontana a quella più vicina, nella parte più lontana si crea un difetto di carica negativa, e quindi una carica positiva. In conclusione, avvicinando un conduttore carico positivamente ad un altro conduttore inizialmente scarico, quest'ultimo acquista una carica negativa sulla parte della sua superficie più vicina al primo conduttore, ed una carica positiva sulla parte della sua superficie più lontana dal primo conduttore

Se il primo conduttore (quello carico) ha invece una carica negativa, questa respingerà gli elettroni di conduzione del secondo conduttore verso la superficie più lontana; si creerà allora una carica negativa sulla superficie più lontana, e conseguentemente una carica positiva su quella più vicina.

Possiamo quindi affermare che:

avvicinando un conduttore carico ad un conduttore scarico, su quest'ultimo verrà a crearsi una carica di segno opposto a quella del primo conduttore sulla superficie più vicina a quest'ultimo, ed una carica dello stesso segno del primo conduttore sulla superficie più lontana.

Questo fenomeno prende il nome di *induzione elettrostatica*, e le due cariche sulle superfici del secondo conduttore prendono il nome di *cariche indotte*. Naturalmente, le due cariche indotte (positiva e negativa) sono uguali in modulo, perchè la loro somma deve essere nulla; infatti, essendo il conduttore scarico all'inizio, ed essendoci stata solo una semplice separazione delle cariche, anche dopo la carica totale deve rimanere nulla.

Ci si può domandare quanto valgono le cariche indotte; il problema è che il loro valore dipende dalla forma dei due conduttori e dalla loro disposizione relatia nello spazio. È quindi molto complicato, in generale, calcolare questo valore. Vedremo però tra poco che in un caso particolare, ma importante, questo calcolo è possibile.

Strato e doppio strato

Consideriamo un conduttore che sia un parallelepipedo (una "lastra") che abbia come base un quadrato di lato L, e spessore pari a d. Supponiamo ora di caricare il conduttore; la carica si distribuirà allora sulle superfici di base quadrate di lato L, e sulle quattro superfici laterali che sono quadrati di base L e altezza d.

Supponiamo ora che sia soddisfatta la condizione

$$d << L,$$

cioè che lo spessore del conduttore sia sostanzialmente trascurabile rispetto al lato delle sue basi. Allora possiamo considerare il conduttore come una "sfoglia" o *strato*, di forma quadrata, di spessore nullo, e dotato di carica su entrambi i lati della sua superficie. La distibuzione di carica del conduttore genererà ovviamente un campo elettrico nei punti dello spazio ad esso circostanti. Ora noi ricorriamo ad un'altra approssimazione. Supponiamo, infatti, di considerare un punto P vicino al conduttore, che stia sulla retta perpendicolare al conduttore e passante per il centro del quadrato di base ("asse" del conduttore). Supponiamo poi anche che la distanza δ del punto P dal conduttore sia molto piccola rispetto al lato L del conduttore:

$$\delta << L.$$

Allora, possiamo approssimare il conduttore con un piano; praticamente, possiamo considerare L di lunghezza "infinita". Chiameremo questo sistema *strato piano* (carico). In realtà, questa approssimazione è ancora valida anche per punti dello spazio, sempre a distanza molto piccola, ma che non stiano proprio sull'asse, purchè però siano abbastanza lontani dal bordo del conduttore.

Se abbiamo uno strato piano, possiamo calcolare esattamente il campo elettrostatico generato dalla distribuzione di carica. Innanzitutto, lacarica è distribuita sulla superficie dello strato; quindi, avremo una densità superficiale di carica. D'altra parte, essendo lo strato infinito, per *simmetria* la densità di carica, che indicheremo con *sigma*, dovrà essere *costante*.

Adesso vediamo come la simmetria di strato piano infinito ci permetta di avere alcune indicazioni anche sul campo elettrico generato. Supponiamo che lo strato sia disposto in verticale. Poniamo un osservatore in un punto posto di fronte allo strato ad una certa "quota"; poi spostiamo, senza che se ne accorga, l'osservatore in un altro punto che stia dalla stessa parte dello strato del primo punto (per sempio a sinistra), sia alla stessa distanza dallo strato del primo punto, ma ad una "quota" diversa da quella del primo punto (cioè più in basso o più in alto). Poichè lo strato in tutte e due i punti si estende all'infinito in tutte le direzioni, e la densità di carica è costante, l'osservatore non è in grado di distinguere i due punti. Questo rimane vero anche se il secondo punto è spostato i una direzione qualsiasi (anche non in verticale) rispetto al secondo punto. Allora, anche la quantità fisica associata al sistema, cioè il campo elettrico, deve essere tale da non permettere di distinguere due qualsiasi punti. Sicuramente allora il modulo del campo deve essere lo stesso in qualsiasi punto. Inoltre, non è difficile capire che la direzione del campo deve essere *perpendicolare* allo strato in ogni punto. Infatti, dato un punto, dividiamo lo strato in tante superfici elementari uguali tra loro, e indichiamo il loro valore comune con ΔS. Le superfici uguali conterrano cariche elementari, praticamente puntiformi, il cui valore comune è dato da $\Delta q = \sigma \; \Delta S$. Allora il punto P è in presenza di tante cariche puntiformi uguali di valore Δq poste sullo strato. Supponiamo ora di chiamare Q la proiezione perpendicolare sullo strato di P, e di fissare una retta sullo strato che passi per Q; allora, per ogni carica puntiforme di valore Δq che stia su questa retta ad una certa distanza da Q esiste un'altra carica puntiforme dello stesso valore che sta sulla retta dalla parte opposta dalla prima carica rispetto a Q, ed alla stessa distanza della prima carica da Q. Si vede subito che la somma vettoriale dei due campi elementari generati dalle due cariche conserva solo la componente lungo la direzione perpendicolare allo strato perchè le componenti parallele allo strato dei caaampi delle due cariche sono uguali in modulo ma opposte in verso, e quindi si elidono. Poichè il campo totale è la somma di tutti i campi elementari, e poichè possiamo eseguire la somma per coppie di cariche del tipo appena considerato, sopravvive solo un campo perpendicolare allo strato.

Adesso facciamo un'altra considerazione. Consideriamo due punti, il primo posto a sinistra dello strato, il secondo posto a destra. È chiaro che i due punti vedono esattamente la stessa distribuzione di carica e, di conseguenza, il campo deve avere lo stesso modulo sui due punti, oltre ovviamente ad avere direzione perpendicolare allo strato.

In conclusione abbiamo che il modulo del campo deve essere uniforme, deve avere lo stesso valore a destra ed a sinistra dello strato, e che la direzione del campo deve essere perpendicolare allo strato. Ci rimane da discutere il verso.

IL verso del campo elettrico generato da una carica Q in un punto P si ottiene nel modo seguente. Supponiamo di mettere nel punto P una *carica di prova positiva* q; allora, il verso del campo elettrico generato dalla carica Q in P è uguale al verso della forza che Q esercita sulla carica di prova q. Quindi, se Q è positiva respinge q (che è anch'essa positiva), e quindi il verso del campo è quello che si allontana da Q; se Q è negativa attrae q, e quindi il verso del acmpo è quello che va verso Q.

Adesso torniamo allo strato e supponiamo, per fissare le idee, che la carica sullo strato sia positiva. Allora, se consideriamo un punto a sinistra dello strato, il verso del campo, secondo il nostro criterio, deve essere quello che si allontana dallo strato, e quindi la freccetta del campo punta verso *sinistra*. Se ora, invece, consideriamo un punto a destra dello strato, il verso del campo deve ancora essere quello che si allontana dallo strato e, quindi, la freccetta del campo punta verso *destra*. In conclusione, il verso del campo elettrico nei punti a destra dello strato deve essere *opposto* al verso del campo elettrico nei punti a destra dello strato.

Adesso, se la carica sullo strato è negativa, allora il verso del campo nei punti a sinistra dello strato dve essere quello che si avvicina allo strato, e quindi la freccetta del campo punta verso *destra*. IL verso del campo nei punti a destra dello strato deve ancora essere quello che si avvicina allo strato e, quindi, la freccetta del campo punta verso *sinistra*. Anche in questo caso i versi a destra e a sinistra dello strato devono essere opposti,

Ricapitolando, possiamo allora affermare che:

il campo elettrico generato da uno strato piano carico ed infinito ha lo stesso modulo costante in tutti i punti a destra e a sinistra dello strato, ha direzione perpendicolare allo strato in ogni punto, ed ha versi opposti a destra e a sinistra dello strato.

Adesso non ci rimane che calcolare il modulo del campo generato dallo strato. A questo scopo useremo il Teorema di Gauss applicato ad una superficie chiusa "elementare" di forma cilindrica vedi l'ultimo argomento della

Lezione 9). consideriamo allora una superficie chiusa elementare ΔS_c costituita da un cilindretto di basi ΔS_1 e ΔS_2, e da una superficie laterale ΔS_L. Scegliamo le basi *parallele allo strato*, e disposte una a sinistra dello strato (ΔS_1) e una a destra delo strato (ΔS_2). Essendo le superfici di base parallele allo strato, la superficie ΔS_L risulterà perpendicolare allo strato; essa poi "ritaglierà" sullo strato una superficie ΔS_σ *che avrà la stessa area delle due superfici di base*. Applichiamo il teorema di Gauss alla superficie del cilindretto, ottenendo

$$\Delta\Phi_\Delta S_c = \frac{\Delta q_{tot}}{\epsilon_0},$$

dove $\Delta\Phi_\Delta S_c$ indica il flusso totale (elementare) atttraverso la superficie ΔS_c del cilindretto, e $Deltaq_{tot}$ è la carica totale (elementare) racchiusa nel cilindretto. Calcoliamo innanzitutto $\Delta\Phi_\Delta S_c$; alla fine della Lezione 9 abbiamo visto che

$$\Delta\Phi_{\Delta c} = \vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1\, |\Delta S_1| + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2\, |\Delta S_2| + \vec{E}_L \cdot \hat{n}_L\, |\Delta S_L|,$$

dove $|\Delta S_1|, |\Delta S_2|, |\Delta S_L|$ indicano le aree delle tre superfici. Denotiamo ora con ΔA l'area comune delle tre superfici ΔS_1, ΔS_2 ($|\Delta S_1| = |\Delta S_2| = \Delta A$), ΔS_σ; dnotiamo poi con E il modulo del campo elettrico in un punto vicino allo strato, valore che abbiamo visto essere lo stesso sia a sinistra che a destra dello strato, e quindi sia sui punti di ΔS_1 che sui punti di ΔS_2: $|E_1| = |E_2| = E$. Adesso esaminiamo le direzioni ed i versi dei vettori $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$, e dei versori $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$ delle due basi. Supponiamo, per fissare le idee, che la densità di carica sullo strato sia positiva; abbiamo allora visto che il campo elettrico a sinistra dello strato (cioè $\vec{E}_1$) ha verso che punta a sinistra, mentre il campo elettrico a destra dello strato (cioè $\vec{E}_2$) ha verso che punta a destra. Ambedue i campi sono perpendicolari allo strato. D'altra parte i versori $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$, essendo perpendicolari alle basi che, a loro volta, sono parallele allo strato, risultano anch'essi perpendicolari allo strato; di conseguenza la loro direzione è parallela a quella di $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$. Per quanto riguarda i versi di $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$, secondo la nostra convenzione devono essere tali che i versori puntano verso l'esterno della superficie chiusa; quindi, $\hat{n}_1$ ha verso che punta a sinistra, ed $\hat{n}_2$ ha verso che punta a destra. Confrontando versi e direzioni dei vettori abbiamo allora la seguente situazione:

- il vettore $\vec{E}_1$ e il versore $\hat{n}_1$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso (puntano verso sinistra);

- il vettore $\vec{E}_2$ e il versore $\hat{n}_2$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso (puntano verso destra).

Abbiamo quindi

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 = |\vec{E}_1| \cdot |\hat{n}_1| \cdot \cos\ 0^\circ = |\vec{E}_1| = E,$$

$$\vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 = |\vec{E}_2| \cdot |\hat{n}_2| \cdot \cos\ 0^\circ = |\vec{E}_2| = E.$$

Ricordando poi che $|\Delta S_1| = |\Delta S_2| = \Delta A$, abbiamo che il flusso totale attraverso le due basi è

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1\ |\Delta S_1| + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2\ |\Delta S_2| = E \cdot \Delta A + E \cdot \Delta A = 2\ E \cdot \Delta A.$$

Riamne da calcolare il flusso $\vec{E}_L \cdot \hat{n}_L\ |\Delta S_L|$ attraverso la superficie laterale; ma abbiamo visto che la direzione del campo sia a destra che a sinistra è perpendicolare allo strato, e quindi è *parallela* alla superficie S_L (essendo quest'ultima anch'essa perpendicolare allo strato. Quindi, il flusso attraverso la superficie laterale del campo è *nullo*:

$$\vec{E}_L \cdot \hat{n}_L\ |\Delta S_L| = 0.$$

Il flusso totale è allora

$$\Delta\Phi_{\Delta c} = 2\ E \cdot \Delta A.$$

Adesso calcoliamo la carica totale interna Δq_{tot}. Poichè la carica è concentrata sulla superficie dello strato, la carica interna al cilindro è quella che sta sulla superficie ΔS_σ ritagliata dal cilindretto sulla superficie dello strato; tale carica ovviamente vale (ricordando che anche l'area di ΔS_σ é uguale a ΔA)

$$\Delta q_{tot} = \sigma \cdot |\Delta S_\sigma| = \sigma \cdot \Delta A.$$

A questo punto possiamo uguagliare i due membri del teorema di Gauss:

$$2\ E \cdot \Delta = \sigma \cdot \Delta A,$$

cioè, dividendo ambedue i membri per ΔA,

$$2\ E = \sigma.$$

Da questa relazione otteniamo che il modulo del campo elettrico dello strato (sia a sinistra che a destra) vale

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{15}$$

Esercizio 1): Calcolare il modulo del campo elettrostatico di uno strato piano di densità superficiale di carica $\sigma = 2 \cdot 10^{-6}\ C\ m^{-2}$.
Soluzione: Il modulo del campo è

$$E = \frac{\sigma}{2\ \epsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8.859 \cdot 10^{-12}}\ V/m \approx 0.11 \cdot 10^{6}\ V/m.$$

Esercizio 2): Calcolare la densità superficiale di carica di uno strato piano che genera un campo elettrostatico di modulo $E = 0.5 \cdot 10^5\ V/m$.
Soluzione: Ricavando la sensità abbiamo

$$\sigma = 2 \cdot \epsilon_0 \cdot E = 2 \cdot 8.859 \cdot 10^{-12} \cdot 0.5 \cdot 10^5 = 8.859 \cdot 10^{-7}\ C\ m^{-2}.$$

Esercizio 3): Una lastra di lato $L = 1\ m$ e dello spessore $d = 0.3\ mm$ è caricato con una carica totale $Q = 4 \cdot 10^{-5}\ C$. Calcolare il modulo del campo elettrostatico generato dalla lastra sul suo asse a distanza $\delta = 2\ mm$.
Soluzione: Lo spessore d della lastra è trascurabile rispetto al lato, quindi la lastra si può approsimare con una sfoglia di spessore nullo. Inoltre, la distanza δ soddisfa la condizione $\delta << L$; quindi la sfoglia si può approsimare con uno strato piano (infinito). Per calcolare il campo dobbiamo prima calcolare la densità superficiale di carica dello strato. La superficie della lastra è

$$S = L^2 = 1\ m^2;$$

allora

$$\sigma = \frac{Q}{S} = 4 \cdot 10^{-5}\ C/m^2.$$

Il modulo del campo elettrostatico è

$$E = \frac{\sigma}{2\ \epsilon_0} = \frac{4 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 8.859 \cdot 10^{-12}}\ V/m \approx 0.45 \cdot 10^7\ V/m.$$

Adesso passiamo a considerare due conduttori quadrati di lato L e di spessore trascurabile d; supponiamo che i due conduttori siano tra loro paralleli e indichiamo con δ la distanza costante tra loro.

Supponiamo, per fissare le idee che il primo conduttore sia posto a destra del secondo conduttore, e supponiamo di caricare positivamente il primo conduttore; allora esso, per il fenomeno dell'induzione elettrostatica, indurrà sul secondo conduttore una carica negativa nella parte ad esso più vicina (la base dellla seconda lastra conduttrice che affaccia verso il primo conduttore), ed una carica positiva nella parte ad esso più lontana (la base dellla seconda lastra conduttrice più lontana dal primo conduttore). È possibile inoltre fare in modo che la carica positiva che si trova sulla faccia esterna del secondo conduttore (quello sul quale la carica è stata indotta) venga eliminata scaricandola con un filo conduttore; analogamente può essere scaricata la carica sulla faccia esterna del primo conduttore. Le cariche rimaste sono quindi positiva per il primo conduttore e negativa per il secondo conduttore.

Adesso supponiamo che sia soddisfatta la condizione

$$\delta << L;$$

allora sicuramente ogni punto che si trova tra i due conduttori ha distanza da ambedue minore di delta, e quindi possiamo approssimare i due conduttori con due strati piani infiniti tra loro paralleli. Sappiamo che ognuno di questi strati ha densità superficiale di carica costante; uno (quello inducente) ha densità di carica positiva, l'altro (quello che subisce l'induzione) ha densità di carica negativa. D'altra parte, essendo gli strati infiniti e tra loro paralleli, *per simmetria le due densità di carica devono essere uguali in modulo, e opposte in segno.* Quindi, se indichiamo con σ la densità di carica dello strato caricato positivamente, $-\sigma$ è la densità di carica dello strato caricato negativamente. In questo caso diciamo che abbiamo realizzato una condizione di *induzione totale.*

Questo dispositivo realizza il dispositivo che prende il nome di *condensatore piano*.

Adesso, per i nostri scopi, dobbiamo calcolare il campo elettrostatico generato dal doppio strato piano. Si noti che i due strati piani paralleli dividono lo spazio in tre zone: due zone esterne (una a sinistra del secondo strato, una a destra del primo strato) che chiameremo *zona 1* e *zona 3*, ed una zona interna compresa tra i due strati che chiameremo *zona 2*. Sappiamo, dalla discussione sul singolo strato che ambedue gli strati generano in ogni punto un campo elettrico costante, con lo stesso modulo per tutti e due, modulo pari al modulo dela carica diviso la costante dielettrica del vuoto ($E = \sigma/(2\ \epsilon_0)$). Il verso del campo, però dipende dal segno della densit'a di carica. Il campo totale in ogni punto è uguale alla somma vettoriale dei due campi; quindi, se in un punto i due campi hanno verso concorde, poichè il modulo di ognuno dei due è pari a E, il camo totale sarà uguale a $2\ E = 2 \cdot [\sigma/(2\ \epsilon_0)] = \sigma/\epsilon_0$. Se invece i due campi hanno verso opposto il campo totale sarà $E - E = 0$, cioè nullo.

Adesso esaminiamo i versi dei due campi nelle tre regioni. Un punto della regione 1 sta a sisnistra rispetto ad ambedue gli strati. Abbiamo già visto che lo strato caricato positivamente genera nei punti alla sua sinistra un campo la cui "freccetta" punta verso *sinistra*, prechè la carica positiva dello strato tende a respingere e quindi ad *allontanare verso sinistra* una carica di prova positiva posta alla sua sinistra. Lo strato negativo, invece, tende ad attrarre e quindi ad *avvicinare* una carica positiva di prova posta nel punto: se questa carica di prova è posta in un punto a sinistra dello strato, per farla avvicinare allo strato il campo elettrico deve avere la "freccetta" rivolta verso *destra*. Ne concludiamo che nella regione 1 i due campi generati dagli strato ahnno tra loro verso *opposto*: quindi, il campo totale nella regione 1 è *nullo*. Con un ragionamento simile si può mostrare che anche nell'altra regione esterna 3 il campo è nullo. Vediamo invece cosa succede nella regione interna 2 tra i due strati. Un punto nella regione 2 sarà a sinistra del primo strato (caricato positivamente), e a destra del secondo strato (caricato negativamente). Nei punti a sinistro dello strato positivo, come abbiamo visto, la freccetta del campo da questo generato punta verso sinistra; nei punti a destra dello strato negativo la carica negativa attira la carica di prova positiva verso sinistra, e quindi il campo generato dallo strato negativo avrà anch'esso la freccetta che punta verso sinistra. Quindi, nella zona due i due campi generati dai due strati hanno verso concorde, e quindi il campo totale avrà modulo dato, come detto prima, da

$$E_{ds} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \ . \tag{16}$$

Inoltre, sappiamo che la direzione di questo campo, come quello dei due campi che lo compongono, è perpendicolare alle superfici degli strati; il verso è quello che va dallo strato positivo allo strato negativo.

Riassumendo, possiamo affermare:

un doppio strato genera al suo interno un campo elettrico uniforme, diretto perpendicolarmente agli strati, con verso che va dallo strato positivo allo strato negativo, e di modulo pari a σ/ϵ_0. Nelle regioni ad esso esterne un doppio strato genera un campo elettrico nullo.

Il condensatore piano

Abbiamo già detto che il doppio strato realizza un *condensatore piano*; di fatto quindi un condensatore piano si realizza con due lastre quadrate di spessore trascurabile, poste a distanza molto piccola rispetto alla lunghezza del lato delle lastre, e che si trovano in una condizione di induzione totale.

Ma qual'è l'utilità di un condensatore? La risposta a questa domanda è che un condensatore è un dispositivo in grado di aumentare di molto la capacità di immagazzinare carica rispetto ad un conduttore isolato. Il concetto è che nella definizione di capacità il potenziale del conduttore compare al denominatore; quindi, se si riesce ad estendere la definizione di capacità sostituendo nel denominatore il potenziale del singolo conduttore con qualche quantità più *piccola*, la capacità aumenta. Nel condensatore, avendo a disposizione due conduttori con carica opposta invece di un solo conduttore, possiamo sostituire il potenziale del singolo conduttore con la *differenza di potenziale tra i due conduttori* che sicuramente è più piccola contenendo una sottrazione.

Definiamo allora la capacità di un condensatore:

la capacità C di un condensatore è pari alla carica totale Q concentrata sullo strato positivo divisa per la differenza di potenziale $\Delta V = V_1 - V_2$ tra i punti dello strato carico negativamente e quelli dello strato carico positivamente.

In formula

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \ . \tag{17}$$

Nella definizione V_1 denota il potenziale dello strato negativo, e V_2 denota il potenziale dello strato positivo. Si noti anche, prima di procedere ulteriormente, che le cariche totali sui due strati sono il prodotto del modulo densità superficiale di carica per la superficie delle piastre; essendo le densità di carica uguali in modulo, ed essendo uguali le superfici delle due piastre, le due cariche totali sugli strati sono uguali in modulo. La carica totale sullo strato positivo rappresenta allora questo modulo.

Avendo a disposizione la definizione (17) di capacità di un condensatore, vogliamo ora calcolarla per un condensatore piano. Innanzitutto, dobbiamo calcolare la differenza di potenziale ΔV. Essendo il campo elettrico costante tra i due strati, questo conto è semplice. Infatti, innanzitutto la direzione del campo è costante (perpendicolare alle piastre); quindi, se scegliamo un sistema di riferimento con l'asse X coincidente con questa direzione, il campo avrà solo la componente E_x (le altre componenti saranno nulle). Scegliamo poi l'origine dell'asse X sullo strato caricato negativamente (quello che sta a sinistra). Allora vediamo che la coordinata lungo X del secondo strato sarà pari alla distanza δ tra gli strati. Adesso ricorriamo alla relazione (10) che lega campo e potenziale. Naturalmente, essendo diversa da zero, a causa dela nostra scelta di riferimento, solo E_x, ci serve solo la prima delle tre relazioni che riscriviamo scambiando i membri, e scambiandone il segno

$$(*)\ \frac{dV}{dx} = -E_x.$$

Qui abbiamo sostituito la derivata parziale con quella totale perchè sopravvive solo la variabile x.

Il campo è costante; quindi, a parte il segno, il problema è quello di trovare una funzione la cui derivata prima sia costante. Ma abbiamo già visto, nell'ambito della cinematica, che *la funzione che ha derivata costante rispetto ad una variabile è un polinomio del primo ordine rispetto alla variabile*. Infatti, se consideriamo $P_1(x) = K\ x + K^{'}$ (dove K e $K^{'}$ sono due costanti) abbiamo

$$\frac{dP_1(x)}{dx} = K + 0 = K,$$

cioè la derivata prima di P_1 è la costante K. Quindi $f(x) = P_1(x) = K\ x + K^{'}$ (con $K^{'}$ arbitraria) è la soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{df(x)}{dx} = K.$$

Notiamo che l'Eq.(*) è proprio di questa forma, con $f(x) = V(x)$ e $K = -E_x$; allora la soluzione della (*) è

$$(**)\ V(x) = -E_x\, x + K^{'}$$

con $K^{'}$ costante arbitraria.

Adesso noi sappiamo che E_x coincide proprio col campo all'interno dello strato. Il modulo di questo campo è σ/ϵ_0; il suo verso va dallo strato positivo a quello negativo, e quindi *da destra verso sinistra*. Ma il nostro asse X è orientato dallo strato negativo a quello positivo, e quindi *da sinistra verso destra*. Il verso del campo è quindi *opposto* a quello dell'asse X; allora, il campo avrà sgno negativo e sarà dato da

$$E_x = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

sostituendo questo valore nella (**), otteniamo per il potenziale la soluzione

$$(***)\ V(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, x + K^{'}.$$

Noi però dobbiamo calcolare la differenza di potenziale tra i due strati; nella differenza, come già sappiamo, la costante arbitraria $K^{'}$ scompare. Inoltre, poichè il potenziale dipende linearmente da x, l'incremento ΔV del potenziale dipende linearmente dall'incremento Δx di x:

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, \Delta x.$$

Nel nostro caso Δx è l'incremento di x quando ci si sposta dallo strato negativo a quello positivo, cioè nient'altro che la distanza δ tra i due strati:

$$\Delta x = \delta.$$

Allora la differenza di potenziale ΔV vale

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, \delta.$$

Adesso procediamo a calcolare la capacità (17). La carica totale Q è uguale alla densità di carica σ moltiplicata per la superficie S delle piastre (che ovviamente è approssimata con un piano infinito solo per il calcolo del campo):

$$Q = \sigma\ S.$$

Sostituendo questa espressione e quella della differenza di potenziale nell'Eq. (17) otteniamo infine la capacità del condensatore piano:

$$C = \frac{\sigma\ S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0}\ \delta} = \sigma\ S \cdot \frac{\epsilon_0}{\sigma\ \delta} = \epsilon_0\ \frac{S}{\delta}\ . \tag{18}$$

Qui si vedono due cose. La prima è che la capacità del condensatore, dipende solo, come deve essere, dalle caratteristiche geometriche del condensatore (superficie delle piastre e distanza tra loro), e dal mezzo tra le piastre (costante dielettricadel vuoto). La seconda è che costruendo le piastre con superficie grande e distanza piccola la capacità può essere sensibilmente più grande di quella di un condensatore isolato.

Facciamo un esempio numerico. Supponiamo di costruire un condensatore con piastre di lato $L = 20\ cm$, e distanza $\delta = 1\ mm$. Trasformiamo tutto in metri: $L = 2 \cdot 10^{-1}\ m$, $\delta = 10^{-3}\ m$. Calcoliamo la superficie delle piastre: $S = 4 \cdot 10^{-2}\ m^2$. Adesso, ricordando che $\epsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12}$, abbiamo

$$C = 8.859 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-2}}{10^{-3}}\ F \approx 35.4 \cdot 10^{-9}\ F \equiv 35.4\ nF.$$

In realtà, come si vede, il condensatore piano con dentro il vuoto non migliora di molto la capacità rispetto al conduttore isolato. Supponiamo però di inserire tra le piastre un isolante diverso dal vuoto. è chiaro che quello che deve cambiare nella (18) deve essere la costante dielettrica che tiene conto del mezzo. Infatti, un isolante generico è caratterizzato da una costante dielettrica ϵ che è sempre *più grande* di quella del vuoto:

$$\epsilon > \epsilon_0.$$

Se inseriamo un isolante di costante dielettrica ϵ nel condensatore piano la capacità diventa

$$C = \epsilon\ \frac{S}{\delta}\ . \tag{19}$$

Per alcuni isolanti, poi, la costante ϵ può essere *molto* più grande di quella del vuoto, e questo aumenta sensibilmente la capacità. Inoltre, se si usa un materiale isolante lo spessore δ può essere notevolmente diminuito (perchè, a diiferenza del vuoto, un materiale impedisce comunque alle piastre di venire a contatto). Addirittura, si possono usare come mezzo isolante delle vernici che possono essere spalmate sulle piastre, e permettono spessori piccolissimi. Con questi metodi si può aumentare la capacità fino all'ordine dei microfarad.

Esercizio 4): Calcolare la costante dielettrica ϵ di un mezzo isolante posto tra le piastre di un condensatore piano, sapendo che piastre del condensatore hanno area $S = 4 \cdot 10^{-2}\ m^2$, la distanza tra le piastre è $\delta = 0.4\ mm$, e la capacità è $C = 0.6\mu F$.
Soluzione: Dalla (19) abbiamo

$$\epsilon = C \cdot \frac{\delta}{S} = 6 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-2}}\ C/(N\ m^2) = 6 \cdot 10^{-9}\ C/(N\ m^2).$$

2 Definizione di corrente elettrica e alcuni circuiti elettrici

La corrente elettrica.

Finora abbiamo studiato sistemi nei quali le cariche rimenevano in quiete (sistemi elettrostatici). Ora vogliamo studiare alcuni sistemi nei quali le cariche si mettono in moto. Al fenomeno delle cariche in movimento si usa dare il nome di *corrente elettrica*. Tuttavia, noi sappiamo che in fisica ogni quantità deve essere debitamente definita. Inoltre, noi vogliamo formulare una *legge fisica* che, come sempre, colleghi una quantità ("causa") ad un'altra quantità che della prima costituisce l'"effetto". Ora, noi sappiamo che le cariche possono muoversi solo nei conduttori, e solo se soggette ad un *campo elettrico* diverso da zero o, equivalentemente, se soggette ad una *differenza di potenziale* diversa da zero; noi preferiamo usare quest'ultima invece del campo elettrico.

Quindi: *la differenza di potenziale è la causa del moto delle cariche.*

Dobbiamo ora definire l'effetto del moto delle cariche, e naturalmente questo effetto deve esere definito sulla scala macroscopica e non su quella microscopica. Questo effetto prenderà il nome di *intensità di corrente*, e lo definiremo come sempre in stretta analogia coi fluidi.

L'intensità di corrente *va definita in riferimento ad una specifica superficie prefissata* S. Infatti, l'intensità di corrente si definisce nel modo seguente:

data una superficie S *all'interno di un conduttore, l'intensità di corrente attraverso* S *si ottiene misurando la quantità di carica* Δq *che attraversa* S *in un intervallo di tempo* Δt *"arbitrariamente piccolo" , e dividendo poi la carica* Δq *per il tempo* Δt.

Si noti l'analogia con la portata di un fluido. Naturalmente, la specificazione "arbitrariamente piccolo" va intesa come il solito limite *fisico* per Δt che "tende a zero". Quindi abbiamo, indicando con i_S l'intensità di corrente attraverso S, che

$$i_S \doteq \text{"} \lim_{\Delta t \to 0} \text{"} \frac{\Delta q}{\Delta t}|_S \equiv \frac{dq}{dt}|_S \ . \tag{20}$$

Qui abbiamo indicato con il simbolo " $\lim_{\Delta t \to 0}$ " che il limite, dal punto di vista della misura, è un limite fisico; abbiamo indicato con il simbolo "$|_S$" che l'incremento di carica va calcolato attraverso S; e abbiamo usato il fatto che il limite (matematico) del rapposto incrementale dà la derivata.

Vediamo, come sempre quali sono le dimensioni fisiche dell'intensità di corrente:

$$[i_S] = [q \ t^{-1}],$$

e in MKSQ si misura quindi in Coulomb diviso secondi. Come al solito, anche in questo caso si preferisce definire un'unità di misura specifica: l'*Ampere* (simbolo: A), definito come

$$1A \doteq \frac{1C}{1s}.$$

Un Ampere è un'intensità di corrente ragionevole ma già piuttosto elevata dal punto di vista della sicurezza.

Per poter stabilire la legge che connette la causa con l'effetto, dobbiamo però specificare le condizioni geometriche e fisiche nelle quali ci mettiamo; infatti, a diverse condizioni corrisponderanno leggi diverse.

Fili e circuiti elettrici.

La forma dei conduttori nei quali si può generare corrente è, ovviamente, arbitraria. Però noi possiamo scegliere di costruire conduttori della forma che più ci conviene. I conduttori più diffusi sono quelli *filiformi* o *fili elettrici.*

Un filo elettrico è costituito da un conduttore di forma cilindrica, con sezione di raggio molto piccolo rispetto alla lunghezza del cilindro.

Poichè una differenza di potenziale posta ai capi del filo genera moto di cariche, nel filo viene a crearsi un'intensità di corrente. È possibile mostrare che in queste condizioni il moto delle cariche avviene parallelamente all'asse del filo, e l'intensità di corrente *non* dipende dalla particolare sezione del filo (si pensi per analogia ad un fluido spinto da un pistone in un tubo cilindrico). Possiamo quindi togliere il suffisso S all'intensità di corrente, e scivere semplicemente i; scriveremo anche

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{21}$$

senza suffissi.

Cominceremo, nel seguito, a considerare un tratto di filo; tuttavia, per poter effettivamente far circolare corrente permanentemente è necessario utilizzare un *circuito elettrico.* Un circuito elettrico, nei casi più semplici, è un circuito chiuso costituito da un filo elettrico nel quale vengono inseriti degli *elementi elettrici* e che, appunto, si richiude su se stesso. Anche quando considereremo un semplice tratto di filo, lo penseremo inserito in un circuito.

La legge di Ohm.

Adesso andremo a scrivere la legge che regola la circolazione di corrente. Abbiamo visto che la *causa* del movimento dele cariche è la differenza di potenziale, e che l'*effetto* è l'intensità di corrente. La legge che le connette è molto semplice: le due quantità sono proporzionali.

Consideriamo un tratto di filo elettrico cha va dal punto A al punto B, e supponimo che ai capi del filo sia posta una differenza di potenziale costante

$$\Delta V = V_B - V_A,$$

dove V_A denota il potenziale in A e V_B denota il potenziale in B. La differenza di potenziale genera una intensità di corrente costante i; la legge che connette ΔV e i prende il nome di *legge di Ohm*, e prende la forma:

$$\Delta V = R\, i\ . \tag{22}$$

Vediamo quindi che la differenza di potenziale è proporzionale all'intensità di corrente; la costante di proporzionalità R prende il nome di *resistenza elettrica* o, semplicemente, resistenza. La resistenza, come dice il nome, rappresenta l'"attrito" del mezzo che si oppone alla conduzione elettrica; essa dipende ovviamente solo dal conduttore, ed in particolare dal tipo di materiale da cui è costituito e dalle sue dimensioni geometriche. Vediamone le dimensioni fisiche:

$$[R] = [V \cdot i^{-1}].$$

Nel sistema MKSQ le dimensioni di una resistenza sono quelle di Volt su Ampere; come al solito, si preferisce definire un'unità di misura apposita che prende il nome di *Ohm* (simbolo Ω):

$$1\ \Omega = \frac{1\ V}{1\ A}.$$

Abbiamo detto che la resistenza dipende dalle cratteristiche del conduttore; per un conduttore cilindrico, che è quello che stiamo considerando, si ha che *la resistenza di un conduttore cilindrico di lunghezza l e sezione S è direttamente proporzionale a l e inversamente proporzionale a S.* Questa, che è nota come *seconda legge di Ohm*, si scrive:

$$R = \rho\ \frac{l}{S}. \tag{23}$$

La costante di proporzionalità ρ dipende solo dal materiale di cui è costituito il conduttore, e prende il nome di *resistività*; essa ci dice se un conduttore è meglio di un altro perchè una più bassa resistività comporta una maggiore capacità di far circolare corrente e quindi un miglior conduttore (per esempio il rame ha bassa resistività ed è un ottimo conduttore, spesso usato per fili elettrici).

Come notazione finale, osserviamo che la relazione (22) continua a valere qualsiasi sia il modo con cui si è instaurata la differenza di potenziale, ed anche se questa dipende dal tempo; in quest'ultimo caso anche l'intensità di corrente dipenderà dal tempo. Potremo scrivere quindi la it legge di Ohm generalizzata:

$$\Delta V(t) = R\ i(t)\ . \tag{24}$$

Esercizio 5): Calcolare l'intensità di corrente che attraversa una resistenza $R = 300\ \Omega$ se viene applicta una differenza di potenziale $\Delta V = 220\ V$.
Soluzione: Abbiamo

$$i = \frac{V}{R} = \frac{220}{400}\ A = 0.55\ A.$$

Resistenze in serie

Supponiamo ora di avere due resistenze R_1 e R_2. R_1 è la resistenza di un tratto di conduttore posto tra i punti A e B, mentre R_2 è la resistenza di un tratto di conduttore posto tra i punti B e C; in questo caso si dice che le due resistenze sono *in serie*. Naturalmente, siccome i due tratti AB e BC costituiscono un *unico* conduttore, in AB (e quindi in R_1) e in BC (e quindi in R_2) fluisce la *stessa* corrente che indichiamo con i. Ci domaniamo: quanto deve valere una resistenza R, che chiameremo *resistenza equivalente*, che, posta tra i punti A e C in sostituzione delle prime due, produce la stessa intensità di corrente del primo dispositivo? Per trovare R abbiamo a disposizione la legge di Ohm (22); la scriviamo per il tratto AB con la resistenza R_1, per il tratto BC con la resistenza R_2, e per per il tratto AC con la resistenza R. Definiamo $\Delta V_{AB} \doteq V_B - V_A$, $\Delta V_{BC} \doteq V_C - V_B$ e $\Delta V_{AC} \doteq V_C - V_A$; abbiamo allora:

$$a)\ \Delta V_{AB} = R_1\, i,$$

$$b)\ \Delta V_{BC} = R_2\, i,$$

$$c)\ \Delta V_{AC} = R\, i.$$

Si noti che la terza relazione costituisce la *definizione* della resistenza equivalente R. Poichè $\Delta V_{AB} + \Delta V_{BC} \equiv V_B - V_A + V_C - V_B = V_C - V_A \equiv DeltaV_{AC}$, sommando le relazioni a) e b) abbiamo

$$\Delta V_{AC} = (R_1 + R_2)\, i;$$

questa relaione e la relazione c) hanno lo stesso primo membro, e quindi possiamo uguagliare i secondi membri ottenendo

$$(R_1 + R_2)\, i = R\, i,$$

cioè

$$R = R_1 + R_2\ , \tag{25}$$

Quindi: *la resistenza equivalente di due resistenze in serie è la somma delle resistenze.* Questo argomento, ovviamente, si può estendere ad un numero qualsiasi di resistenze in serie: *la resistenza equivalente di un qualsiasi numero di resistenze in serie è la somma delle resistenze.*

Circuiti e forza elettromotrice

Adesso affrontiamo il seguente problema: come facciamo a generare e poi mantenere stabilmente una corrente?

La risposta è che dobbiamo costruire un circuito *chiuso*, e poi inserire nel circuito un dispositivo che fornisca energia per far muovere stabilmente le cariche e quindi generare corrente stabile. Qualsiasi dispositivo di questo tipo prende il nome di *generatore*. Il più semplice circuito è costituito dunque da un conduttore di forma chiusa nel quale viene inserito un generatore; il circuito quindi possiede due elementi, il generatore e la resistenza del conduttore. Per far circolare corrente il generatore deve fornire una differenza di potenziale, che chiameremo *forza elettromotrice o tensione* e indicheremo con f. In realtà, il generatore possiede anch'esso una resistenza, che chiamremo resistenza interna e denoteremo con r. Inserire un generatore in un circuito significherà quindi inserire una differenza di potenziale f (la forza elettromotrice) ed una resistenza r; questa sarà in serie con la resistenza R del circuito, e quindi la resistenza totale sarà $R+r$. Allora possiamo scrivere la legge di Ohm (22) con f al posto di ΔV_{AB} e $R+r$ al posto di R:

$$f = (R + r)\, i\ . \tag{26}$$

La corrente sarà quindi un po' più piccola di quella che avremmo ottenuto con la forza elettromotrice e la resistenza R; ne deduciamo che: *più bassa è la sua resistenza interna, migliore è il gneratore.*

Esempi di generatori sono: le pile, le centrali idroelettriche, le centrali termoelettriche ecc. Questi dispositivi trasformano in energia elettrica altri tipi di energia (energia chimica per le pile, energia gravitazionale per le centrali idroelettriche, energia termica per le centrali termoelettriche ecc.)

Una cosa interessante da osservare è che, poichè per muovere le cariche è necessario compiere lavoro, e le forze conservative compiono lavoro nullo lungo un circuito chiuso (come il nostro circuito elettrico) *le forze associate ad un generatore sono forze non conservative.*

Esercizio 6): Calcolare la resistenza interna r di un generatore, dotato di forza elettromotrice $f = 100\ V$, sapendo che se lo chiudiamo su una resistenza $R = 200\ \Omega$ genera un'intensità di corrente $i = 0.48\ A$.
Soluzione: Dall'Eq. (26) abbiamo

$$r\, i = f - R\, i,$$

da cui

$$r = \frac{f - R\, i}{i} = \frac{100 - 200 \cdot 0.48}{0.48} = \frac{4}{0.48}\ \Omega \approx 8\ \Omega.$$

Il Circuito RC

Consideriamo ora un circuito nel quale sia inserito un condensatore di capacità C e che abbia un interruttore; per definizione di capacità ($C = q/\Delta V$), la differenza di potenziale ai capi del condensatore è

$$\Delta V = \frac{q}{C}.$$

quando si chiude l'interruttore questa differenza di potenziale sarà posta ai capi della resistenza R del filo conduttore, e quindi comincerà a passare corrente (circuito RC). Vediamo però che in questo caso tensione e corrente dipenderanno dal tempo; vediamo infatti cosa succede. quando chiudiamo il circuito cominciano a muoversi le cariche; si sa che quelle che si muovono sono le cariche negative (gli elettroni). Allora, parte delle cariche che stanno sulla piastra negativa del condensatore si mettono in moto, passano per la resistenza del circuito e si portano sulla piastra positiva dove neutralizzano una quantità equivalente di carica positiva; quindi le cariche sulle piastre *diminuiscono.* Il processo si ripete, c'è un'altra diminuzione e così via, Quindi *la carica sulle piastre del condensatore dipende dal tempo (e decresce), e di conseguenza dipende dal tempo anche la differenza di potenziale.* Scriveremo allora

$$\Delta V(t) = \frac{q(t)}{C}.$$

Anche la corrente dipendrà, ovviamente, dal tempo; ci aspettiamo che sia *massima* all'istante iniziale (quando chiudiamo l'interruttore) e vada a zero (come la carica) per grandi tempi. Prima di procedere col conto analitico cerchiamo di ricavare la soluzione di questo problema semplicemente attraverso ragionamento fisico. Innanzitutto, ci aspettiamo che la carica o la corrente vadano a zero in un certo tempo caratteristico τ; ma per avere una scala di tempo (o di lunghezza o altro) caratteristica è noto che la funzione che descrive la quantità che varia (va a zero) in tale tempo caratteristico deve essere, a parte una costante, un *esponenziale* nel tempo con esponente negativo. D'altra parte, l'argomento dell'esponenziale deve essere adimensionale, come sappiamo, e quindi non potrà essere semplicemente il tempo t, ma il tempo t diviso un altro tempo che, ovviamente, dovrà essere il tempo caratteristico τ. Ci aspettiamo quindi che

$$q(t) = K\ e^{-t/\tau}\ \ ;\ \ i(t) = K^{'}\ e^{-t/\tau},$$

dove K, $K^{'}$ sono due costanti opportune. Vediamo che appena $t >> \tau$ l'esponenziale è praticamente nullo. Ma qual'è il tempo caratteristico τ di un circuito RC? Possiamo capirlo facendo un'analisi dimensionale; dobbiamo infatti esaminare quali quantità abbiamo a disposizione, e qual'è la loro combinazione che ha le dimensioni di un tempo. Le quantità abbiamo a disposizione sono ovviamente R e C. Le loro dimensioni sono

$$[R] = [V \cdot i^{-1}] \equiv [V \cdot q^{-1} \cdot t]$$

e

$$[C] = [q \cdot V^{-1}].$$

Vediamo che moltiplicando R per C abbiamo

$$[RC] = [V \cdot q^{-1} \cdot t] \cdot q \cdot V^{-1}] = t,$$

cioè proprio le dimensioni di un tempo. Quindi, il tempo caratteristico, a parte costanti numeriche, deve essere proprio RC.

Adesso procediamo a fare il conto analitico. Scriviamo la legge di Ohm generalizzata (24) con al primo membro la differenza di potenziale del condensatore:

$$-\frac{q(t)}{C} = R\, i(t)\ , \tag{27}$$

dove il segno meno tiene conto del fatto che la corrente viene generata *spese* della diminuzione della differenza di potenziale. Sostituiamo nell'equazione la definizione di intensità di corrente $i(t) = dq(t)/dt$:

$$-\frac{q(t)}{C} = R\, \frac{dq(t)}{dt}\ ; \tag{28}$$

adesso dividiamo i due membri per R e ricaviamo $dq(t)/dt$ ottenendo:

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{q(t)}{RC}\ . \tag{29}$$

abbiamo quindi un'equazione differenziale del primo ordine che si risollve facilmente; infatti, la soluzione deve essere una funzione del tempo la cui derivata, a parte la costante $-1/(RC)$, deve dare la funzione stessa, e sappiamo che questa funzione. a parte una costante, è l'esponenziale, con esponente dato dal tempo moltiplicato la costante $-1/(RC)$. Abbiamo quindi

$$q(t) = K\, e^{-t/RC}\ . \tag{30}$$

$\tau = RC$ è quindi proprio il tempo caratteristico del sistema. Adesso poniamo nell'Eq, (30) $t = 0$ in ambedue i membri, ottenendo:

$$q(0) = K;$$

come potevamo aspettarci, la costante è data dalla condizione iniziale, e la soluzione completa per la carica è

$$q(t) = q(0)\, e^{-t/RC}\ . \tag{31}$$

Possiamo ora anche ricavare l'intensità di corrente eseguendo la derivata di questa funzione (secondo la definizione

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{q(0)}{RC}\, e^{-t/RC}\ , \tag{32}$$

dove il egno meno esprime sempre il fatto che la corrente è a spese della differenza di potenziale.

A volte è utile riscrivere le soluzioni (31) e (32) in forma diversa. Dividiamo infatti ambedue i membri della (31) per $q(0)$ ottenendo

$$\frac{q(t)}{q(0)} = e^{-t/RC};$$

ora prendiamo il logaritmo naturale (cioè in base e) di ambedue i membri, e poichè il logritmo naturale di un esponenziale dà l'esponente, abbiamo

$$\ln\left[\frac{q(t)}{q(0)}\right] = -\frac{t}{RC} \ . \tag{33}$$

Possiamo ottenere un'equazione analoga partendo dalla (32). Innanzitutto però prendiamo il modulo di ambedue i membri ottenendo

$$|i(t)| = \frac{q(0)}{RC}\, e^{-t/RC} \ . \tag{34}$$

Poi dividiamo ambedue i membri per $q(0)/RC$:

$$\frac{RC}{q(0)}\, |i(t)| = e^{-t/RC} \ ; \tag{35}$$

ora prendiamo il logaritmo naturale di ambedue i membri e otteniamo

$$\ln\left[\frac{RC}{q(0)}\, |i(t)|\right] = -\frac{t}{RC} \ . \tag{36}$$

Esercizio 7): In un circuito RC la resistenza vale $R = 150\ \Omega$. Sapendo che la carica si riduce a $q(0)\ e^{-1}$ dopo $3 \cdot 10^{-4}\ s$, calcolare la capacità.
Soluzione: il tempo di $3 \cdot 10^{-4}\ s$ è proprio il tempo caratteristico $\tau = RC$; infatti, se poniamo $t = \tau$ nell'Eq. (31) abbiamo

$$q(t) = q(0)\ e^{-\tau/RC} = q(0)\ e^{-RC/RC} = q(0)\ e^{-1}.$$

Allora $\tau = RC = 3 \cdot 10^{-4}\ s$ e

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{150}\ F = 2\ \mu F.$$

Esercizio 8): In un circuito RC dopo 10^{-3} s la carica vale $0.6 \cdot 10^{-6}$ C, mentre la carica iniziale vale $q(0) = 2 \cdot 10^{-6}$ s. Calcolare la resistenza sapendo che la capacità vale 0.4 μF.
Soluzione: Ci conviene usare l'Eq. (33); inserendo in questa equazione $t = 10^{-3}$ s, $q(t) = 0.6 \cdot 10^{-6}$ C, $q(0) = 2 \cdot 10^{-6}$ s e $C = 4 \cdot 10^{-7}$ F abbiamo

$$\ln\left[\frac{0.6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6})}\right] = -\frac{10^{-3}}{4 \cdot 10^{-7} \cdot R},$$

cioè

$$-1.2 = -\frac{0.25 \cdot 10^{4}}{R},$$

e quindi

$$R = \frac{0.25 \cdot 10^{4}}{1.2}\ \Omega = 3000\ \Omega.$$

Esercizio 9): In un circuito RC il modulo della corrente iniziale vale $4 \cdot 10^{-3}$ A. Sapendo che dopo il tempo caratteristico $\tau = RC$ la carica vale $q(\tau) = 0.15 \cdot 10^{-6}$ C, calcolare il tempo caratteristico.
Soluzione: Abbiamo gi'a visto che dopo il tempo caratteristico $\tau = RC$ la carica è diventata

$$q(\tau) = q(0) \cdot e^{-1};$$

allora abbiamo

$$q(0) = q(\tau) \cdot e \approx 0.4 \cdot 10^{-6}\ C.$$

Poichè il modulo della corrente iniziale (vedi Eq. (35)) è $|i(0)| = \frac{q(0)}{RC} \equiv \frac{q(0)}{\tau}$, abbiamo

$$4 \cdot 10^{-3} = \frac{0.4 \cdot 10^{-6}}{\tau},$$

e quindi

$$\tau = \frac{0.4 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-3}} = \cdot 10^{-4}\ s.$$