LEZIONI DEL CORSO DI FISICA PER INFORMATICA - A.A. 2006/2007

Silvio De Siena

Abstract

Questi appunti riproducono essenzialmente i contenuti delle lezioni del corso di Fisica per Informatici da me tenute. È sempre opportuno non limitarsi, in fase di preparazione dell'esame, a leggere questi appunti, ma provvedere anche a consultare un testo di riferimento. In questo caso si consiglia di consultare, limitatamente agli argomenti svolti nel corso, i due volumi di *Halliday-Resnick*.

1 Metodo Scientifico e Grandezze Fisiche

1.1 Il Metodo Scientifico

La Fisica si propone di studiare qualsiasi sistema naturale: dal moto dei corpi celesti ai fenomeni che hanno luogo su scala microscopica, dall'attrazione tra due cariche agli effetti della luce, dal riscaldamento e raffreddamento di una sostanza ai meccanismi che regolano i fenomeni economici.

Per perseguire questo fine è necessario adottare quello che prende il nome di *Metodo Scientifico* che nel seguito cercheremo di illustrare per passi essenziali. È bene però puntualizzare che questi passi si possono certo elencare seguendo un filo logico, ma che nel procedimento effettivo si intrecciano tra loro attraverso ragionamenti induttivi e deduttivi.

- Il primo passo richiede di ben individuare e delimitare il fenomeno naturale che si desidera descrivere (per esempio, la caduta di un corpo da una torre, l'espansione di un gas in un recipiente, ecc.). E' molto importante che il fenomeno scelto venga descritto **nelle condizioni più semplici possibili**. Per illustrare questo punto, che è molto delicato, ci serviremo dell'esempio del corpo che cade da una torre: che vuol dire in questo caso scegliere le condizioni più semplici possibili ? E' chiaro che se qualcuno sale su una torre e lascia cadere un corpo, la caduta, data la presenza dell'aria, assumerà aspetti complessi che dipenderanno dalla natura e dalla forma del corpo (una piuma cadrà in modo molto diverso da un pezzetto di piombo!), con ulteriori complicazioni nel caso di presenza di vento o di moti turbolenti. È bene allora mettersi nella condizione più semplice, che suppone l'assenza di aria. Questa condizione può essere realizzata in laboratorio; più semplicemente però il moto reale di qualsiasi corpo in queste condizioni può essere studiato anche in presenza di aria utilizzando corpi di alta densità (appunto, il piombo) e di dimensioni contenute, tali cioè da rendere l'influenza dell'aria irrilevante. Il moto in assenza di aria di una piuma seguirà allora sostanzialmente la stessa legge di questi corpi. Una volta studiato il fenomeno nelle condizioni più semplici, e quindi più *universali*, ci si potrà poi eventualmente porre il problema di studiare i casi più complessi.

- Il secondo passo richiede di individuare e definire le *grandezze fisiche* che sono necessarie a descrivere attraverso una specifica *legge fisica* il fenomeno naturale prescelto. Ci occuperemo più approfonditamente in seguito di mostrare come una grandezza fisica può essere definita attraverso un'*operazione di misura*, ed il significato di legge fisica. Qui vogliamo chiarire, sempre con l'esempio della caduta di un corpo da una torre, cosa vuol dire individuare le grandezze fisiche che sono necessarie a descrivere il fenomeno. Nel caso del nostro esempio abbiamo già eliminato l'aria ed i relativi parametri. Restano però, in principio, molte cause che possono influenzare il processo. Tuttavia, su base logica, molte possono essere scartate a priori. Per esempio, si potrebbe supporre che la caduta possa essere influenzata dalla nazionalità o dai rapporti di parentela della persona che lascia cadere il corpo: ma sembra ragionevole scartare questa ipotesi! Si può supporre invece che la caduta sia influenzata dalla massa del corpo; ma vedremo fra poco che questo non accade (sempre se l'aria è assente). Alla fine si arriva ad ipotizzare come causa del moto l'attrazione terrestre, descritta attraverso le opportune grandezze.

- Il terzo passo presuppone di ipotizzare una legge fisica formulata in termini delle grandezze individuate nel passo precedente, e di verificarne la validità tramite esperimenti di misura. Una legge fisica, come tutte le leggi, spesso collega le *cause* con gli *effetti*; ma può esprimere anche principi di *simmetria* e di *conservazione* di grandezze fisiche. La forma ipotizzata per la legge può essere "aggiustata" attraverso la verifica sperimentale. Ritornando a quanto detto in precedenza, si può dapprima ipotizzare che il moto di caduta di un corpo in assenza di aria dipenda, tra le altre cose dalla massa del corpo. Per verificare l'ipotesi si possono gettare dalla torre corpi di massa diversa e misurare il tempo di caduta. Poichè da questa misura risulta che il tempo è lo stesso per tutti i corpi, nella legge ipotizzata non può essere contenuta la massa. Alla fine, nel caso del corpo che cade si arriva a scrivere una legge che connette la *forza di attrazione terrestre* (la causa) con l'*accelerazione di gravità* (l'effetto), legge che può essere verificata sperimentalmente.

1.2 Il concetto di "stato" di un sistema

Uno degli scopi principali della Fisica è quello di acquisire *capacità di previsione*. Per esempio, per poter inviare razzi sulla luna negli anni '60 gli scienziati della NASA dovevano essere in grado di prevedere, e quindi di controllare, la traiettoria di un razzo lanciato dalla terra, e di calcolare i giusti valori dei parametri necessari a far in modo che il razzo arrivasse proprio sulla luna.

Più in generale, la Fisica deve essere in grado di definire lo *stato* del sistema studiato, stato definito come l'insieme delle grandezze fisiche il cui valore descrive completamente il sistema in un certo istante, e poi di calcolare l'*evoluzione* nel tempo di questo stato a partire da uno stato iniziale.

Vedremo successivamente degli esempi di realizzazione di questi concetti.

1.3 Misure e grandezze fisiche

Siamo ora pronti ad introdurre più in dettaglio il concetto di grandezza fisica.

Una grandezza fisica può essere definita solo in termini quantitativi, assegnando il modo nel quale se ne può eseguire una *misura*, cioè il modo di associare ad essa dei valori numerici. Una misura può essere *diretta o relativa* e *indiretta o assoluta*. Si esegue una misura diretta (relativa) quando si confronta la quantità da misurare con un campione convenzionalmente prescelto della stessa quantità; per esempio, posso misurare la lunghezza di un tavolo contando quante volte entra in questa lunghezza un centimetro. Questo ci porta a considerare che per eseguire una misura diretta è innanzitutto necessario introdurre un'*unità di misura*, che è, appunto, quel campione convenzionalmente prescelto della quantità da misurare (nel caso di lunghezze, possiamo scegliere i centimetri, i pollici, i metri ecc.). Una volta scelta un'unità di misura, il rapporto, espresso in termici numerici e specificando l'unità, costituisce la misura diretta; per esempio, la misura del tavolo è di 108 (che indica il valore numerico) *centimetri* (che indicano l'unità di misura). Questo tipo di misura può essere eseguito su tutte le grandezze fisiche che ci interessano, introducendo per ciascuna un'apposita unità di misura.

Potendo scegliere le unità di misura in modo sostanzialmente arbitrario, si rende necessario, per permettere la comunicazione dei dati e la ripetizione delle misure in modo congruente da parte di persone diverse, introdurre un *sistema di unità di misura*. Questo ci porta a descrivere il concetto di misura *indiretta (assoluta)*. La misura assoluta di una grandezza fisica viene espressa in termini delle grandezze che fanno parte di un sistema di unità di misura, e solo in casi particolari coincide con una misura relativa. Da quanto detto, risulta che un sistema di unitá di misura deve contenere il numero minimo di grandezze in termini delle quali si possono esprimere le dimensioni di tutte le altre possibili grandezze all'interno di un settore di fenomeni fisici. Per esempio, in questa prima parte considereremo i fenomeni meccanici; non è difficile capire che per descrivere tutte le grandezze fisiche ad essi associate basta definire un sistema di unità di misura contenente *tre grandezze fondamentali.*

Sistemi di unità di misura comunemente adottati.

I sistemi di unità di misura più comunemente adottati a livello internazionale sono *il sistema MKS*, *il sistema CGS*, e *il sistema Pratico* (adottato soprattutto dagli Ingegneri). Nei primi due sistemi le tre grandezze fisiche che si assumono come fondamentali sono *lunghezza, massa e tempo*; nel terzo sistema sono invece *lunghezza, forza e tempo.*

Il sistema MKS: in questo sistema le unità di misura sono: per la lunghezza *il metro* (simbolo: m), per la massa *il chilogrammo-massa* (simbolo: Kg), per il tempo *il secondo* (simbolo: s oppure sec).

Il sistema CGS: in questo sistema le unità di misura sono: per la lunghezza *il centimetrometro* (simbolo: cm), per la massa *il grammo-massa* (simbolo: g oppure gr), per il tempo *il secondo* (simbolo: s oppure sec).

Il sistema Pratico: in questo sistema le unità di misura sono: per la lunghezza *il metro* (simbolo: m), per la forza *il chilogrammo-peso* (definito come il chilogrammo-massa moltiplicato per l'accelerazione di gravità; simbolo: Kg), per il tempo *il secondo* (simbolo: s oppure sec).

D'ora in poi, una volta adottato un sistema di unità di misura, parleremo sempre di chilogrammo o grammo, senza specificare "-massa" o "-peso".

A questo punto possiamo capire con un esempio come funziona la misura assoluta. Supponiamo infatti di voler misurare la velocità di una macchina nel sistema MKS. Poiché (come vedremo meglio in seguito) la velocità si misura dividendo lo spazio percorso (cioè una *lunghezza*) per il *tempo* impiegato a percorrerlo, la velocità si esprime in *metri diviso secondi* o, in simboli, in $(\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1})$ (d'ora in poi ometteremo le parentesi ed il puntino).

È possibile, ora, che persone diverse usino sistemi di unità di misura diversi. Per potersi comunicare i rispettivi risultati é allora necessario *convertire* le unità di misura di un sistema in quelle dell'altro sistema, usando gli opportuni *fattori di conversione.* Un fattore di conversione è definito come il rapporto tra l'unità di misura di una grandezza nel primo sistema con l'unità di misura della stessa grandezza nel secondo sistema. Per esempio, il fattore di conversione delle lunghezze tra MKS e CGS è metro/centimetro = 100 (1 metro è 100 centimetri). Naturalmente, se dobbiamo convertire tra CGS e MKS abbiamo fattori di conversione inversi (centimetro/metro = $1/100 \equiv 10^{-2}$). Si noti che, nella vita comune, siamo anche abituati ad usare unità di misura che non fanno parte dei sistemi MKS o CGS, ma che sono multipli delle unità di misura di questi sistemi. Per esempio, parlando di una macchina in autostrada, tipicamente usiamo i *chilometri* (simbolo: km) per misurare lo spazio percorso, e le *ore* (simbolo: h) per misurare il tempo trascorso; misuriamo di conseguenza la velocità in "chilometri all'ora" (cioè, chilometri/ore; simbolo: km/h o $km\ h^{-1}$). Conoscendo però i fattori di conversione da chilometri a metri o a centimetri ($1km = 10^3 m = 10^5 cm$) e da ore a secondi ($1h = 3600s \equiv 3.6 \cdot 10^3 s$), possiamo convertire in MKS o CGS

Esercizio 1.1): Esprimere nel sistema CGS ed in km/h la velocità di $5m\ s^{-1}$. *Soluzione*: Il fattore di conversione da metri a centimetri è 100, mentre il fattore di conversione da secondi a secondi è ovviamente 1. Allora

$$5m\ s^{-1} = 5 \cdot \frac{100}{1} cm s^{-1} = 500\ cm\ s^{-1}.$$

Inoltre

$$5m\ s^{-1} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot (3.6 \cdot 10^3)\ km/h = 5 \cdot 3.6\ km/h = 18\ km/h,$$

dove abbiamo usato il fatto che i fattori di conversione da m a km, e da s a h, sono gli inversi di quelli da km a m, e da h a s.

Analisi dimensionale.

In generale, se Q indica una qualsiasi grandezza fisica (velocitá, forza, energia ...), ne possiamo fare l'*analisi dimensionale*, cioè esprimere le sue dimensioni fisiche in termini delle dimensioni fondamentali contenute nel sistema di unità di misura prescelto. Nei sistemi MKS e CGS, che saranno quelli adottati nel seguito, le dimensioni fondamentali sono lunghezza, massa e tempo. Indichiamo con il simbolo $[Q]$ le dimensioni della quantità prescelta (senza curarci del suo valore numerico). Allora, per ogni quantità (meccanica) possiamo sempre scrivere una relazione della forma

$$[Q] = [l^\alpha\ m^\beta\ t^\gamma], \tag{1}$$

dove con l, m, t abbiamo indicato le dimensioni di lunghezza, massa e tempo, e dove α, β, γ sono numeri che dipendono dalla quantitá $[Q]$. Per esempio, se v indica una velocità abbiamo

$$[v] = [l^1 \; m^0 \; t^{-1}] \equiv [l \; t^{-1}],$$

che leggiamo: "la velocità ha le dimensioni di una lunghezza per un tempo a meno uno". Se invece a indica un'accelerazione (che è una velocità diviso un tempo) scriviamo

$$[a] = [l^1 \; m^0 \; t^{-2}] \equiv [l \; t^{-2}],$$

che leggiamo: "l'accelerazione ha le dimensioni di una lunghezza per un tempo a meno due".

L'analisi dimensionale ha grandissima importanza, sia perché serve per verificare (almeno in parte) la correttezza di una relazione, sia perchè può suggerire leggi fisiche.

Esercizio 1.2): Trovare le dimensioni di β, γ, δ sapendo che vale la seguente relazione

$$x(t) = \beta t^2 + \gamma t + \delta,$$

dove $x(t)$ denota una distanza.

Soluzione: Poichè le dimensioni della quantità a primo membro della relazione devono essere uguali a quelle di tutte e tre le quantità a secondo membro, e poichè la quantità a primo membro è una lunghezza, dobbiamo imporre le seguenti tre condizioni

$$[l] = [\beta] \cdot [t^2],$$

$$[l] = [\gamma] \cdot [t],$$

$$[l] = [\delta].$$

La terza relazione ci dice quindi subito che δ ha le dimensioni di una lunghezza. Ricavando dalla prima e dalla seconda le dimensioni di β e di γ, rispettivamente, abbiamo

$$[\beta] = [l\ t^{-2}],$$

$$[\gamma] = [l\ t^{-1}].$$

Esercizio 1.3): Si consideri la seguente relazione

$$F = m\, v^2\, r\ +\ p\, S,$$

dove F, m, v, r, p, S denotano, rispettivamente, una forza, una massa, una velocità, una lunghezza, una pressione ed una superficie. Sapendo che le dimensioni di una forza sono quelle di una massa per un'accelerazione, e sapendo che la pressione è definita come il rapporto tra la forza che agisce su una superficie e la superficie stessa, trovare tramite analisi dimensionale l'errore contenuto nella relazione, e correggerlo.
Soluzione: Innanzitutto, ricordiamo che le dimensioni di un'accelerazione sono $[a] = [l\ t^{-2}]$, e che quindi quelle di una forza sono $[F] = [m\ l\ t^{-2}]$. Inoltre, dalla definizione di pressione (forza diviso superficie), il secondo termine a secondo membro della relazione ha proprio le dimensioni di una forza, cioè della quantità a primo membro, e quindi non è sbagliato. Analizziamo invece le dimensioni del primo termine a secondo membro:

$$[m\ v^2\ r] = [m\ (l\ t^{-1})^2\ l] \equiv [m\ l^2\ t^{-2}\ l] \equiv [m\ l^3\ t^{-2}].$$

È chiaro che queste non sono le dimensioni di una forza, e che la relazione giusta è

$$F = m\,\frac{v^2}{r}\ +\ p\, S.$$

Infatti, ora le dimensioni del primo termine a secondo membro sono

$$[m\ (v^2/r)] = [m\ (l\ t^{-1})^2\ l^{-1}] \equiv [m\ l^2\ t^{-2}\ l^{-1}] \equiv [m\ l\ t^{-2}].$$

Ora, facciamo cenno ad un'altra questione. Esistono infatti quelle che si chiamano *grandezze adimensionali*, che corrispondono al caso $\alpha = \beta = \gamma = 0$ nella relazione (1); un possibile esempio sono gli angoli. Una grandezza adimensionale si ottiene tipicamente come *rapporto tra due grandezze dimensionali aventi la stessa dimensione*. Per esempio, un angolo è definito come il rapporto tra l'arco di circonferenza da esso sotteso ed il raggio della circonferenza, cioè come rapporto tra due *lunghezze*.

Un punto molto importante è che alcune leggi sono descritte attraverso funzioni di una variabile, tipicamente nel nostro caso funzioni del tempo, che sono *non elementari*, come per esempio l'esponenziale o il coseno. Il punto è che ognuna di queste funzioni può essere *espansa in serie*, cioè espressa come somma infinita di potenze della variabile. Per esempio, l'esponenziale e^α è addirittura *definito da una serie* come

$$e^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \equiv 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6} + ...$$

Qui:

- il simbolo $\sum_{n=0}^{\infty}$ si legge "somma su tutti i numeri interi che vanno da 0 all'infinito", e la sua azione si ottiene scrivendo prima il termine che si ottiene scegliendo $n = 0$, sommando poi a questo il termine con $n = 1$, sommando poi ai primi due il termine con $n = 3$ ecc.

- il simbolo $n!$ si legge "n fattoriale"; esso è definito per ogni numero n intero positivo come $n! \doteq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$, e, per convenzione, è definito anche per $n = 0$ come $0! = 1$. Quindi, per esempio, $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, ecc.

Nell'ultimo membro della precedente relazione che definisce e^α abbiamo scritto esplicitamente i primi termini della serie per mostrare che, secondo questa definizione, a parte fattori numerici, si debbono sommare una costante ad α, al quadrato di α, al cubo di α ecc. Ora, se α avesse dimensioni fisiche *questo non sarebbe possibile*. Se, per esempio, le dimensioni di α fossero quelle di un tempo espresso in secondi, dovremmo sommare una costante ai secondi ai secondi al quadrato, e così via, ma non è possibile sommare tra loro grandezze che non siano *congruenti*, cioè che non abbiano la stessa dimensione fisica: le costanti possono essere sommate solo ad altre costanti, i secondi con i secondi, i secondi al quadrato con secondi al quadrato ecc. Ne consegue che l'argomento di funzioni non elementari, quindi espandibili in serie, *deve essere adimensionale*, cioè deve essere il rapporto di due grandezze con la stessa dimensionalità. Altre funzioni espandibili in serie che incontreremo nel seguito saranno seno e coseno. Naturalmente, l'esponenziale, il seno e i coseno, essendo somme di potenze di quantità adimensionali, sono anch'esse funzioni adimensionali.

Esercizio 1.4): Trovare le dimensioni di ω ed S nella relazione

$$\theta(t) = \frac{S}{R} \cos(\omega\, t),$$

dove $\theta(t)$ denota un angolo e R una lunghezza. (La relazione descrive il moto oscillatorio di un piccolo corpo che scivola in una conca semisferica. $\theta(t)$ indica l'angolo al tempo t tra il raggio che congiunge il centro della semisfera con la posizione del corpo, e la verticale passante per lo stesso centro; R indica il raggio della semisfera)
Soluzione: Per quanto detto prima, l'argomento del coseno deve essere adimensionale; quindi

$$[\omega\, t] = [l^0\, m^0\, t^0],$$

da cui ricaviamo le dimensioni di ω

$$[\omega] = [l^0\, m^0\, t^0] \cdot [t]^{-1} \equiv [l^0\, m^0\, t^0\, t^{-1}] = [t^{-1}].$$

Quindi, ω deve avere le dimensioni dell'inverso di un tempo, e in MKS o CGS si misura in s^{-1}. Passiamo ora alle dimensioni di S. Poichè nel primo membro della relazione compare un angolo, che è adimensionale, anche il secondo membro deve essere adimensionale; visto che il coseno è già adimensionale, ne consegue che anche il rapporto S/R deve essere adimensionale, e che quindi S deve avere le dimensioni di R, cioè di lunghezza ($[S] = [l]$). S si misurerà quindi in metri nel sistema MKS o in centimetri nel sistema CGS.

Esercizio 1.5): Trovare le dimensioni di τ ed m_0 nella relazione

$$m(t) = m_0\, e^{-t/\tau},$$

che descrive un tipico decadimento radioattivo, dove $m(t)$ è la massa dell'elemento dopo che è trascorso un tempo t dall'inizio del processo.
Soluzione: Poichè l'argomento dell'esponenziale $(-t/\tau)$ deve essere adimensionale, è chiaro che τ deve avere le stesse dimensioni di t, cioè di un tempo: $[\tau] = [t]$; τ si misura quindi, in MKS o CGS, in secondi. Essendo poi l'esponenziale esso stesso adimensionale, è chiaro che m_0 deve avere le stesse dimensioni di $m(t)$, cioè di una massa (m_0 rappresenta la massa iniziale

dell'elemento che poi si riduce per effetto del processo radioattivo); m_0 si misura quindi in chilogrammi (Kg) in MKS, ed in grammi (g) in CGS.

Altri esercizi

Esercizio 1.6): Tradurre nel sistema MKS l'accelerazione di $10^3\ cm\ s^{-2}$.

Esercizio 1.7): Tradurre nei sistemi MKS e CGS la velocità di 108 km/h.

Esercizio 1.8): Trovare l'errore dimensionale, e correggerlo, nella seguente relazione:

$$m\ v^2 = \frac{p}{R},$$

dove m è una massa, v una velocità, p una pressione e R una lunghezza (si veda l'esercizio 2) per le dimensioni della pressione).

Esercizio 1.9): Si consideri la seguente relazione:

$$\theta(r) = \lambda r_0 e^{-r/r_0},$$

dove $\theta(r)$ è un angolo e r una lunghezza. Trovare le dimensioni di λ ed r_0.

Esercizio 1.10): Si trovino le dimensioni di τ e K nella seguente relazione:

$$E = F\ v\ \tau + K v^2,$$

dove E è un'energia, F una forza e v una velocità, e sapendo che le dimensioni di un'energia sono $[E] = [m\ l^2\ t^{-2}]$ (per le dimensioni di una forza, si veda l'esercizio 2)).

Esercizio 1.11): Trovare l'errore, e correggerlo, nella relazione:

$$E = m\ v\ \frac{R^2}{T},$$

dove E è un'energia, v una velocità, R una lunghezza e T un tempo.

2 Richiami di trigonometria, grandezze scalari e grandezze vettoriali, sistemi di riferimento Cartesiani

2.1 Richiami sulle definizioni delle grandezze trigonometriche

Prima di affrontare gli argomenti di questa sezione, conviene richiamare alcune definizioni e concetti di tipo trigonometrico che saranno utilizzati in seguito.

Funzioni trigonometriche

Il seno ed il coseno

Si consideri un triangolo *rettangolo* (cioè un triangolo nel quale uno degli angoli è retto (cioè, vale 90 gradi o, equivalentemente, $\pi/2$ radianti) (vedi Fig. 1 allegata). Indichiamo con a l'ipotenusa (ed anche la sua lunghezza) e con b, c i due cateti (ed anche le relative lunghezze). Indichiamo poi con α l'angolo formato tra il cateto b e l'ipotenusa, e con β l'angolo formato tra il cateto c e l'ipotenusa (ovviamente, b e c formano tra loro un angolo retto). Diciamo allora che l'angolo α è *adiacente* al cateto b ed è *opposto* al cateto c, mentre l'angolo β è *adiacente* al cateto c ed è *opposto* al cateto b.

Allora, definiamo il seno ed il coseno di un angolo nel modo seguente.

- Il *seno* di un angolo θ (simbolo: $\sin\theta$) è calcolato considerando un qualsiasi triangolo rettangolo che abbia θ come uno degli angoli, ed eseguendo il rapporto tra la lunghezza del cateto (del triangolo rettangolo scelto) che è opposto a θ, e l'ipotenusa dello stesso triangolo rettangolo.

- Il *coseno* di un angolo θ (simbolo: $\cos\theta$) è dato considerando un qualsiasi triangolo rettangolo che abbia θ come uno degli angoli ed eseguendo il rapporto tra il cateto (del triangolo rettangolo scelto) che è adiacente a θ, e l'ipotenusa dello stesso triangolo rettangolo.

In base a queste definizioni, se ci rifacciamo al triangolo rettangolo considerato all'inizio, di lati a, b, c e con angoli α (adiacente a b, opposto a c), β

(adiacente a c, opposto a b), allora abbiamo:

$$\sin\alpha \doteq \frac{c}{a}\ ,\ \sin\beta \doteq \frac{b}{a}\ ,\ \cos\alpha \doteq \frac{b}{a}\ ,\ \cos\beta \doteq \frac{c}{a}\ . \tag{2}$$

Nota importante: la proiezione di un segmento su una retta. Questo sarà un concetto che useremo spesso in seguito, e quindi è bene trattarlo preliminarmente. Se abbiamo un segmento di lunghezza L che ha il suo punto iniziale A su una retta e forma un angolo θ con la retta stessa, la proiezione di questo segmento sulla retta data si ottiene tracciando, a partire dal punto finale B del segmento, la perpendicolare alla retta, ed individuandone il punto di intersezione C con la retta. Allora, il tratto AC sulla retta (che supporremo di lunghezza l) rappresenta la proiezione del segmento AB sulla retta. Si noti che il triangolo ABC è un triangolo rettangolo, di cui la proiezione AB costituisce il cateto adiacente all'angolo θ tra il segmento e la retta, e il segmento AB costituisce l'ipotenusa. Dalla definizione di coseno abbiamo quindi che la lunghezza l della proiezione AC è data da

$$l = L\cos\theta. \tag{3}$$

Relazioni trigonometriche

Dalla definizione data di seno e coseno si possono ricavare delle relazioni trigonometriche di grande utilità.

Si noti che, dalle relazioni (2), rileviamo, per confronto, che

$$\sin\alpha = \cos\beta\ ,\ \sin\beta = \cos\alpha\ . \tag{4}$$

Poichè è ben noto che la somma dei tre angoli di un rettangolo è sempre π (cioè 180 gradi), nel nostro caso di triangolo rettangolo, nel quale il terzo angolo è $\pi/2$ (cioè 90 gradi), abbiamo

$$\alpha + \beta + \pi/2 = \pi,$$

cioè

$$\alpha + \beta = \pi/2,$$

o anche

$$\alpha = \pi/2 - \beta \ , \ \beta = \pi/2 - \alpha.$$

Dalle relazioni (4) si ricava quindi la regola generale (valida per ogni angolo θ,

$$\sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta \ , \ \cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta \ . \tag{5}$$

Si noti anche che da questa relazione, sostituendo θ con $-\theta$ e considerando che il seno cambia di segno cambiando il segno dell'angolo mentre il coseno no, si ottiene anche

$$\sin(\pi/2 + \theta) = \cos\theta \ , \ \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin\theta \ . \tag{6}$$

Sostituendo poi nelle relazioni (6) θ con $\theta + \pi/2$, si ottiene

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta \ , \ \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \ . \tag{7}$$

Infine, sostituendo nelle relazioni (7) θ con $-\theta$, si ottiene

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \ , \ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \ . \tag{8}$$

Tutte queste relazioni trigonometriche possono essere utili.

Si noti ancora che se sostituisco nella relazione (7) θ con $\theta + \pi$, ottengo

$$\sin(\pi + (\theta + \pi)) = -\sin(\theta + \pi) = \sin(\theta) \ ,$$

$$\cos(\pi/2 + (\theta + \pi)) = -\cos(\theta + \pi) = \cos\theta \ , \tag{9}$$

cioè

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \ , \ \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \ ; \tag{10}$$

queste relazioni ci dicono che, come è ben noto, le funzioni trigonometriche sono *periodiche*, cioè che riacquistano i loro valori dopo un intervallo caratteristico che, in questo caso, è $2\,\pi$. Naturalmente, la (10) si può generalizzare come

$$\sin(\theta + 2\,n\pi) = \sin\theta \ , \ \cos(\theta + 2\,n\pi) = \cos\theta \ , \tag{11}$$

dove n è un qualsiasi intero (positivo o negativo).

Notiamo anche che vale un'altra ben nota relazione. Infatti, dalle definizioni (2) e dalle relazioni (4), abbiamo, per esempio,

$$\sin^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2},$$

ed il Teorema di Pitagora ("la somma dei quadrati di un triangolo rettangolo è uguale al quadrato dell'ipotenusa") ci dice che l'ultimo rapporto vale 1, cioè che per ogni angolo α vale la relazione

$$\sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \tag{12}$$

Altre funzioni trigonometriche

- La *tangente* di un angolo θ (simbolo: $\tan\theta$) è definita come il rapporto tra il seno di θ ed il coseno di θ: $\tan\theta \doteq \sin\theta/\cos\theta$.

Dalle definizioni di seno e coseno con un triangolo rettangolo è chiaro che la tangente di un angolo esprime il rapporto tra il cateto opposto all'angolo ed il cateto adiacente all'angolo:

$$\tan\alpha \doteq \sin\alpha/\cos\alpha \equiv (\frac{c}{a})/(\frac{b}{a}) = \frac{c}{a}\,\frac{a}{b} = \frac{c}{b}.$$

- La *cotangente* di un angolo θ (simbolo: $\cot\theta$) è definita come: $\cot\theta \doteq 1/\tan\theta \equiv \cos\theta/\sin\theta$.

Alcuni valori notevoli di funzioni trigonometriche

Le definizioni delle funzioni trigonometriche permettono di calcolare, almeno in modo arbitrariamente approssimato, il valore che tali funzioni assumono per ogni argomento della variabile. Tuttavia, per alcuni angoli particolari è possibile calcolare esattamente il valore della funzione, ed è bene che questi casi vengano memorizzati.

Cominciamo col notare che gli argomenti delle funzioni trigonometriche rappresentano degli angoli, che possono essere espressi sia in *gradi*, sia in *radianti*. Come tutti sanno, una circonferenza è divisa in 360 "spicchi", ciascuno dei quali contiene un angolo di 1 grado. Quindi, un angolo retto, che prende un quarto dell'angolo totale della circonferenza, vale $360/4 = 90$ gradi, l'angolo piatto, che ne prende un mezzo, vale $360/2 = 180$ gradi, e così via. D'altra parte, un angolo α è definito come il rapporto tra l'arco s che questo angolo sottende in una qualsiasi circonferenza e il raggio R di questa circonferenza: $\alpha \doteq s/R$. Poiché la lunghezza di una circonferenza è $s_C = 2\ \pi\ R$, e la circonferenza rappresenta l'arco massimo, abbiamo che l'angolo massimo vale, secondo questa definizione, $2\ \pi$; quando misuriamo in questo modo gli angoli, adottiamo un'unità di misura che prende il nome di "radiante". Quindi, l'angolo massimo sotteso dalla circonferenza vale "$2\ \pi$ radianti". Ma noi sappiamo che questo angolo vale anche 360 gradi; otteniamo così il metodo di conversione tra radianti e gradi, e viceversa. Infatti, è chiaro che 360 gradi $\equiv 2\ \pi$ radianti. È anche chiaro per esempio che 90 gradi $\equiv 360/4 \equiv 2\ /4 \equiv \pi/2$ radianti, ecc. In generale, se un angolo α vale δ gradi, lo stesso angolo vale, in radianti,

$$\alpha = 2\ \pi \cdot \frac{\delta}{360}.$$

Da ora in poi useremo il simbolo rad per indicare i radianti, mentre useremo l'usuale cerchietto in alto a sinistra per indicare i gradi (per esempio $90°$ indicherà 90 gradi).

A questo punto possiamo fare un'elenco dei valori di seno e coseno di angoli notevoli:

$$\begin{aligned}
&\sin\ 30° \equiv \sin\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \cos\ 30° \equiv \cos\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ; \\
&\sin\ 60° \equiv \sin\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \cos\ 60° \equiv \cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\ ; \\
&\sin\ 45° \equiv \sin\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \cos\ 45° \equiv \cos\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ; \\
&\sin\ 90° \equiv \sin\ \frac{\pi}{2} = 1 \quad ; \quad \cos\ 90° \equiv \cos\ \frac{\pi}{2} = 0\ .
\end{aligned} \tag{13}$$

I valori per altri angoli, come per esempio $120° \equiv 90° + 30° \equiv \pi/2 + \pi/6$, possono essere ricavate dalle relazioni (5) - (12).

2.2 Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Una volta introdotto il concetto di grandezze fisiche, vedremo che tali grandezze si possono dividere, dal punto di vista della loro caratterizzazione, in due grandi categorie: le grandezze *scalari* e le grandezze *vettoriali.* Procediamo quindi nel seguito a descriverne le proprietà.

Grandezze scalari

Una grandezza scalare è definita assegnando un *numero* che, nel caso di grandezza fisica, ne rappresenta la misura in un certo sistema di unità di misura, e la caratterizza completamente. Esempi di grandezze scalari sono la massa o la temperatura di un corpo, la frequenza di un suono ecc. Ne consegue che la regola di composizione di due grandezze scalari è molto semplice, riducendosi alla somma algebrica dei numeri che le caratterizzano. Quindi, se unisco nello stesso recipiente due quantità di acqua ciascuna delle quali ha la massa di 1 Kg ottengo una quantità di 1 $Kg + 1\ Kg = 2\ Kg$ di acqua.

Il simbolo che usiamo per indicare una grandezza scalare è semplicemente una lettera (m per una massa, T per una temperatura, ecc.)

Grandezze vettoriali

Una grandezza vettoriale è definita assegnando tre proprietà: il *modulo o intensità*, la *direzione* e il *verso.* Il simbolo che useremo per indicare un vettore sarà una lettera sovrastata da una freccetta: $\vec{v}$, $\vec{u}$ ecc. Indicheremo invece il modulo di un vettore $\vec{v}$ con il simbolo $|\vec{v}|$, o semplicemente, omettendo la freccetta, con v.

Un vettore si rappresenta graficamente disegnando una "freccetta" (vedi Fig. 2 allegata), la cui lunghezza rappresenta (su una certa scala grafica) il modulo; la retta contenente la freccetta rappresenta invece la direzione del vettore, mentre la freccia indica il verso, che è uno dei due possibili versi nei quali si può percorrere la retta indicante la direzione.

Grandezze fisiche vettoriali sono la velocità, l'accelerazione, la forza ecc. Per chiarire la definizione immaginiamo di considerare un'automobile che percorre un tratto rettilineo dell'autostrada del Sole. Allora, il vettore che definisce la sua velocità ha modulo pari al numero segnato dal tachimetro (per esempio, 100 chilometri all'ora), e direzione data dalla retta che comprende il tratto rettilineo; il verso può essere quello da Roma a Milano o quello, opposto, da Milano a Roma.

Operazioni coi vettori

È spesso necessario *comporre* tra di loro due o più vettori trovandone la *risultante*; questo corrisponde a definire somme o differenze di vettori. Inoltre, per i vettori si intrducono anche certi tipi di prodotti, e la moltiplicazione (o la divisione) per uno scalare. Nel seguito definiremo queste operazioni.

Somma e differenza tra vettori:

La somma di due vettori è un altro vettore che si ottiene per costruzione grafica disegnando i due vettori dati in modo che partano dallo stesso punto (punto di applicazione), disegnando poi il parallelogramma di lati pari ai moduli dei due vettori dati, e disegnando infine il vettore (vettore somma vettoriale dei due vettori dati) che ha lunghezza pari alla diagonale maggiore del parallelogramma, direzione coincidente con tale diagonale, e verso che si allontana dal punto comune di applicazione dei due vettori (vedi Fig. 3 allegata).

La differenza di due vettori è un altro vettore che si ottiene per costruzione grafica disegnando i due vettori dati in modo che partano dallo stesso punto (punto di applicazione), e congiungendo poi tra loro i vertici dei due vettori dati; il vettore differenza ha allora modulo pari alla lunhezza di questa congiungente (che non è altro che la diagonale minore del parallelogramma che ha per lati i due vettori), direzione della stessa congiungente, e verso diretto dal vertice del vettore dal quale si sottrae al vertice del vettore sottratto: se, cioè faccio $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, ottengo un vettore il cui verso va dal vertice di $\vec{v}_1$ a quello di $\vec{v}_2$ (vedi Fig. 3 allegata).

Prodotti di vettori con scalari:

Il prodotto di un vettore $\vec{v}$ con uno scalare α, che indicheremo con $\alpha\ \vec{v}$, è definito come quel vettore che ha la stessa direzione di $\vec{v}$, modulo pari a $|\alpha|\ |\vec{v}|$, e verso che coincide con quello di $\vec{v}$ se α è un numero positivo, mentre è opposto a quello di $\vec{v}$ se α è negativo. Per esempio, se $\alpha = 2$ abbiamo che $\alpha\ \vec{v} \equiv 2\ \vec{v}$ è un vettore che ha modulo pari a due volte quello di $\vec{v}$, direzione e verso uguali a quelli di $\vec{v}$. Se invece $\alpha = -3$ abbiamo che $\alpha\ \vec{v} \equiv -3\ \vec{v}$ è un vettore che ha modulo pari a tre volte quello di $\vec{v}$, direzione uguale a quella di $\vec{v}$, ma verso opposto a $\vec{v}$. Si noti, per inciso, che quindi il vettore con $-\vec{v}\, equiv(-1)\vec{v}$ possiamo indicare quel vettore che ha modulo e direzione uguali a $\vec{v}$, ma verso opposto.

Notiamo che dividere un vettore per uno scalare equivale a moltiplicare il vettore per l'inverso dello scalare. Se ora scegliamo, in particolare, come scalare per il quale dividere il vettore $\vec{v}$ il modulo $|\vec{v}|$ dello stesso vettore, il vettore

$$\vec{u} = \vec{v}/|\vec{v}|$$

risulta essere un vettore che ha la stessa direzione e verso del vettore originario $\vec{v}$, ma modulo 1 ($|\vec{u}| = 1$). Diciamo allora che $\vec{u}$ è un *versore*; in particolare $\vec{u}$ è il versore che individua la direzione ed il verso di tutti i vettori paralleli al vettore originario $\vec{v}$. Si noti anche che ogni vettore $\vec{v}_c$ che sia parallelo alla direzione di $\vec{u}$ e concorde con il suo verso si può scrivere come

$$\vec{v}_c = |\vec{v}_c|\ \vec{u},$$

mentre ogni vettore $\vec{v}_d$ che sia parallelo alla direzione di $\vec{u}$ e abbia verso opposto a quello di $\vec{u}$ si può scrivere come

$$\vec{v}_d = -|\vec{v}_d|\ \vec{u}.$$

<u>Prodotti tra vettori</u>:

Tra due vettori si possono eseguire due tipi di prodotti: il *prodotto scalare* ed il *prodotto vettoriale*.

Il *prodotto scalare* tra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ è una quantità scalare che si indica con $\vec{v} \cdot \vec{u}$, ed è data da

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}| \cos\theta\ , \tag{14}$$

dove θ indica l'angolo formato tra i due vettori, e $\cos\theta$ il coseno di questo angolo. Si noti che, se i due vettori formano un agngolo retto (cioè di 90 gradi o, in radianti, di $\pi/2$), allora il coseno si annulla e il prodotto scalare si annulla. Invece su i due vettori sono paralleli (e quindi formano un angolo nullo) il coseno vale 1 ed il prodotto scalare è masssimo. Infine, se i vettori sono anti-paralleli (cioè sono sulla stessa retta ma hanno verso opposto) allora formano un angolo di 180 gradi (o di π in radianti), il coseno vale -1, e il prodotto scalare vale $-|\vec{v}||\vec{u}|$. Infine, dalla definizione il prodotto scalare è invariante per scambio dei vettori, cioè:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}.$$

Notiamo anche che possiamo scrivere il prodotto scalare tra $\vec{v}$ e $\vec{u}$ come

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (|\vec{v}|\ \cos\theta)\ |\vec{u}| \equiv (|\vec{u}|\ \cos\theta)\ |\vec{v}|.$$

Notiamo quindi che, dalla discusione precedente sulla proiezione di un segmento sulla retta e dalla relazione (3), il prodotto scalare può essere interpretato come il prodotto tra il modulo di uno dei due vettori e la proiezione dell'altro vettore sulla direzione del primo.

Il *prodotto vettoriale* tra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ è una quantità vettoriale, che si indica con $\vec{v} \wedge \vec{u}$, ed è quindi definita dandone modulo, direzione e verso come segue.

Il modulo del prodotto vettoriale è dato da

$$|\vec{v} \wedge \vec{u}| = |\vec{v}||\vec{u}||\sin\theta|,$$

dove sin indica il seno (si noti come in questo caso il modulo è massimo per $\theta = \pi/2$ (vettori perpendicolari), e nullo per $\theta = 0, \pi$ (vettori sulla stessa retta).

La direzione del prodotto vettoriale è quella perpendicolare al piano individuato dai due vettori.

Il verso è quello di una vite che avanza girando nel verso che sovrappone il primo vettore al secondo vettore. I due versi possibili sono quello orario (se si gira nel verso delle lancette dell'orologio) e quello antiorario (se si gira nel verso opposto).

Quindi, se disegnamo due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sulla lavagna, con $|\vec{v}| = 2$ e $|\vec{u}| = 3$, ed i due vettori formano tra loro un angolo di 30 gradi (il cui seno vale 1/2), il loro prodotto vettoriale avrà modulo pari a $2 \cdot 3 \cdot \sin\ 30 = 3$, direzione perpendicolare alla lavagna (che è il piano individuato dai due vettori), e verso che entra nella lavagna se, sovrapponendo $\vec{v}$ a $\vec{u}$, giro in verso orario, e invece verso che esce dalla lavagna se, sovrapponendo $\vec{v}$ a $\vec{u}$, giro in verso antiorariorario.

È chiaro che, contrariamente al caso del prodotto scalare, nel caso del prodotto vettoriale se scambio i vettori cambio anche il verso, cioè cambio il segno:

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

2.3 Sistemi di riferimento Cartesiani

Per poter individuare, per esempio, la posizione di un corpo è necessario avere a disposizione un *sistema di riferimento*. I sistemi di riferimento più convenienti sono i *sistemi di riferimento Cartesiani*. Un sistema di riferimento Cartesiano è basato su tre assi tra loro perpendicolari che si incontrano in un punto O detto origine (vedi Fig. 4 allegata); per ogni asse viene inoltre scelto un verso positivo. I tre assi li indicheremo con asse X, asse Y, asse Z. In questo modo, la posizione di un qualsiasi punto P nello spazio può essere individuata da un vettore $\vec{s}$ applicato nell'origine (che chiameremo vettore posizione), la cui direzione è la retta che passa per l'origine e per il punto P, ed il cui verso è quello che va da O a P (vedi Fig. 4 allegata). A questo punto, possiamo individuare le due proiezioni del vettore $\vec{s}$ sull'asse Z e sul piano (X, Y) individuato dagli assi X e Y; le proiezioni saranno costruite tracciando le perpendicolari all'asse Z e al piano (X, Y) che partono dal vertice del vettore $\vec{s}$, e andando ad individuare i loro punti di intersezione con l'asse Z e con il piano (X, Y). Se chiamiamo queste due intersezioni rispettivamente Q ed S, vediamo che il tratto che congiunge l'origine O con Q (orientato nel verso che va da O a Q) definisce un vettore sull'asse Z che chiameremo il vettore componente di $\vec{s}$ rispetto all'asse Z, e che indicheremo con $\vec{z}$; mentre il tratto che congiunge l'origine O con S (orientato nel verso che va da O a S) definisce un vettore sul piano (X, Y) che chiameremo il vettore componente di $\vec{s}$ rispetto al piano (X, Y),e che indicheremo con $\vec{s}_{x,y}$. È chiaro che il vettore posizione $\vec{s}$ è la somma vettoriale dei vettori componenti $\vec{z}$ e $\vec{s}_{x,y}$.

Adesso, possiamo con lo stesso metodo trovare le proiezioni del vettore $\vec{s}_{x,y}$ rispetto all'asse X e all'asse Y, e chiameremo i rispettivi vettori componenti $\vec{x}$ (che sta sull'asse X) e $\vec{y}$ (che sta sull'asse Y). È ora chiaro che il vettore $\vec{s}_{x,y}$ è la somma vettoriale dei vettori componenti $\vec{x}$ e $\vec{z}$, e che quindi il vettore posizione $\vec{s}$ è la somma vettoriale dei tre vettori componenti $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ (diretti lungo i tre assi)

$$\vec{s} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}.$$

Abbiamo quindi scomposto il vettore $\vec{s}$ in vettori componenti. Ora indichiamo con x il numero che si ottiene prendendo $|\vec{x}|$ se il vettore $\vec{x}$ punta nel verso positivo dell'asse X, e $-|\vec{x}|$ se invece il vettore $\vec{x}$ punta nel verso negativo dell'asse X; definiamo poi in modo analogo (in riferimento ai vettori

$\vec{y}$, $\vec{z}$, e agli assi Y, Z) i numeri y e z. Allora. è chiaro che il vettore $\vec{s}$, ed il punto P al quale è associato, sono completamente definiti specificando la terna ordinata (x, y, z) che chiameremo *componenti del vettore $\vec{s}$, o anche coordinate della posizione del punto P rispetto al sistema Cartesiano scelto.* Infatti, definiamo ora i versori $\hat{i}, \hat{k}, \vec{l}$ dei tre assi X, Y, Z come i vettori di modulo 1 diretti lungo, rispettivamente, gli assi X, Y, Z nel loro verso positivo. Allora, è chiaro per quanto detto in precedenza che, qualsiasi sia il punto P prescelto di componenti (x, y, z), si può scrivere

$$\vec{x} = x\,\hat{i}\;,\;\vec{y} = y\,\hat{k}\;,\;\vec{z} = z\,\vec{l}.$$

Abbiamo usato le notazioni $\vec{s}$ per indicare il vettore che individua la posizione di un punto generico P, e (x, y, z) per le sue componenti sugli assi. Più in generale, potremo usare una notazione del tipo $\vec{v}$ per indicare un generico vettore, e una notazione del tipo v_1, v_2, v_3 (o, in altri casi, v_x, v_y, v_z) per indicare le sue componenti lungo i tre assi.

Quindi, da ora in poi, quando saremo in componenti Cartesiane, individueremo un punto nello spazio, o un vettore, assegnando le loro coordinate, o componenti, e useremo le notazioni

$$P \equiv (x, y, z),$$

$$\vec{v} \equiv (v_1, v_2, v_3),$$

e le leggeremo, rispettivamente, come "il punto P di coordinate x, y, z", e "il vettore $\vec{v}$ di componenti v_1, v_2, v_3".

È chiaro che, continuando ad indicare con $\hat{i}, \hat{k}, \vec{l}$ i versori dei tre assi X, Y, Z, anche per un vettore generico $\vec{v}$ potremo scrivere

$$\vec{v} = v_1\,\hat{i} + v_2\,\hat{k} + v_3\,\vec{l}.$$

Da tutto quello che abbiamo detto, $P \equiv (-3, 2, 1)$ indicherà il punto di coordinata -3 lungo l'asse X, coordinata 2 lungo l'asse Y, coordinata 1 lungo l'asse Z; $\vec{v} \equiv (4, 3, -7)$ indicherà il vettore di componente 4 lungo l'asse X, componente 3 lungo l'asse Y, componente -7 lungo l'asse Z, e così via.

Da qunto detto in precedenza, vediamo anche che la componente lungo un asse di un vettore $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ si ottiene facendo il prodotto scalare del vettore stesso con il versore dell'asse prescelto:

$$v_1 = \vec{v} \cdot \hat{i}\ ,\ v_2 = \vec{v} \cdot \hat{k}\ ,\ v_3 = \vec{v} \cdot \hat{l}\ .$$

Modulo di un vettore in un sistema di riferimento Cartesiano

Per calcolare il modulo di un vettore in termini delle sue componenti Cartesiane notiamo che il segmento che rappresenta la lunghezza del vettore $\vec{s}$ (e quindi il suo modulo) è l'ipotenusa del triangolo rettangolo i cui un cateto ha lunghezza pari al modulo della componente z di $\vec{s}$ lungo l'asse Z, e l'altro cateto ha lunghezza pari al modulo della componenente $\vec{s}_{x,y}$ di $\vec{s}$ sul piano X, Y. Per il teorema di Pitagora abbiamo quindi

$$|\vec{s}|^2 = z^2 + |\vec{s}_{x,y}|^2.$$

D'altra parte, il vettore $\vec{s}_{x,y}$ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo i cui cateti hanno lunghezze uguali rispettivamente al modulo della componente x e a quello della componente y di $\vec{s}$. Ancora per il teorema di Pitagora abbiamo quindi

$$|\vec{s}_{x,y}|^2 = x^2 + y^2.$$

mettendo insieme le due ultime relazioni, abbiamo allora

$$|\vec{s}|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Il modulo di $\vec{s}$ in termini delle componenti è quindi

$$|\vec{s}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{15}$$

Ovviamente, se consideriamo un generico vettore $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$, abbiamo

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}. \tag{16}$$

Operazioni coi vettori in un sistema di riferimento Cartesiano

Vedremo ora come si possono esprimere le operazioni coi vettori precedentemente definite se ci poniamo in un sistema di riferimento Cartesiano, e quindi definiamo i vettori attraverso le loro componenti lungo gli assi X, Y, Z.

<u>Somma e differenza tra vettori</u>:

Se abbiamo due vettori in un riferimento Cartesiano, abbiamo visto che essi possono essere caratterizzati dalla loro tre componenti rispetto agli assi, e quindi scriviamo: $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$. Consideriamo adesso il vettore somma dato da $\vec{v} + \vec{u}$; il nostro problema è ricavarne le componenti lungo gli assi in termini delle componenti dei due vettori originari, dopo di che il vettore somma sarà completamente definito. La cosa è molto semplice perchè, dal fatto che la somma tra vettori è un'operazione *lineare*, e come si può vedere anche dalla costruzione grafica, il vettore somma ha componenti che si ottengono semplicemente sommando algebricamente le componenti omologhe dei due vettori originari: la componente su X sarà la somma della componente X del primo vettore con la componente X del secondo vettore ecc. Abbiamo quindi

$$\vec{v} + \vec{u} \equiv (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3).$$

Per esempio, se $\vec{v} \equiv (3, -4, 1)$ e $\vec{u} \equiv (-5, 2, 7)$, abbiamo

$$\vec{v} + \vec{u} \equiv (3 - 5, -4 + 2, 1 + 7) \equiv (-2, -2, 8).$$

Ovviamente, se facciamo la differenza tra due vettori, le componenti omologhe si sottraggono e abbiamo

$$\vec{v} - \vec{u} \equiv (v_1 - u_1, v_2 - u_2, v_3 - u_3).$$

Con gli stessivettori usati nel primo esempio abbiamo quindi

$$\vec{v} - \vec{u} \equiv (3 - (-5), -4 - 2, 1 - 7) \equiv (8, -6, -6).$$

Possiamo riassumere i casi di somma e differenza in un'unica formula

$$\vec{v} \pm \vec{u} \equiv (v_1 \pm u_1, v_2 \pm u_2, v_3 \pm u_3). \tag{17}$$

Come si vede, in un sistema di riferimento queste operazioni risultano più semplici da effettuare.

<u>Prodotti tra vettori</u>:

Sia il prodotto scalare che quello vettoriale tra due vettori possono essere espressi in componenti Cartesiane. Qui ci limiteremo a descrivere il prodotto scalare, poichè l'espressione di quello vettoriale risulta un po' più complesso e rinviamo la sua trattazione al momento nel quale eventualmente ci servirà usarlo.

Dati due vettori $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$ in un sistema di riferimento Cartesiano, il loro prodotto scalare espresso tramite componenti è dato da

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1\, u_1 + v_2\, u_2 + v_3\, u_3 \ , \tag{18}$$

cioè, è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe.

Si può mostrare facilmente che le due definizioni (14) e (18) danno lo stesso risultato.

Esercizi

Esercizio 2.1): Quanto valgono $\sin 150° \ , \ \cos 150° \ , \ \tan 150° \ , \ \cot 150°$?

Esercizio 2.2): Tradurre in radianti i seguenti angoli:

$$45° \ , \ 120° \ , \ 150° \ , \ 240°.$$

Esercizio 2.3): Quanto valgono $\sin \frac{2\pi}{3} \ , \ \cos \frac{2\pi}{3} \ , \ \tan \frac{2\pi}{3} \ , \ \cot \frac{2\pi}{3}$?

Esercizio 2.4): Quanto vale l'ipotenusa di un triangolo rettangolo nel quale un cateto di lunghezza $2m$ forma con l'ipotenusa un angolo di $30°$?

Esercizio 2.5): Quanto vale la tangente di un angolo α di un triangolo rettangolo se il cateto opposto ad α ha lunghezza pari a $3m$, e l'ipotenusa ha lunghezza pari a $5m$?

Esercizio 2.6): Trovare graficamente (in scala) la somma di due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$, se $|\vec{v}| = 4$ e $|\vec{u}| = 3$, e se i due vettori formano tra loro un angolo retto. Calcolare anche $|\vec{v} + \vec{u}|$.

Esercizio 2.7): Calcolare le componenti della somma e della differenza di due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$, di componenti (in un sistema di riferimento Cartesiano)

$$\vec{v} \equiv (-1, 3, 0),$$

$$\vec{u} \equiv (2, 1, 1).$$

Calcolare, inoltre, i moduli di $\vec{v}+\vec{u}$ e di $\vec{v}-\vec{u}$, il prodotto scalare $\vec{v}\cdot\vec{u}$, ed il modulo del prodotto vettoriale $\vec{v}\wedge\vec{u}$.

Esercizio 2.8): Calcolare il prodotto scalare $\vec{v}\cdot\vec{u}$, se $|\vec{v}|=2$, $|\vec{u}|=3$, e l'angolo θ che i due vettori formano tra loro vale $\theta=\pi/3$.

Esercizio 2.9): Le componenti Cartesiane della somma e della differenza tra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sono, rispettivamente:

$$\vec{v}+\vec{u}\equiv(1,-2,5),$$

$$\vec{v}-\vec{u}\equiv(-3,4,1).$$

Calcolare le componenti Cartesiane di $\vec{v}$ e $\vec{u}$.

Esercizio 2.10): Il vettore $\vec{v}$ ha componenti

$$\vec{v}\equiv(1,2,2),$$

mentre le prime due componenti del vettore $\vec{u}$ valgono 2 e 1, rispettivamente. Calcolare quanto deve valere la terza componente di $\vec{u}$ affinchè $\vec{v}$ e $\vec{u}$ siano tra loro perpendicolari. (Suggerimento: imporre $\vec{v}\cdot\vec{u}=0$).

Esercizio 2.11): Il prodotto scalare tra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$, i cui moduli sono $|\vec{v}|=3$ e $|\vec{u}|=2$, vale -3. Calcolare l'angolo tra i due vettori.

3 Cinematica del punto materiale

Definizione di punto materiale

Innanzitutto definiamo il concetto di *punto materiale*. Dato un corpo, la possibilità di considerarlo o meno un punto materiale non dipende dallo specifico corpo scelto, ma *dal rapporto tra le dimensioni del corpo e la scala sulla quale se ne studiano le proprietà (nel caso presente, il moto)*; se questo rapporto è sostanzialmente trascurabile, allora diremo che il corpo in questione può essere considerato un punto materiale. Cercheremo di spiegarci con qualche esempio. Un corpo di 1 millimetro (un millesimo di metro) di lato che scivola sul ponte molto liscio di una nave portacontainers può essere considerato un punto materiale, perchè il rapporto tra le sue dimensioni e quelle della nave (circa 300 metri) è praticamente trascurabile (pari a circa $3 \cdot 10^{-5}$). Quindi, nello studio del suo moto su scala di lunghezza pari a quella della nave, possiamo trascurare la sua forma geometrica, e considerarlo concentrato in un punto. D'altra parte, se studiamo il moto intorno al mondo della nave portacontainers, possiamo considerare la nave stessa come un punto materiale, perchè il rapporto tra le sue dimensioni (300 metri) e quelle della circonferenza terrestre (circa 40.000 Km) è trascurabile (pari a circa $7.5 \cdot 10^{-5}$). Ancora, se ora consideriamo il moto della terra sulla scala della galassia, sono le dimensioni della terra (circa 13.000 Km di diametro) ad essere trascurabili rispetto a quelle di una galassia (circa 10^{15} Km!), e così via. Il caso più semplice che possiamo considerare, quindi, è il moto di un punto materiale.

Definizione di cinematica

La cinematica è quella branca della Fisica che studia le modalità del moto di un corpo *disinteressandosi delle cause che lo hanno generato*. Vedremo poi che le cause del moto saranno prese in considerazione successivamente nell'ambito dello studio della *Dinamica*.

Quello che faremo ora, quindi, è di definire le *grandezze cinematiche* (velocità ed accelerazione), e di studiare vari tipi di moto.

Concetto di traiettoria e di legge oraria

Definizione di traiettoria: "La traiettoria associata al moto di un corpo è l'insieme dei punti dello spazio occupati (nel corso del tempo) dal corpo durante il suo moto". Possiamo quindi avere moti rettilinei, nei quali la traiettoria è una retta (per esempio, il moto di una macchina su un tratto rettilineo di autostrada), moti circolari (per esempio, il moto di una macchina su un autodromo circolare, o il moto del sasso mentre David sta ruotando la fionda per colpire Golia), moti ellittici ecc.

Definizione di legge oraria: "La legge oraria è quella che descrive la dipendenza dal tempo delle coordinate del punto materiale durante il moto". Quindi, in generale, la legge oraria è data da $\vec{s}(t)$, cioè assegnando come varia la posizione del punto materiale in funzione del tempo in un sistema di riferimento Cartesiano; nel caso generale di moto tridimensionale, questo è equivalente a dare le dipendenze dal tempo delle tre coordinate: $\{x(t), y(t), z(t)\}$.

Si noti che, chiaramente, si possono avere moti con la stessa traiettoria e leggi orarie diverse, come vedremo tra poco.

Nel seguito cominceremo con il considerare la classe di moti associata con la traiettoria più semplice, cioè la retta.

3.1 Moti unidimensionali

Nel caso in cui la traiettoria tracciata dal punto materiale si svolge tutta su una sola retta, è chiaro che, scelto un sistema di riferimento Cartesiano con l'asse X coincidente con la traiettoria, le coordinate $y(t), z(t)$ del punto materiale saranno sempre nulle, e potremo disinteressarcene. Il moto, e la relativa legge oraria, sarà quindi definito dando solo la dipendenza dal tempo della coordinata x ($x(t)$); abbiamo quindi il caso di un moto *unidimensionale*.

Si noti che possiamo quindi evitare di considerare quantità vettoriali, come per esempio la posizione del punto $\vec{s}(t)$, perchè ci basta considerare solo la coordinata x o altre quantità che andremo ora a definire che non cambiano mai la *direzione*. Le quantità che ora andremo a definire, per ora nel caso particolare di moti unidimensionali, sono le quantità in termini delle quali un moto può essere classificato nel senso dela legge oraria: esse sono *la velocità* e *l'accelerazione*.

Definizione di velocità.

Intuitivamente, tutti sappiamo che la velocità misura quanto rapidamente un corpo cambia la sua posizione. Nel caso unidimensionale svolto lungo l'asse X, come abbiamo visto, la posizione di un punto materiale ad un certo istante t è descritta dal valore della sua coordinata lungo X all'istante t, valore che abbiamo denotato con $x(t)$. Se, a partire da t, aspettiamo un intervallo di tempo $\Delta t > 0$, cioè se ci mettiamo ad un tempo $t + \Delta t$, il punto materiale in moto avrà cambiato la sua posizione da $x(t)$ a $x(t + \Delta t)$. Per esempio, una macchina alle ore 15.30 di un certo giorno (questo è il tempo t) si trova 100 Km a Nord di Roma sull'Autostrada del Sole (questa è la posizione $x(t) \equiv x(15.30)$), e se aspettiamo 30 minuti (questo è l'intervallo di tempo Δt) la macchina si troverà a 150Km a Nord di Roma (questo è la nuova posizione $x(t + \Delta t) \equiv x(15.30 + 30) = x(16.00)$).

Il Cambiamento della posizione del punto materiale è misurato dallo *spostamento*, cioè dalla differenza di posizione $\Delta x(t)$, definito da

$$\Delta x(t) \doteq x(t + \Delta t) - x(t). \tag{19}$$

Si noti che questa definizione ingloba anche quello che è rimasto della natura vettoriale di questa quantità, che possiede un *modulo* ed un *segno*. Infatti, una volta scelto il verso positivo dell'asse X lungo il quale si svolge il moto, il punto durante l'intervallo di tempo Δt si può spostare in questo verso ("in avanti") o nel verso opposto ("all'indietro"); nel primo caso avremo che la coordinata X cresce dopo Δt (cioè, $x(t + \Delta t) > x(t)$), mentre nel secondo caso la coordinata X diminuisce dopo Δt (cioè, $x(t+\Delta t) < x(t)$). Quindi, nel primo caso avremo $\Delta x(t) > 0$, mentre nel secondo caso avremo $\Delta x(t) > 0$. Quindi, $\Delta x(t)$ è un vettore la cui direzione è definitivamente fissata sulla retta del moto, ma il cui verso è caratterizzato dal segno positivo o negativo. Per esempio, nel caso in cui il punto oscilli lungo la retta, il verso, cioè il segno, di $\Delta x(t)$ cambia periodicamente.

Una volta definito il concetto di spostamento, se consideriamo una *generica* scelta dell'intervallo di tempo Δt possiamo definire la *velocità media del punto materiale tra gli istanti t e $t + \Delta t$ come il rapporto tra lo spostamento $\Delta x(t)$ ed il tempo impiegato a spostarsi* Δt:

$$v_m(t, t + \Delta t) \doteq \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \ . \tag{20}$$

Si noti che il fatto che le caratteristiche vettoriali residue dello spostamento si trasferiscono sulla velocità: quando il punto inverte il suo moto sulla retta, la velocità cambia di segno, cioè cambia il suo verso. Abiamo già visto che nel sistema MKS una velocità si misura in $m\ s^{-1}$. La velocità media è un concetto chiaro a tutti; per esempio, se una macchina percorre tra le 15.00 e le 16.00 un tratto rettilineo di $90km$, diciamo che ha tenuto in quell'ora una velocità *media* di $90km/h$. Si noti anche che, concordemente a quanto abbiamo detto nella Lezione 1, questa definizione contiene una prescrizione di *misura*. Infatti, ci dice che possiamo definire la velocità media misurando lo spostamento spaziale (con un'unità di misura che può essere metri, chilometri ecc.) ed il tempo impiegato per spostarsi (per esempio, con un cronometro), e poi calcolando il rapporto. Vediamo dalla definizione che, nel sistema MKS, una velocità si misura in *metri diviso secondi* ($m\ s^{-1}$). Si noti che normalmente si parla di una velocità di un certo numero di *metri al secondo*.

È chiaro, però, che non è affatto detto che in quell'ora tra le 15.00 e le 16.00 la macchina abbia tenuto una velocità *costante* di $90km/h$; anzi, di solito una macchina in un'ora aumenta e diminuisce la sua velocità parecchie volte. Possiamo allora chiederci qual'è la velocità che la macchina aveva in un certo "istante", per esempio alle ore "15, 34 minuti e 11 secondi". Normalmente, questa velocità, che chiameremo *velocità istantanea*, la possiamo vedere segnata dal tachimetro della macchina. Ma come possiamo definirla? È chiaro che, fissato il tempo t (per esempio, le "15, 34 minuti e 11 secondi"), se nella definizione (20) l'intervallo di tempo Δt diventa molto "piccolo", la velocità media approssima sempre più la velocità istantanea. Definiamo quindi la *velocità istantanea del punto all'istante* t come

$$v(t) \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \ . \tag{21}$$

È necessario adesso adottare qualche cautela nel "leggere" questa definizione. Infatti, essa può essere interpretata dal punto di vista matematico, e dal punto di vista fisico. Dal punto di vista matematico, tutti avranno riconosciuto nell'Eq. (21) il fatto che il rapporto $\Delta x(t)/\Delta t$ è il *rapporto incrementale della funzione del tempo* $x(t)$ *nell'intervallo di tempo* Δt, e che il limite di questo rapporto non è altro che *la derivata di* $x(t)$ *all'istante* t. Quindi, la definizione di velocità istantanea diventa

$$v(t) \doteq \frac{dx(t)}{dt} \ . \tag{22}$$

Questa definizione matematica risulta molto utile per il calcolo della legge oraria. Tuttavia, se si adotta il punto di vista *fisico* è necessario che la legge (21) contenga anche una prescrizione per *misurare* la velocità istantanea, concordemente a quanto abbiamo detto nella Lezione 1. Questo si può fare interpretando in termini "fisici" il limite $\lim_{\Delta t \to 0}$. Dal punto di vista fisico, il procedimento di limite è il seguente. Si misura il rapporto $\Delta x(t)/\Delta t$ per un certo numero di valori di Δt *progressivamente decrescenti*; per esempio, si misura il rapporto per un certo valore di Δt, poi si misura di nuovo per un valore di Δt che è la metà di quello precedente, poi si misura una terza volta per un valore di Δt ancora dimezzato (cioè, un quarto di quello iniziale), e così via. Si continua a dimezzare Δt, e a misurare il rapporto $\Delta x(t)/\Delta t$ corrispondente, finchè, dimezzando ulteriormente il tempo, *il rapporto non cambia più a meno di un errore prefissato*. Per esempio, se ad un certo passo del processo di dimezzamento di Δt abbiamo ottenuto tramite misura una velocità di 10.341 $m\ s^{-1}$, e dimezzando ulteriormente Δt misuriamo una velocità di 10.340 $m\ s^{-1}$, possiamo stabilire, dal punto di vista fisico, che il limite del rapporto (che da la velocità istantanea) vale 10.34 $m\ s^{-1}$ *a meno di un errore dell'uno per mille*. Se Vogliamo raggiungere una precisione maggiore, continuiamo il processo finchè l'errore passa sulla quarta cifra decimale (errore di uno su diecimila), o sulla quinta (errore di uno su centomila), e così via. La definizione fornisce quindi anche un procedimento operativo per misurare la grandezza fisica velocità istantanea *con precisione in principio arbitraria*. Vedremo in seguito che sia la definizione in senso matematico che quella in senso fisico forniranno metodi di soluzione per la legge oraria.

Definizione di accelerazione.

Sappiamo dalla nostra esperienza comune che un'altro concetto importante nella descrizione del moto di un corpo è quello di *accelerazione*. Infatti, se dobbiamo operare un sorpasso in autostrada dobbiamo *accelerare*, cioè dobbiamo aumentare la velocità, mentre quando, per esempio, arriviamo al casello dobbiamo *decelerare* (frenare), cioè diminuire la velocità. Quindi, anche le *variazioni nel tempo della velocità* sono importanti. Definiamo quindi l'accelerazione come quella grandezza che misura la "rapidità" con la quale varia la velocità. Analogamente al caso precedente definiamo la variazione $\Delta v(t)$ di velocità tra il tempo t ed il tempo Δt come

$$\Delta v(t) = v(t + \Delta t) - v(t),$$

con ovvio significato dei simboli. Definiamo quindi per un generico intervallo di tempo $t, t+\Delta t$ l'*accelerazione media* come

$$a_m(t, t+\Delta t) \doteq \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} \ . \tag{23}$$

Definiamo poi l'*accelerazione istantanea all'istante* t come

$$a(t) \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} \ . \tag{24}$$

Vediamo che in questo caso abbiamo che l'accelerazione istantanea, dal punto di vista matematico, è la derivata della velocità rispetto al tempo

$$a(t) \doteq \frac{dv(t)}{dt} \ . \tag{25}$$

Dal punto di vista fisico, per definire operativamente l'accelerazione istantanea tramite misura possiamo procedere in modo analogo a quanto abbiamo fatto nel caso dela velocità istantanea. Vediamo anche che, poichè l'accelerazione è la derivata della velocità che, a sua volta, è la derivata della posizione, l'accelerazione è la derivata della derivata della posizione, cioè la *derivata seconda della posizione*, e possiamo quindi scrivere

$$a(t) \doteq \frac{d^2x(t)}{dt^2} \ . \tag{26}$$

Abbiamo già visto che nel sistema MKS l'accelerazione si misura in $m\ s{-}2$. Avendo definito le grandezze cinetiche velocità ed accelerazione, un moto sarà caratterizzato specificando la dipendenza dal tempo di queste quantità. Nel prosieguo, ci occuperemo dei moti rettilinei più semplici: *il moto rettilineo uniforme* ed *il moto rettilineo uniformemente accelerato.*

Moto rettilineo uniforme.

Il caso più semplice di moto unidimensionle che possiamo considerare è quello durante il quale la velocità del punto materiale rimane *costante* (o, con termine equivalente, *uniforme*) (moto rettilineo uniforme). Imponiamo quindi che la velocità non dipenda dal tempo e sia uguale ad una costante che indicheremo con v_0:

$$v(t) = v_0 \ . \tag{27}$$

Da questa prescrizione possiamo ricavare la legge oraria $x(t)$ per la posizione del punto. Seguiremo a questo scopo diversi metodi equivalenti.

Il primo metodo (il più semplice) si basa sulla considerazione che se la velocità rimane costante, allora la velocità istantanea e quella media coincidono, ed il valore v_0 potrà essere uguagliato con $v_m(t, t + \Delta t)$, che ora non dipenderà dalla scelta dell'intervallo $t, t + \Delta t$. Conviene cambiare notazione, sostituendo al primo tempo t un istante iniziale t_0 arbitrariamente scelto, e denotando genericamente t il tempo finale che avevamo chiamato $t + \Delta t$. Ci occupiamo quindi del moto che si sviluppa tra gli istanti t_0 e $t > t_0$, ed abbiamo quindi che l'intervallo di tempo Δt tra il tempo finale e quello iniziale diventa $t - t_0$. Operando allora nella Eq. (20) le sostituzioni

$$t \to t_0 \ , \ t + \Delta t \to t \ , \ \Delta t \to t - t_0 \ ,$$

abbiamo che la velocità media si riscrive

$$v_m = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0};$$

da questa relazione, imponendo, come abbiamo detto, $v_m = v_0$ otteniamo

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = v_0 \ , \tag{28}$$

dalla quale possiamo ricavare $x(t)$, cioè la legge oraria del moto rettilineo unfiforme:

$$x(t) = x(t_0) + v_0 \ (t - t_0) \ . \tag{29}$$

Vediamo che il grafico di x in funzione di t in questo caso è una retta che all'istante iniziale t_0 interseca l'asse X alla quota $x(t_0)$, e la cui inclinazione è determinata dal valore di v_0. Si noti anche che, data l'arbitrarietà nella scelta dell'istante iniziale t_0, possiamo sempre porre $t_0 = 0$, ottenendo

$$x(t) = x(0) + v_0 \ t \ . \tag{30}$$

Si noti anche che nel caso di moto rettilineo uniforme, essendo la velocità costante, essendo l'accelerazione la derivata della velocità, ed essendo la derivata di una costante nulla, l'accelerazione è nulla (come è ben noto).

La legge oraria (70) si può ricavare anche in un secondo modo (che in realtà è il più usato perchè applicabile in generale), cioè tramite *integrazione.*

Infatti, se ora usiamo la definizione (22) e la condizione (27), otteniamo la relazione

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_0 \ , \tag{31}$$

che ci dice che *la derivata rispetto al tempo della funzione $x(t)$ è uguale alla costante v_0*. La relazione (31) costiyuisce un'*equazione differenziale ordinaria del primo ordine*, e si risolve per integrazione. Per evitare però appesantimenti formali, in queste lezioni, sia qui che successivamente, ricorreremo alla consultazione di *tabelle di derivate* che ci permetteranno facilmente di riconoscere le soluzioni delle semplici equazioni differenziali che incontreremo.

Innanzitutto, ricordiamo alcune semplici regole di derivazione. Innanzitutto, sappiamo che se $f(t), g(t))$ sono due funzioni

$$\frac{d[f(t) + g(t)]}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt} \ ; \tag{32}$$

cioè, *la derivata della somma di due funzioni è uguale alle somma delle derivate di ciascuna funzione.* Nasturalmente, questa regola vale anche per le derivate di ordine superiore (la somma della derivata seconda, terza, ... di due funzioni è uguale alle somma delle derivate seconda, terza, ... di ciascuna funzione) Se poi k denota una costante e $f(t)$ una generica funzione della variabile t abbiamo

$$\frac{d[k\ f(t)]}{dt} = k\ \frac{df(t)}{dt} \ ; \tag{33}$$

cioè, *la derivata del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione.* Inoltre, se c è un'altra costante, abbiamo

$$\frac{df(c\ t)}{dt} = c\ \frac{df(c\ t)}{d(c\ t)} \ ; \tag{34}$$

cioè, *la derivata di una funzione del prodotto $c\ t$ si ottiene moltiplicando la costante c per la funzione che si ottiene derivando $f(c\ t)$ rispetto all'intero argomento $c\ t$ considerato come un'unica variabile.* Qui conviene fare un esempio. È noto che la derivata dell'esponenziale rispetto alla variabile è l'esponenziale stesso:

$$\frac{de^\tau}{d\tau} = e^\tau,$$

dove qui abbiamo indicato con τ una variabile adimensionale (perchè, come detto in precedenza, sappiamo che l'argomento di un esponenziale deve essere adimensionale). Ora consideriamo la funzione $e^{c\,t}$ (dove, ovviamente $[c] = [t^{-1}]$), e facciamone la derivata rispetto a t. In base alla regola (34) otterremo allora

$$\frac{de^{c\,t}}{dt} = c\,\frac{de^{c\,t}}{d(c\,t)} = c\,e^{c\,t}.$$

Dopo aver ricordato queste regole elementari, ricordiamo le derivate delle funzioni più semplici, cioè

$$\frac{dk}{dt} = 0\ ,\ \frac{d(t))}{dt} = 1\ ,\ \frac{d(t^2))}{dt} = 2\,t\ . \tag{35}$$

Usando ora la regola (33) e le relazioni (35), scriveremo ora un elenco di derivate di polinomi che ci permetteranno di risolvere il problema dela legge oraria nei casi pù semplici di moto. Indicheremo con $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$ i seguenti polinomi in t di ordine, rispettivamente, zero, uno e due:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= c_0\ , \\ P_1(t) &= c_0 + c_1\,t\ , \\ P_2(t) &= c_0 + c_1\,t + \frac{1}{2}\,c_2\,t^2\ , \end{aligned} \tag{36}$$

dove c_0, c_1, c_2 denotano tre *generiche* costanti.

Allora vediamo che, derivando una o due volte rispetto al tempo questi polinomi ed usando le Eq. (33), (35), abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &\equiv \frac{dc_0}{dt} = 0\ , \\ \frac{d^2P_0(t)}{dt^2} &= 0\ ; \end{aligned}$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} \equiv \frac{d(c_0 + c_1\,t)}{dt} = \frac{d(c_0)}{dt} + \frac{d(c_1\,t)}{dt} = c_1\ ,$$

$$\frac{d^2P_1(t)}{dt^2} \equiv \frac{dc_1}{dt} = 0 \; ;$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} \equiv \frac{d(c_0 + c_1\, t + \frac{1}{2}\, c_2\, t^2)}{dt}$$

$$= \frac{d(c_0)}{dt} + \frac{d(c_1\, t)}{dt} + \frac{d(\frac{1}{2}c_2\, t^2)}{dt} = c_1 + c_2\, t \; ,$$

$$\frac{d^2P_2(t)}{dt^2} \equiv \frac{d(c_1 + c_2\, t)}{dt} = c_2 \; . \tag{37}$$

Riassumiamo, per maggiore chiarezza, nelle seguenti tabelle di derivate prime e derivate seconde dei tre polinomi

$$\begin{array}{lclclclclcl} \dfrac{dP_0(t)}{dt} & = & 0 & ; & \dfrac{dP_1(t)}{dt} & = & c_1 \; ; & \dfrac{dP_2(t)}{dt} & = & c_1 + c_2\, t \; ; \\ \dfrac{d^2P_0(t)}{dt^2} & = & 0 & ; & \dfrac{d^2P_1(t)}{dt^2} & = & 0 \quad ; & \dfrac{d^2P_2(t)}{dt^2} & = & c_2 \; . \end{array} \tag{38}$$

Ritornando ora all'equazione (differenziale) (31), vediamo che la derivata della nostra funzione incognita $x(t)$ deve dare la costante v_0; dalla tabella (38) vediamo allora che la soluzione è data dal polinomio $P_1(t)$ (Eq. (36)) scegliendo $c_1 = v_0$, e quindi abbiamo

$$x(t) = c_0 + v_0\, t \; . \tag{39}$$

Rimane ora da determinare la costante arbitraria c_0. In realtà, vale in generale la regola che, *data un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, la soluzione è determinata a meno di una costante arbitraria.* Per individuare c_0 basta scrivere l'Eq. (39) ponendo $t = 0$, e ottenendo

$$x(0) = c_0 \; . \tag{40}$$

Vediamo quindi che c_0 è data dalla posizione $x(0)$ del punto materiale all'istante iniziale $t = 0$. Vale quindi l'affermazione: *data un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, la soluzione è completamente assegnando il valore* *della funzione incognita al tempo iniziale, il che determina la costante arbitraria.* Mettendo insieme le Eq. (39) e (40) riotteniamo la legge oraria (70) del moto rettilineo uniforme.

Infine, andiamo ora a considerare un terzo modo di ricavare la legge oraria. Questo metodo, in realtà, è un metodo molto semplice di *integrazione numerica*, ed è valido all'interno di un certo errore (che può essere opportunamente controllato). Qui lo illustreremo nel caso del moto rettilineo uniforme; in questo caso abbiamo a disposizione lasoluzione esatta, ed il metodo risulta piuttosto banale, ma il metodo può essere facilmente generalizzato a casi più complessi non risolvibili analiticamente.

Ripartiamo dalla definizione (21) della velocità istantanea, ed adottiamo il punto di vista *fisico*; secondo tale punto di vista, possiamo approssimare all'interno di un certo errore prefissato $v(t)$ con il rapporto incrementale se ci fermiamo ad un'opportuna scelta di Δt. Scriviamo quindi

$$v(t) \cong \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \ . \tag{41}$$

Nel caso di moto rettilineo uniforme, essendo la velocità costante, *questa relazione risulta esatta per ogni scelta di* Δt; nel caso generale la possiamo invece usare come relazione valida all'interno di una certa approssimazione. Nel caso di moto rettilineo uniforme scriviamo allora

$$v_0 = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \ , \tag{42}$$

e, ricordando la definizione di $\Delta x(t)$, abbiamo

$$v_0 = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \ . \tag{43}$$

Ricavando da questa equazione $x(t+\Delta t)$, otteniamo l'*equazione ricorsiva*

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v_0 \, \Delta t \ , \tag{44}$$

che ci permette di calcolare la posizione all'istante successivo $t+\Delta t$ se conosciamo la posizione all'istante precedente t.

La relazione (44) ci permette quindi di ricavare la posizione a qualsiasi istante se conosciamo la posizione iniziale all'istante zero. Infatti, poniamo $t = 0$ nell'equazione, ed otteniamo

$$x(\Delta t) = x(0) + v_0 \, \Delta t \ ; \tag{45}$$

se abbiamo assegnato $x(0)$, abbiamo quindi *aggiornato* l'equazione ottenendo la posizione all'istante Δt. Poniamo ora $t = \Delta t$ nell'equazione ed otteniamo

$$x(2\ \Delta t) = x(\Delta t) + v_0\ \Delta t\ ; \tag{46}$$

abbiamo quindi di nuovo *aggiornato* l'equazione ottenendo la posizione al tempo 2 Δt, dove al secondo membro al posto di $x(\Delta t)$ sostituiamo il valore numerico ottenuto tramite il primo aggiornamento (45). Possiamo ora continuare nel procedimento, scegliendo nell'Eq. (44) $t = 2\ \Delta t$ e ricavando $x(3\ \Delta t)$, e così via. Possiamo quindi calcolare numericamente la posizione ad un qualsiasi tempo che sia un multiplo dell'intervallo Δt; chiaramente, il procediento è tanto più accurato quanto più "piccolo" è Δt.

Facciamo anche un esempio numerico. Scegliamo

$$v_0 = 3\ m\ s^{-1}\ \ ;\ \ x(0) = 0\ \ ;\ \ \Delta t = 0.1\ s,$$

e supponiamo di voler calcolare la posizione fino all'istante $T = 10s$. Si noti che $T = 100\ \Delta$; dobbiamo quindi iterare 100 volte. Mostriamo, ovviamente, solo le prime iterazioni; un computer sarà in grado di farle tutte e 100 in un tempo brevissimo. La prime tre iterazioni danno

$$x(0.1) = 3 \cdot 0.1\ m = 0.3\ m,$$

$$x(2 \cdot 0.1) \equiv x(0.2) = x(0.1) + 3 \cdot 0.1\ m = (0.3 + 0.3)\ m = 0.6\ m,$$

$$x(3 \cdot 0.1) \equiv x(0.3) = x(0.2) + 3 \cdot 0.1\ m = (0.6 + 0.3)\ m = 0.9\ m,$$

e così via fino ad arrivare a $x(10)$. Ovviamente, questo è un caso estremamente banale, ma il metodo può essere applicato a qualsiasi scelta d $v(t)$, anche con una dipendenza complicata dal tempo. Invece di illustrare qui il metodo più in generale, preferiamo posporre l'illustrazione al caso ancora più generale nel quale il moto è generato da una dinamica.

Esercizio 3.1): Quanto spazio percorre in 100 minuti un'automobile che viaggia alla velocit costante di 108 Km/h su un'autostrada rettilinea (esprimere tutto in MKS).

Soluzione: Innanzitutto cambiamo in unità MKS. Quindi

$$108 \, \frac{Km}{h} = \frac{108 \cdot 1000 \; m}{3600 \; s} = 30 \; m \; s^{-1};$$

$$100 \; min = (100 \cdot 60) \; s = 6000 \; s.$$

A questo punto possiamo usare l'Eq. (70), ricavando lo spazio percorso:

$$x(t) - x(0) = v_0 \, t = (30 \cdot 6000) \; m = 180.000 \; m,$$

(cioè 180 Km).

Esercizio 3.2): Se un'automobile percorre a velocit costante 300 Km in 2.5 ore su un tratto rettilineo, calcolare la velocit (in Km/h e m/s).
Soluzione: Abbiamo $x(t) - x(0) = 300 \; Km$, $t = 2.5 \; h$; dall'Eq. (70) ricaviamo quindi v_0:

$$v_0 = \frac{x(t) - x(0)}{t} = \frac{300}{2.5} \; Km/h = 120 \; km/h.$$

In MKS:

$$v_0 = \frac{120 \cdot 1000 \; m}{3600 \; s} \cong 33.3 \; m/s.$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato.

Consideriamo ora il caso di moto rettilineo uniforme durante il quale rimane costante l'*accelerazione* (moto rettilineo uniformemente accelerato). Abbiamo ora a disposizione la definizione (23) di accelerazione media, e le due definizioni equivalenti (25) e (26) di accelerazione istantanea. Innanzitutto, poichè le relazioni (23) e (25) legano l'accelerazione alle variazioni di velocità esattamente nella stessa forma nella quale le relazioni (20) e (22) legano la velocità alle variazioni di posizione, con lo stesso metodo usato in precedenza per ricavare la legge oraria (70) possiamo, come semplice esercizio, ricavare la velocità come funzione del tempo nel caso di accelerazione costante. Indicato infatti con a il valore costante dell'accelerazione, abbiamo che

$$v(t) = v(0) + a \; t \; , \tag{47}$$

dove $v(0)$ indica la velocità iniziale all'istante $t = 0$. D'altra parte, la condizione di accelerazione costante si può scrivere come

$$a = \frac{dv(t)}{dt} \ , \tag{48}$$

e, consultando la tabella (38) delle derivate, vediamo che la soluzione dell'equazione (48) è data dal polinomio $P_1(t)$ (Eq. (36)) con $c_1 = a$, cioè

$$v(t) = c_0 + a\ t \ . \tag{49}$$

Ora, ponendo $t = 0$ in questa equazione, troviamo che $v(0) = c_0$; come prima la costante arbitraria che compare nella soluzione di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine è fissata dalla condizione iniziale (in questo caso sulla velocità), e, inserita nell'Eq. (49), ci ridà la soluzione completa (47):

$$v(t) = v(0) + a\ t \ . \tag{50}$$

Ma quale sarà ora la legge oraria, cioè la dipendenza $x(t)$ dal tempo? Possiamo, a questo scopo, ricorrere alla definizione (26) di accelerazione la quale, inserendo la condizione di accelerazione costante uguale ad a, diventa

$$a = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \ , \tag{51}$$

cioè un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine che dice che la derivata seconda della funzione incognita è uguale alla costante a. Consultando allora la tabella (38) delle derivate, vediamo che la soluzione dell'equazione (51) è data dal polinomio $P_2(t)$ (Eq. (36)) con $c_2 = a$, cioè

$$x(t) = c_0 + c_1\ t + \frac{1}{2}\ a\ t^2 \ , \tag{52}$$

dove ora, essendo l'equazione differenziale del secondo ordine, compaiono *due* costanti arbitrarie c_0, c_1. Per determinare c_0 poniamo, come prima, $t = 0$ nella relazione (52), e otteniamo $x(0) = c_0$, cioè che, come prima, c_0 è fissata assegnando la posizione iniziale $x(0)$ al tempo $t = 0$. Per determinare c_1, deriviamo ora la relazione (52) e, ricordando che la derivata di $x(t$ che compare al primo membro dell'Eq. (52) è la velocità $v(t)$, considerando che a secondo membro della (52) abbiamo l'espressione di $P_2(t)$ (Eq. (36)) con

$c_2 = a$, e consultando la tabella delle derivate (38) (derivata prima di P_2 con $c_2 = a$), otteniamo infine

$$v(t) = c_1 + a\,t\,. \tag{53}$$

Per determinare c_1 poniamo $t = 0$ nella relazione (53), e otteniamo $v(0) = c_1$, cioè che c_1 è fissata assegnando il valore iniziale $v(0)$ della velocità al tempo $t = 0$. Riotteniamo quindi l'Eq. (49). Inserendo ora le informazioni che $x(0) = c_0$ e $v(0) = c_1$ nell'Eq. (52), otteniamo la legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato

$$x(t) = x(0) + v(0)\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2\,. \tag{54}$$

In questo procedimento abbiamo imparato che: *un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine è determinata ameno di due costanti arbitrarie; le costanti sono completamente determinate specificando il valore iniziale della funzione che soddisfa l'equazione, ed il valore iniziale della sua derivata prima.*

Si noti che la dipendenza dal tempo della posizione nel moto rettilineo uniformemente accelerato assume una forma quadratica; quindi, il grafico nel di x in funzione del tempo avrà la forma di una *parabola*

Esercizio 3.3): Un'automobile parte da ferma e accelera costantemente su un tratto rettilineo in modo da percorrere 200 metri in 30 secondi. Calcolare la velocit istantanea alla fine dei 200 metri e la velocit media, .
Soluzione: Vediamo innanzitutto le informazioni fornite nell'esercizio. Se l'automobile parte da ferma abbiamo che la velocità iniziale è nulla: $v(0) = 0$. Se accelera costantemente su un tratto rettilineo si tratta quindi di un moto rettilineo uniformemente accelerato: chiamiamo a l'accelerazione costante, e scriviamo subito la corrispondente legge oraria (52)

$$x(t) = x(0) + v(0)\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2\,.$$

D'altra parte, possiamo inserire in questa equazione l'informazione che $v(0) = 0$, ottenendo

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{2}\,a\,t^2\,.$$

Ci viene inoltre fornito lo spazio percorso ($200\ m$) in un tempo $t = 30\ s$. Lo spazio percorso all'istante t, cioè lo spostamento a t, è in generale dato dalla differenza $x(t) - x(0)$ tra la posizione a t e quella iniziale; Abbiamo quindi che $x(30\ s) - x(0) = 200\ m$. Dalla relazione precedente abbiamo

$$x(t) - x(0) = \frac{1}{2}\ a\ t^2\ .$$

Ponendo $t = 30\ s$ in ambedue i membri di questa relazione, abbiamo

$$x(30) - x(0)\ m = \frac{1}{2}\ a\ (30)^2\ m,$$

e usando l'informazione sullo spostamento

$$200\ m = \frac{1}{2}\ a\ 900\ m,$$

Da questa relazione ricaviamo l'accelerazione costante a:

$$a = (2 \cdot 200)/900\ m\ s^{-2} \cong 0.44\ m\ s^{-2}.$$

Usando ora la relazione (49) con $v(0) = 0$ e $t = 30\ sec$, otteniamo la velocità all'istante finale

$$v(30\ s) = (0.44 \cdot 30)\ m\ s^{-1} = 13.2\ m\ s^{-1}.$$

La velocità media è data dallo spostamento diviso il tempo, e quindi è

$$v_m = 200/30\ m\ s^{-1} \cong 6.6\ m\ s^{-1}.$$

Domanda: sono velocità elevate ?.

Esercizio 3.4): Un'automobile, partendo da ferma, accelera costantemente, e percorre un tratto rettilineo di 10 Km alla velocità media di 72 Km/h. Quant'è l'accelerazione costante mantenuta dalla macchina in unità MKS?
Soluzione: Vediamo innanzitutto le informazioni fornite nell'esercizio. Se l'automobile parte da ferma abbiamo che la velocità iniziale è nulla: $v(0) = 0$. Se accelera costantemente su un tratto rettilineo si tratta quindi di un moto rettilineo uniformemente accelerato: chiamiamo a l'accelerazione costante, e scriviamo subito la corrispondente legge oraria (52)

$$x(t) = x(0) + v(0)\ t + \frac{1}{2}\ a\ t^2\ .$$

D'altra parte, possiamo inserire in questa equazione l'informazione che $v(0) = 0$, ottenendo

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{2}\, a\, t^2 \, .$$

Ci viene anche fornito lo spostamento ($x(t) - x(0) = 10\ Km$), e la velocità media ($v_m = 72\ Km/h$). Poichè la risposta è richiesta in unità MKS, conviene innanzitutto tradurre questi dati in tali unità:

$$72\ Km/h = \frac{72 \cdot 1000}{3600}\ m\ s^{-1} = 20\ m\ s^{-1},$$

$$10\ Km = 10.000\ m.$$

Ora la velocità media è data dal rapporto tra lo spostamento ed il tempo impiegato:

$$v_m = (x(t) - x(0))/t,$$

da cui possiamo ricavare il tempo impiegato a coprire i 10 Km

$$t = (x(t) - x(0))/v_m = 500\ s.$$

Ora abbiamo

$$x(t) - x(0) = \frac{1}{2}\, a\, t^2\ m,$$

e, inserendo lo spostamento ed il tempo, abbiamo

$$a = 2(x(t) - x(0))/t^2\ m\ s^{-2} = 20.000/250.000\ m\ s^{-2} = 0.08\ m\ s^{-2}.$$

Esercizio 3.5): Si consideri un punto materiale che, partendo da fermo, compie un moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione a. Il punto materiale percorre, a partire dall'istante iniziale, uno spazio di 4 metri in un tempo di 2 secondi. Un secondo punto materiale compie lo stesso moto rettilineo uniformemente accelerato (con la stessa accelerazione a), ma parte con una velocità iniziale $v(0)$ diversa da zero. Il secondo punto materiale percorre

uno spazio di 10 metri in un tempo di 2 secondi. Calcolare l'accelerazione a e la velocità iniziale $v(0)$ del secondo punto materiale.
Soluzione: Partiamo per i moti di ambedue i punti materiali dalla legge oraria (54) del moto rettilineo uniformemente accelerato. Notiamo che, non essendo coinvolta alcuna posizione relativa tra i due punti, possiamo scegliere $x(0) = 0$ per tutti e due i moti senza ledere la generalità. Inoltre, per il primo punto abbiamo $x(t = 2\ s) = 4\ m$, $v(0) = 0$; allora, possiamo usare la (54) sostituendo al primo membro $4\ m$ e mettendo nel secondo membro $v(0) = 0$ e $t = 2\ s$:

$$4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4 = 2\ a,$$

da cui otteniamo l'accelerazione

$$a = 2\ m\ s^{-2}.$$

Nel caso del secondo punto materiale usiamo ancora la (54) con $x(t = 2\ s) = 10\ m$ al primo membro, e inserendo a secondo membro $t = 2\ s$ e il valore $a = 2\ m\ s^{-2}$ appena ottenuto. In questo modo otteniamo un'equazione per $v(0)$:

$$10 = 2 \cdot v(0) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot v(0) + 4,$$

cioè

$$6 = 2 \cdot v(0),$$

da cui

$$v(0) = 3\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 3.6): Due punti materiali svolgono due moti rettilinei uniformemente accelerati. All'istante iniziale il primo punto dista dal secondo punto di 100 metri. I due punti svolgono i loro moti nel verso che va dalla posizione iniziale del primo punto a quella del secondo punto. La velocità iniziale del primo punto è di 72 Km/h, mentre il secondo punto parte da fermo. L'accelerazione del primo punto è $a_1 = 2\ m\ s^{-2}$, mentre quella del secondo

punto è $a_2 = 1\ m\ s^{-2}$. Dopo quanto tempo il primo punto raggiunge il secondo?
Soluzione: Dobbiamo scrivere le leggi orarie della forma (54) per i due punti. Denotiamo con $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_1(0)$, $x_2(0)$, $v_1(0)$, $v_2(0)$ rispettivamente le posizioni all'istante t del primo e del secondo punto, le posizioni all'istante iniziale del primo e del secondo punto, e le velocità all'istante iniziale del primo e del secondo punto; avendo già denotato con a_1, a_2 le accelerazioni, abbiamo che le due leggi orarie sono:

$$x_1(t) = x_1(0) + v_1(0)\ t + \frac{1}{2}\ a_1\ t^2,$$

$$x_2(t) = x_2(0) + v_2(0)\ t + \frac{1}{2}\ a_2\ t^2.$$

Essendo fissata una distanza iniziale relativa tra i due punti, vediamo che possiamo scegliere l'origine nel punto $x_1(0)$ che denota la posizione iniziale del primo punto materiale (quello che sta "più indietro"), e quindi abbiamo

$$x_1(0) = 0.$$

Rispetto al primo punto materiale, il secondo all'stante iniziale sta "più avanti" di 100 metri, e quindi, nel nostro riferimento,

$$x_2(0) = 100\ m.$$

Inoltre abbiamo

$$v_1(0) = 72\ Km/h \equiv 20\ m\ s^{-1}\ ;\ v_2(0) = 0.$$

Inserendo questi dati, ed i valori delle accelerazioni, abbiamo

$$x_1(t) = 20 \cdot t + t^2,$$

$$x_2(t) = 100 + \frac{1}{2} \cdot t^2.$$

Denotato con $\hat{t}$ l'istante nel quale il primo punto materiale raggiunge il secondo, abbiamo che in questo istante le posizioni coincidono:

$$x_1(\hat{t}) = x_1(\hat{t}),$$

cioè, sostituendo nelle leggi orarie $t = \hat{t}$ e imponendo l'uguaglianza tra i secondi membri abbiamo

$$20 \cdot \hat{t} + \hat{t}^2 = 100 + \frac{1}{2} \cdot \hat{t}^2,$$

da cui, raggruppando in un solo membro e moltiplicando per due,

$$\hat{t}^2 + 40 \cdot \hat{t} - 200 = 0.$$

Le soluzioni sono (formula ridotta)

$$\hat{t}_\pm = -20 \pm \sqrt{400 + 200} = -20 \pm 10 \cdot \sqrt{6}.$$

Ovviamente, la soluzione a tempo negativo va scartata, e abbiamo

$$\hat{t}_+ = -20 + 10 \cdot \sqrt{6} \cong 4.5\ s.$$

3.2 Moti non unidimensionali

Consideriamo ora un moto con una traiettoria non più unidimensionale. Allora, la posizione del punto materiale ad un certo istante in un sistema Cartesiano sarà un vettore $\vec{s}(t)$, in generale con tre componenti: $\vec{s}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$. In corrispondenza, lo spostamento cioè il cambiamento della posizione del punto materiale, tra un istante t ed un istante $t + \Delta t$, sarà anch'esso un vettore definito da

$$\Delta\vec{s}(t) \doteq \vec{s}(t + \Delta t) - \vec{s}(t), \tag{55}$$

dove, a secondo membro, si dovrà effettuare una differenza con le regole delle operazioni tra vettori.

In questo caso generale dovremo quindi ridefinire la velocità media nell'intervallo di tempo $t, t + \Delta t$, e la velocità istantanea del punto materiale al tempo t, come segue

$$\vec{v}_m(t, t + \Delta t) \doteq \frac{\Delta\vec{s}(t)}{\Delta t}\ , \tag{56}$$

$$\vec{v}(t) \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{s}(t)}{\Delta t}\ ; \tag{57}$$

la seconda definizione ci dà anche

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}(t)}{dt} \tag{58}$$

Inoltre, dovremo anche ridefinire l'accelerazione media nell'intervallo di tempo $t, t + \Delta t$, e l'accelerazione istantanea del punto materiale al tempo t, come segue

$$\vec{a}_m(t, t + \Delta t) \doteq \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} \ . \tag{59}$$

$$\vec{a}(t) \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} \ ; \tag{60}$$

la seconda definizione ci dà anche l'accelerazione come derivata della velocità

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \ , \tag{61}$$

che l'accelerazione come derivata seconda della posizione

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{s}(t)}{dt^2} \ . \tag{62}$$

Si noti che le varie definizioni, in particolare quelle tramite derivate, possono essere riscritte in componenti Cartesiane; anzi, per la soluzione di problemi generali, di legge oraria questo sarà (di norma) necessario. Consideriamo allora la definizione (58); in componenti, considerando che $\vec{s}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$, essa si scriverà

$$\vec{v}(t) \equiv (\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}) \equiv (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \ . \tag{63}$$

Invece, le definizioni (61) e (62) in componenti si scriveranno come

$$\vec{a}(t) \equiv (\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt}) \ , \tag{64}$$

e

$$\vec{a}(t) \equiv (\frac{d^2x(t)}{dt}, \frac{d^2y(t)}{dt}, \frac{d^2z(t)}{dt}) \equiv (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) \ . \tag{65}$$

Finora noi abbiamo considerato il caso di moti rettilinei (lungo l'asse X), quindi unidimensionali, per i quali

$$v_y(t) = v_z(t) = 0 \; ; \; a_y(t) = a_z(t) = 0,$$

e per i quali, quindi, le componenti $y(t), z(t)$ della legge oraria sono sempre nulle, e conta solo $x(t)$. Adesso andremo a studiare un moto *bidimensionale*: il moto circolare.

Moto circolare uniforme.

Consideriamo un moto durante il quale il punto materiale descrive una traiettoria circolare, il cui raggio indichiamo con R. Chiaramente questa traiettoria è bidimensionale, e quindi descrivibile in un sistema di riferimento Cartesiano costituito da due assi, X, Y, in un piano. Scegliamo di porre l'origine degli assi nel centro del cerchio, che quindi avrà coordinate $(0, 0)$. Il punto materiale, ad un certo istante t, avrà una posizione sul cerchio individuata da un vettore $\vec{s}(t)$ nel piano, di lunghezza fissata R, e di coordinate $x(t), y(t)$ (vedi Fig. 1). Poichè ad ogni istante , come detto, la distanza del punto dalll'origine deve essere pari a R, le coordinate dovranno soddisfare la condizione

$$|\vec{s}(t)|^2 \equiv x^2(t) + y^2(t) = R^2.$$

Anche per questo moto dovremo definire le grandezze cinematiche velocità ed accelerazione. Ci troviamo chiaramente in un caso più complicato di quello del moto unidimensionale; vedremo però che, nel caso di moto circolare uniforme, riusciremo ancora a descrivere il moto in modo semplice. Cominciamo però a considerare in modo completo il carattere bidimensionale della traiettoria; questo ci servirà a capire quale deve essere la *direzione* della velocità in ogni punto della traiettoria. Consideriamo quindi l'incremento $\Delta\vec{s}(t)$ della posizione del punto sul cerchio; poichè in questo caso la differenza tra $\vec{s}(t+\Delta t)$ e $\vec{s}(t)$ non è altro che la differenza tra due raggi del cerchio (vedi Fig. 2), $\Delta\vec{s}(t)$ rappresenta un vettore diretto lungo la *secante* al cerchio tra i due punti individuati dai due raggi sul cerchio stesso; quindi, la velocità media $\vec{v}_m(t, t + \Delta t) \doteq \Delta\vec{s}(t)/\Delta t$ sarà anch'essa diretta lungo questa secante. Se però eseguiamo il limite per Δt che tende a zero, vediamo che i due punti si avvicinano (cioè anche $\Delta\vec{s}(t)$ tende a zero), e nel limite, che ci permette di ottenere la velocità istantanea $\vec{v}(t) \doteq \lim_{\Delta t \to 0}(\Delta\vec{s}(t)/\Delta t)$, otteniamo un vettore *tangente* al cerchio nel punto $\vec{s}(t)$. Quindi, vediamo che: *la velocità istantanea in un punto della traiettoria di un moto circolare è sempre* *tangente alla traiettoria nel punto considerato.* Chiaramente abbiamo anche che: *la velocità istantanea in un punto della traiettoria di un moto circolare ha un verso che è determinato dal fatto che il punto percorra il cerchio in verso orario o in verso antiorario.* Avendo caratterizzato la direzione ed il verso nel moto circolare, è conveniente introdurre, accanto alla definizione usuale della velocità vettoriale istantanea, la definizione di *velocità scalare.* Supponiamo infatti che all'istante t il nostro punto materiale sia nel punto P sul cerchio, e che all'istante $t + \Delta t$ sia arrivato al punto $P^{'}$ sul cerchio, ed andiamo a definire con $\Delta s(t)$ *la lunghezza dell'arco di cerchio tra* P *e* $P^{'}$ *percorso dal punto materiale nell'intervallo di tempo tra* t *e* $t + \Delta t$. Allora, definiamo *la velocità scalare media* $v_{sm}(t)$ come

$$v_{sm}(t) \doteq \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} \ , \tag{66}$$

e *la velocità scalare istantanea* $v_s(t)$

$$v_s(t) \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} \ . \tag{67}$$

In realtà, la velocità scalare è proprio quella che usiamo normalmente, quella, per intenderci, che segna il tachimetro della nostra automobile. Infatti, se affrontiamo una curva, cioè un tratto non rettilineo, sull'autostrada la velocità che consideriamo è proprio quella ottenuta dividendo la lunghezza del tratto non rettilineo per il tempo.

Stabilito questo fatti e introdotto queste definizioni, che sono valide per qualsiasi moto circolare, andiamo ora a restringere il nostro studio ad un caso semplice, ma estremamente importante. Andiamo infatti a considerare il caso nel quale *il* **modulo** *della velocità istantanea rimane costante nel tempo*:

$$|\vec{v}(t)| = v_0 \ , \tag{68}$$

dove abbiamo indicato il valore costante del modulo con v_0. Si noti che, mentre nel caso del moto rettilineo uniforme la velocità rimaneva costante anche in *direzione* e *verso*, in questo caso solo il modulo rimane costante, mentre la direzione ed il verso variano perchè associati ad istanti diversi a tangenti in diversi punti del cerchio.

Vedremo fra poco che potremo trattare questo caso ancora in modo analogo a quanto fatto nel caso unidimensionale, almeno se ci limitiamo a considerare la velocità. Prima di procedere, però, è necessario mostrare che nel caso del moto circolare uniforme, a differenza del moto rettilineo uniforme, l'accelerazione non è nulla. Infatti, abbiamo visto che solo il *modulo* della velocità rimane costante, mentre cambiano la *direzione* e il *verso*; quindi, il vettore $\Delta\vec{v}(t)$ non sarà nullo, e non sarà quindi nulla l'accelerazione $\vec{a}(t) \doteq \lim_{\Delta t \to 0}(\Delta\vec{v}(t)/\Delta t)$. Ma come sarà *diretta* l'accelerazione? Se ora andiamo a considerare due vettori velocità della stessa lunghezza v_0, tangenti in due punti diversi al cerchio, trasportiamo rigidamente il secondo vettore in modo che abbia lo stesso punto di applicazione del primo, e poi esaminiamo la direzione della differenza tra i due vettori, che è ottenuta congiungendo le "punte" dei due vettori, vediamo che tale direzione, nel limite nel quale il secondo punto sul cerchio tende a confondersi col primo, va a coincidere con quella del raggio del cerchio (vedi Fig. 3). Vediamo anche che il verso della differenza tra i due vettori è quello che punta verso il centro. Questa direzione e questo verso sono quelli di $\Delta\vec{v}(t)$ nel limite, e quindi abbiamo costatato che: *l'accelerazione istantanea in punto di un moto circolare uniforme è un vettore diretto lungo il raggio del cerchio passante per il punto, con verso che punta verso il centro della traiettoria.* Chiameremo l'accelerazione in un moto circolare *accelerazione centripeta*.

Avendo caratterizzato direzione e verso della velocità e dell'accelerazione in un moto circolare uniforme, andiamo adesso a studiarne in modo semplice le altre proprietà.

Innanzitutto, possiamo ricondurci ad un caso sostanzialmente unidimensionale considerando la velocità scalare (67) invece di quella vettoriale. Vediamo subito, infatti, che

$$v_s(t) \equiv |\vec{v}(t)|,$$

e che quindi la condizione di moto circolare uniforme si può scrivere come

$$v_s(t) = v_0 \; ; \tag{69}$$

vediamo allora che, in questi termini, la condizione (69) di moto circolare uniforme imposta sulla velocità scalare è formalmente identica a quella (27) imposta nel caso di moto rettilineo uniforme. Se quindi definiamo $s(t)$ la coordinata curvilinea misurata lungo il cerchio, con gli stessi metodi usati nel caso del moto rettilineo uniforme, otteniamo una legge oraria per la coordinata curvilinea della stessa forma (39) ottenuta in quel caso per la coordinata rettilinea:

$$s(t) = s(0) + v_0 \, t \; , \tag{70}$$

dove con $s(0)$ indichiamo il valore iniziale della coordinata curvilinea (misurata in un punto-origine sul cerchio da noi arbitrariamente fissato).

Abbiamo quindi ricavato una legge oraria per il moto circolare uniforme. Ma in questo moto vi sono altre caratteristiche ed altre definizioni da introdurre.

Innanzitutto, notiamo che *il moto circolare uniforme è un moto che si ripete uguale dopo ogni giro completo*; infatti, se il punto materiale parte da una certa posizione iniziale, esso ritorna in quella posizione dopo un giro, dopo due giri, ecc. Torniamo allora alla definizione di velocità scalare ed alla condizione di moto circolare uniforme (69); vediamo che questa definizione ci dice che la velocità è uguale a quella scalare media e che, qualsiasi sia l'arco di cerchio che consideriamo, se dividiamo questo arco per il tempo che il punto materiale impiega a percorrerlo otteniamo sempre la stessa velocità v_0. Allora, se scegliamo come arco, in particolare, l'intera circonferenza la cui lunghezza è $2\,\pi\,R$, ed indichiamo con T il tempo impiegato a percorrerla, abbiamo

$$v_0 = \frac{2\,\pi\,R}{T}, \tag{71}$$

da cui ricaviamo il tempo T:

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v_0}\,. \tag{72}$$

Chiameremo T il *periodo* del moto circolare uniforme, e poichè ogni giro sarà percorso nello stesso tempo pari al periodo, diremo che il moto circolare uniforme è un *moto periodico*. Al concetto di periodo possiamo associare il concetto di *frequenza* ν, definita come l'inverso del periodo

$$\nu = \frac{1}{T} \equiv \frac{v_0}{2\,\pi\,R}\,. \tag{73}$$

Vediamo che la frequenza ha dimensioni dell'inverso di un tempo: $[\nu] = [t^{-1}]$. vediamo anche che, dalla definizione, *la frequenza misura il numero di giri che il punto materiale compie nell'unità di tempo* (nel sistema MKS la frequenza la misureremo quindi in *giri (o cicli) al secondo*). Per capire meglio questo concetto basterà fare un semplice esempio. Consideriamo infatti il caso $T = 0.5\ s \equiv (1/2)\ s$; in questo caso, in 1 secondo il punto fa 2 giri, ed infatti $\nu = 1/(1/2)\ s^{-1} \equiv 2\ s^{-1}$.

Introduciamo ora un altro importante concetto, quelo di *velocità angolare*. Infatti, vediamo che nel moto circolare possiamo individuare la di un punto sul cerchio anche attraverso l'angolo *theta* che il raggio che passa per il punto forma, per esempio, con la verticale, cioè con l'asse Y (vedi Fig. 4). Se indichiamo con $\Delta\theta(t) \doteq \theta(t+\Delta t)-\theta(t)$ l'incremento dell'angolo nell'intervallo di tempo tra t e $t+\Delta t$, sembra allora naturale introdurre il concetto di velocità angolare $\omega(t)$ come

$$\omega(t) \doteq \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} \ . \tag{74}$$

Nel caso del moto circolare uniforme è chiaro che angoli uguali vengono percorsi in tempi uguali, cioè che $\omega(t)$ è costante:

$$\omega(t) = \omega \ , \tag{75}$$

dove con ω abbiamo indicato il valore della costante. Vediamo, innanzitutto, che la velocità angolare, come la frequenza, ha le dimensioni dell'inverso di un tempo:

$$[\omega] = [rad \cdot t^{-1}] \equiv t^{-1},$$

poichè il radiante (misura di un angolo) è adimensionale. Comunque, misureremo la velocità angolare in *radianti al secondo* ($rad\ s^{-1}$).

Vediamo anche che la relazione (75) e la definizione (74) danno una legge oraria per l'angolo della stessa forma (70) o (39) della coordinata curvilinea del moto circolare uniforme o della coordinata lineare del moto rettilineo uniforme:

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega\ t \ , \tag{76}$$

dove $\theta(0)$ indica ovviamente il valore iniziale dell'angolo.

Vogliamo ora trovare la relazione che lega la velocità angolare con le altre grandezze caratteristiche del moto circolare uniforme cioè v_0, R, e T (o ν).

A questo scopo, basta ricordare che, per definizione, l'ampiezza di un angolo *alpha* è legata alla lunghezza dell'arco di cerchio l da esso sotteso, ed al raggio R del cerchio, dalla relazione

$$\alpha \doteq \frac{l}{R}.$$

Poichè l'incremento $\Delta\theta(t)$ nel tempo Δt dell'angolo nel moto circolare uniforme sottende l'incremento $\Delta s(t)$ dell'arco di cerchio ottenuto nello stesso tempo, abbiamo la relazione

$$\Delta\theta(t) = \frac{\Delta s(t)}{R} . . \tag{77}$$

Allora, da questa relazione, e dalle relazioni (74) e (67), abbiamo

$$\omega(t) \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} \equiv = \frac{1}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} \equiv \frac{1}{R}\, v_s(t) \ , \tag{78}$$

e dalle relazioni (67), (69), valide nel moto circolare uniforme, otteniamo infine

$$\omega = \frac{v_0}{R} \ , \tag{79}$$

oppure

$$v_0 = \omega R \ , \tag{80}$$

D'altra parte, da questa relazione e dalle relazioni (71) e (73) otteniamo anche

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\,\nu \ . \tag{81}$$

Infine, vogliamo trovare l'espressione del modulo dell'accelerazione centripeta, che indicheremo con a_c, nel caso del moto circolare uniforme. Per non complicare i conti, possiamo ricorrere all'*analisi dimensionale*. Infatti, il moto circolare uniforme è completamente caratterizzato dalla coppia v_0, R, e quindi anche a_c deve essere esprimibile in termini di queste due quantità. Ora, essendo a_c un'accelerazione, abbiamo

$$[a_c] = [l\ t^{-2}] \equiv [(l\ t^{-1})^2\ l^{-1}] \equiv [v^2\ l^{-1}],$$

dove abbiamo moltiplicato e diviso per un'unità di lunghezza in modo da ricomporre una velocità al quadrato. Vediamo quindi che a_c ha le dimensioni di una velocità al quadrato diviso una lunghezza; poichè come velocità abbiamo a disposizione v_0 e come lunghezza il raggio R, possiamo dedurne che

$$a_c = \frac{v_0^2}{R} \ . \tag{82}$$

In realtà, possiamo solo affermare che questa relazione vale a meno di una costante adimensionale di proporzionalità, ma si può dimostrare che in realtà questa costante vale 1, e che quindi la relazione (82) è esatta. Naturalmente, usando le relazioni (79) e (81), abbiamo anche

$$a_c = \omega^2\ R \equiv \frac{4\pi^2}{R\,T^2} \equiv \frac{4\pi^2\nu^2}{R}\ . \tag{83}$$

Moto armonico.

Consideriamo ancora il moto circolare uniforme, e consideriamo la proiezione sul diametro lungo X ad un certo istante t della posizione del punto materiale che sta girando sul cerchio (vedi Fig. 5); questa proiezione non è altro, ovviamente, che la coordinata $x(t)$ del moto. Abbiamo indicato con $\theta(t)$ l'angolo formato con l'asse Y dal raggio che individua la posizione sul cerchio all'istante t. Quindi, la proiezione $x(t)$, essendo $\theta(t)$ l'angolo *opposto* al cateto $x(t)$ nel triangolo rettangolo in cui l'ipotenusa è il raggio R e l'altro cateto la verticale dal punto sull'asse X, abbiamo

$$x(t) = R\ \sin\theta(t)\ ; \tag{84}$$

se ora utilizziamo la relazione (76), e consideriamo che possiamo sempre scegliere per semplicità $\theta(0) = 0$, abbiamo

$$x(t) = R\ \sin(\omega\ t)\ . \tag{85}$$

Da questa relazione, vediamo che la proiezione $x(t)$ su X del moto circolare uniforme compie un *moto armonico*; tale moto, descritto dalla legge (85), vede l'oscillazione periodica intorno al punto $x(0) = 0$, dalla coordinata $x = -R$ alla coordinata $x = R$ con lo stesso periodo T del moto circolare uniforme. Ovviamente, anche la proiezione $y(t)$ del moto circolare uniforme sull'asse Y compie un moto armonico simile, descritto da

$$y(t) = R\ \cos(\omega\ t)\ . \tag{86}$$

Ritroveremo il moto armonico nella prossima lezione quando tratteremo l'oscillatore armonico

Esercizi

Esercizio 3.7): Un punto materiale compie un moto circolare uniforme di raggio R_1 con velocità scalare $v_1 = 5\ m\ s^{-1}$. Un secondo punto materiale

compie un moto circolare uniforme di raggio $R_2 = 2\ R_1$. Sapendo che i due cerchi vengono percorsi nello stesso periodo, calcolare la velocità scalare v_2 del secondo punto materiale.
Soluzione: Scriviamo l'Eq. (72) per i due periodi T_1, T_2 dei due punti materiali:

$$T_1 = \frac{2\ \pi\ R_1}{v_1},$$

$$T_2 = \frac{2\ \pi\ R_2}{v_2}.$$

Poiché il periodo è lo stesso, abbiamo $T - 1 = T_2$, ed uguagliando i secondi membri delle precedenti relazioni:

$$\frac{2\ \pi\ R_1}{v_1} = \frac{2\ \pi\ R_2}{v_2}.$$

Ricavando v_2 abbiamo infine

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1}\ v_1 = 2\ v_1 = 10\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 3.8): Un'automobile percorre un tratto rettilineo di 800 km in 10 ore. Sapendo che ha effettuato 3 soste di 20 minuti ciascuna, calcolare la velocità media tenuta. Esprimere il risultato in unità MKS.

Esercizio 3.9): Un'automobile parte da ferma e percorre un tratto rettilineo L con accelerazione costante pari a 4 $m\ s^{-2}$ in un tempo pari a 10 s. Calcolare la lunghezza del tratto L.

Esercizio 3.10): Un'automobile percorre un tratto rettilineo $L = 480\ km$ in 3 ore. Calcolare quale accelerazione costante deve tenere l'automobile per raggiungere in 100 m, partendo da ferma, una velocità pari alla velocità media tenuta nel tratto L. Esprimere il risultato in unità MKS.

Esercizio 3.11): Un'automobile parte da ferma e percorre un primo tratto rettilineo di 100 m con un'accelerazione costante di 8 $m\ s^{-2}$, e subito dopo percorre altri 100 m con un'accelerazione costante di 4 $m\ s^{-2}$. Calcolare la velocità raggiunta dopo i 200 m percorsi.

Esercizio 3.12): Un'automobile parte da ferma con un'accelerazione costante di 1 $m\ s^{-2}$ e percorre 100 m, dopo di che raddoppia l'accelerazione e percorre altri 100 m, poi raddoppia di nuovo l'accelerazione e percorre altri 100 m. Qual'è la sua velocità dopo i 300 m percorsi?

Esercizio 3.13): Un punto materiale compie un moto circolare uniforme di raggio $R = 10\ m$ con velocità angolare $\omega = 2\ rad\ s^{-1}$. Calcolare la velocità scalare e l'accelerazione centripeta.

Esercizio 3.14): Un punto materiale compie un moto circolare uniforme, percorrendo 1 giro in 4 secondi. Inoltre, l'accelerazione centripeta vale $a_c = 85\ m\ s^{-2}$. Calcolare la velocità scalare ed il raggio della traiettoria.

Esercizio 3.15): Un moto circolare uniforme viene percorso con una velocità scalare il cui valore è pari a quello della velocità raggiunta da un punto materiale in un moto rettilineo uniformemente accelerato, con partenza da fermo, e con accelerazione costante pari a 2 $m\ s^{-2}$; inoltre, la frequenza del moto circolare uniforme vale 0.125 s^{-1}. Calcolare il raggio e l'accelerazione centripeta.

Esercizio 3.16): Un punto materiale percorre con moto uniforme (velocit'a v_0) un tratto rettilineo di 100 m in 5 secondi, dopo di che dimezza la sua velocit—'a, e si immette su un circuito circolare, di raggio $R = 50\ m$, che percorre con velocit'a scalare costante pari a $v_0/2$. Calcolare il periodo e l'accelerazione centripeta.

Esercizio 3.17): Un punto materiale compie un moto circolare uniforme di circonferenza pari ad 80 m con velocità scalare $v_0 = 20\ m\ s^{-1}$. La proiezione $x(t)$ del punto sull'asse X compie intanto, come abbiamo visto, un moto armonico. Se il punto all'istante $t = 0$ parte dall'intersezione dell'asse Y con la traiettoria circolare, calcolare quanto vale la coordinata $x(t)$ dopo 0.5 secondi. E quanto vale la coordinata $y(t)$?

4 Dinamica del punto materiale

Finora abbiamo analizzato vari tipi di moto senza interessarci di come vengono generati. Nel momento in cui ci domandiamo *come* un certo tipo di moto viene generato, allora ci stiamo occupando della *dinamica* del punto materiale.

La dinamica del punto materiale, o di un sistema di punti materiali, è basata su tre *principi*, noti come il primo, il secondo ed il terzo principio della dinamica. Un principio consiste nel formulare un'ipotesi fisica generale, tradotta opportunamente in forma matematica, di cui poi viene verificata la validità generale per tutti i fenomeni all'interno di un settore della Fisica.

4.1 Primo principio della dinamica

Il primo principio della dinamica, o *Principio di Inerzia*, il cui concepimento si può originariamente far risalire a Galileo, stabilisce che;

In un sistema di riferimento inerziale un corpo non soggetto ad azioni esterne mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

In altre parole, se un corpo è fermo o si sta muovendo a velocità costante non può modificare il suo moto in assenza di una qualche azione esterna. La cosa risulta intuitiva, e verrà ulteriormente chiarita quando analizzeremo il secondo principio che, di fatto, contiene il primo come caso particolare. Tuttavia, resta da chiarire cosa si intende per *sistema inerziale*. Sostanzialmente, un sistema di rierimento inerziale è un sistema di riferimento Cartesiano nel quale vale il principio di inerzia; ma questa definizione sembra innescare un circolo vizioso. La soluzione a questo problema è trovare almeno *un* sistema di riferimento inerziale, e di definire tutti gli altri in funzione di questo. Il sistema di riferimento inerziale dal quale si parte è il cosiddetto *sistema di riferimento delle stelle fisse*; sembra naturale infatti rifarsi a corpi astronomici. Comunque, non ci soffermeremo su questo punto e sulle sottigliezze ad esso connesse; ci basta sapere che è possibile partire da un riferimento inerziale, per così dire, "primario" che è fissato rispetto a corpi astronomici. Tutti gli altri sistemi di riferimento inerziali vengono individuati secondo un opportuno criterio. Per poter enunciare questo criterio, dobbiamo prima capire come si trasformano le coordinate ed il moto di un punto materiale se passiamo da un sistema di riferimento Cartesiano ad un diverso riferimento Cartesiano che non coincide con il primo e/o si muove rispetto al primo.

Passaggio da un sistema di riferimento Cartesiano ad un altro, e composizione dei moti.

Supponiamo di descrivere il moto di un punto materiale in un sistema di riferimento Cartesiano di origine O e di assi X, Y, Z. In questo sistema Cartesiano il punto materiale avrà all'istante t una posizione $\vec{s}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$. Nel caso semplice nel quale il secondo sistema Cartesiano, di origine $O^{'}$, ha gli assi $X^{'}, Y^{'}, Z^{'}$ paralleli agli omologhi assi del primo, è abbastanza facile capire che la posizione $\vec{s}(t)^{'}$ del nostro punto materiale rispetto a questo nuovo sistema sarà

$$\vec{s}(t)^{'} = \vec{s}(t) + \vec{s}_{O'O}(t),$$

dove con $\vec{s}_{O'O}(t)$abbiamo indicato la posizione, nel secondo sistema di riferimento, dell'origine del primo sistema di riferimento, cioè il vettore che ha modulo pari alla distanza tra le due origini O e $O^{'}$, ed è diretto secondo la loro congiungente nel verso che va da $O^{'}$ a O. Il caso nel quale gli assi del secondo sistema non sono paralleli a quelli del primo richiede qualche complicazione formale in più ma non è essenziale ai fini del nostro ragionamento; quindi, lo tralasceremo. Si noti che abbiamo sempre indicato esplicitamente l'eventuale dipendenza dal tempo in tutti i vettori-posizione $(\vec{s}(t), \vec{s}(t)^{'}, \vec{s}_{O'O}(t))$, perchè questo ci permette di considerare anche il caso che non solo il punto materiale si stia muovendo nel primo sistema di riferimento, ma anche che il secondo sistema di riferimento si stia muovendo rispetto al primo; infatti, ci dobbiamo domandare come si presenterà il moto del punto se passiamo dal primo al secondo sistema di riferimento, cioè come si compongono i moti, rispettivamente, del punto nel primo riferimento, e del secondo riferimento rispetto al primo. Naturalmente, per i nostri scopi sarà sufficiente considerare alcuni casi semplici. In particolare, considereremo solo il caso in cui non solo il secondo riferimento ha gli assi paralleli al primo, ma, se si muove, il suo moto è parallelo all'asse $X^{'}$ (e, quindi, anche all'asse X del primo riferimento). Si pensi, per esempio, al primo riferimento fisso al suolo, con l'asse X coincidente con un binario ferroviario in un tratto rettilineo; e al secondo riferimento solidale con un treno che sta muovendosi sul binario, con l'asse $X^{'}$ parallelo al treno (e quindi al binario). Si capisce che, dal punto di vista del moto, quello che succede lungo gli assi Y, Y' e Z, Z' passando da un sistema di riferimento all'altro non è rilevante: contano solo gli assi X e X'. Procediamo ora con i vari casi.

- 1° caso: il punto materiale è fermo nel primo riferimento, ed il secondo riferimento è fermo rispetto al primo. Allora, nessuno dei vettori posizione dipenderà dal tempo, ed il punto materiale sarà fermo, cioè in stato di quiete, anche nel secondo riferimento. Si trasformeranno solo le sue coordinate.

- 2° caso: il punto materiale è fermo nel primo sistema di riferimento, ma il secondo sistema di riferimento si muove rispetto al primo con velocità costante parallela all'asse X. Nel nostro esempio del treno, il punto materiale è un bagaglio che sta fermo sulla banchina della stazione (primo sistema di riferimento) mentre passa un treno a velocità costante (secondo sistema di riferimento). Allora, nel secondo riferimento (il treno) il punto materiale (il nostro bagaglio) non sarà fermo, ma avrà una velocità pari in modulo a quella del treno, ma opposta in verso: infatti, ad un viaggiatore affacciato ad un finestrino sembrerà che il bagaglio *si allontani* alla velocità (in modulo) del treno. Conclusione: uno stato di quiete rispetto ad un sistema di riferimento viene trasformato, in un secondo sistema di riferimento che si muove di moto uniforme rispetto al primo, in un moto uniforme.

- 3° caso: il punto materiale si muove nel primo sistema di riferimento di moto uniforme parallelo all'asse X, ed il secondo sistema di riferimento si muove a sua volta rispetto al primo con velocità costante anch'essa parallela all'asse X. Per esempio, abbiamo un viaggiatore che corre sulla banchina mentre passa il treno. Allora, per ottenere la velocità del viaggiatore nel secondo sistema di riferimento (che si sta muovendo con il treno) basterà sommare (con i segni relativi!) la sua velocità nel primo riferimento con la velocità del secondo riferimento rispetto al primo. Vediamo che può accadere. Se il viaggiatore riesce a correre alla stessa velocità del treno e nella direzione in cui procede il treno, allora nel secondo sistema di riferimento (quello del treno) il viaggiatore risulterà *fermo*: quindi, il moto uniforme del secondo riferimento ha trasformato il moto uniforme del viaggiatore (rispetto al primo riferimento) in uno stato di quiete. Se il viaggiatore, invece, corre con una velocità diversa da quella del treno, sia che vada nella direzione in cui sta andando il treno, sia nella direzione opposta, rispetto al riferimento del treno avrà ancora una velocità uniforme (un po' più bassa di quella che aveva nel primo riferimento se corre nella direzione del treno, un po' più alta se corre nella direzione opposta al treno, ma comunque uniforme): quindi, in questo caso il moto del secondo riferimento rispetto al primo ha trasformato un moto uniforme in un altro moto uniforme (anche se con velocità diversa).

La conclusione (che vale anche nel caso generale in cui il moto del secondo riferimento non è parallelo all'asse X) è che *stati di quiete o di moto uniforme un sistema di riferimento Cartesiano vengono trasformati in altri stati di quiete o di moto uniforme in un secondo sistema di riferimento Cartesiano fermo o in moto uniforme rispetto al primo.*

In base a questa considerazione possiamo enunciare quanto segue:

Dato un sistema di riferimento inerziale, tutti gli altri sistemi di riferimento inerziali sono quei sistemi di riferimento Cartesiani la cui origine si muove al più di moto rettilineo uniforme rispetto all'origine del sistema di riferimento originario.

In altre parole, se il sistema di riferimento originario è inerziale, e quindi lo stato di quiete o di moto uniforme di un corpo permangono in assenza di azioni esterne, poichè tale stato di quiete o di moto uniforme viene trasformato in un altro stato di quiete o di moto uniforme in un secondo sistema di riferimento che si muove di moto uniforme rispetto al primo, anche nel secondo sistema varrà il principio di inerzia, ed esso sarà quindi inerziale.

Capiremo meglio anche questo punto quando introdurremo il secondo principio, e mostreremo che esso implica il *Principio di Relatività Galileana.*

4.2 Il secondo principio della dinamica

Stato di un sistema e sua evoluzione dinamica.

Con il secondo principio della dinamica entriamo nel vivo della problematica fisica. Infatti, una volta individuato il sistema naturale da studiare, uno degli scopi principali della Fisica è quello di determinarne *l'evoluzione nel tempo.* A questo punto, dobbiamo naturalmente dare consistenza fisico-matematica a questo concetto, e ora lo faremo prendendo in considerazione il sistema costituito da un singolo punto materiale, che costituisce ovviamente il più semplice sistema meccanico. Innanzitutto, dobbiamo dare consistenza al termine "evoluzione nel tempo del sistema"; intuitivamente, questo termine indica il fatto che riusciamo a "conoscere" il sistema in vari istanti successivi. Ma tutti i termini contenuti in questa affermazione vanno opportunamente definiti e formalizzati. Cominciamo col definire cosa si intende in Fisica per "conoscere un sistema ad un certo istante". Definiamo quindi il concetto di *stato di un sistema*:

Lo stato di un sistema ad un certo istante è l'insieme di tutte le grandezze fisiche che sono necessarie per descrivere completamente il sistema all'istante scelto.

È chiaro da questa definizione che la determinazione delle grandezze che definiscono lo stato di un sistema è una cosa assolutamente non banale, e che di fatto definire attraverso delle grandezze lo stato di un sistema equivale, sostanzialmente, a definire il sistema stesso. Comunque, nel caso di un punto materiale lo stato è definito in maniera semplice nel modo seguente:

(***) Lo stato di un punto materiale ad un certo istante è definito dalla coppia costituita dalla posizione e dalla velocità del punto in quell'istante.

Questa definizione è molto intuitiva: infatti, per fare un esempio banale, se una pattuglia della polizia deve segnalare ad un'altra pattuglia una macchina sospetta da intercettare tipicamente dice "il veicolo è all'incrocio tra la terza e la settima strada (posizione), e si dirige lungo la nona strada verso il centro a circa 60 all'ora (velocità in direzione, verso e modulo)". Questo quindi è lo "stato" del veicolo sospetto nel momento in cui la prima pattuglia lo ha intercettato.

Quindi, lo stato di un punto materiale ad un certo istante t è definito dalla coppia $(\vec{s}(t), \vec{v}(t))$ data dalla posizione e dalla velocità del punto al tempo t.

Avendo definito (almeno nel caso del punto materiale) cosa intendiamo per "conoscere il sistema ad un certo istante", dobbiamo ora definire il concetto di "evoluzione nel tempo del sistema". Anche questo concetto può essere definito in modo che risulti puttosto intuitivo. Sostanzialmente, lo abbiamo già accennato nella sezione della cinematica. Infatti, in quel contesto abbiamo visto che è sempre necessario non solo stabilire un origine ed un sistema di riferimento, ma anche scegliere un *tempo iniziale*. Non solo, ma abbiamo anche visto che la soluzione dei problemi della cinematica richiede delle *condizioni iniziali*, e che queste condizioni sono la posizione all'istante iniziale, e la velocità all'istante iniziale. Ma la coppia (posizione iniziale, velocità iniziale) costituisce, secondo la nostra definizione di stato del punto materiale, lo *stato iniziale del sistema*. Quindi, se fissiamo convenzionalmente a zero l'istante iniziale prescelto (e lo chiamiamo "presente"), e consideriamo gli istanti $t > 0$ (e li chiamiamo "futuro"), il problema della dinamica del punto materiale diventa il seguente:

Qual'è la legge fisica generale che, dato lo stato iniziale di un punto materiale, permette di calcolare lo stato del punto a tutti gli istanti successivi?.

(Cioè, quale legge mi permette, conoscendo il presente, di calcolare il futuro?).

È forse opportuno ricordare, per essere più precisi, che tale legge deve permettere, una volta assegnata la coppia $(\vec{s}(0), \vec{v}(0))$ (posizione-velocità iniziali) di calcolare la coppia $(\vec{s}(t), \vec{v}(t))$ ad ogni istante $t > 0$. È anche opportuno rilevare che, in realtà, quanto appena affermato non è esaustivo, perchè la legge della dinamica permette di calcolare lo stato del sistema non solo per $t > 0$, ma per TUTTI gli istanti t differenti da 0, *compresi quelli "passati"* (cioè $t < 0$). Su questo torneremo brevemente in seguito.

La legge di Newton.

Siamo ora pronti ad introdurre il secondo principio della dinamica, espresso attraverso la *Legge di Newton*. Le grandezze fisiche che entreranno in questa legge saranno la *forza* che viene esercitata sul punto materiale che stiamo considerando, la *massa* del punto materiale, e l'*accelerazione* del punto materiale. Di queste tre grandezze, l'accelerazione è già stata definita all'interno della cinematica:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \frac{d^2\vec{s}(t)}{dt^2}.$$

Le altre due grandezze (forza e massa) le abbiamo nominate all'inizio quando abbiamo introdotto i sistemi di unità di misura e l'analisi dimensionale, ma ora dobbiamo definirle operativamente. Diamo innanzitutto una definizione della "forza". Per fare questo, dobbiamo, come per ogni grandezza fisica, associare, almeno in linea di principio, a tale definizione un metodo che permetta di misurare una forza. Una possibile definizione è la seguente:

La forza é quella grandezza fisica vettoriale che determina l'allungamento di materiali filiformi se ad essi applicata. La direzione ed il verso della forza *sono definiti dalla direzione e dal verso dell'allungamento del materiale, e l'intensità della forza è misurata attraverso l'entità dell'allungamento.*

In realtà, è chiaro che questa definizione operativa si presenta come piuttosto limitata, ma per ora è sufficiente.

Se indichiamo con $\vec{F}$ la forza, a questo punto possiamo scrivere la legge di Newton come:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}\,. \tag{87}$$

Questa relazione va ora opportunamente *interpretata*. Il primo membro, la forza, rappresenta la *causa* del moto; la forza si presenta quindi come quella grandezza fisica che è in grado di modificare il moto di un corpo (per esempio, di metterlo in movimento se è fermo, o di cambiare la sua velocità se è già in moto). Vediamo quindi che quelle che nel primo principio chiamiamo "azioni esterne" altro non sono che forze. Nel secondo membro, l'accelerazione costituisce l'*effetto* generato dalla causa (la forza). La legge di Newton, come spesso accade, connette semplicemente la causa al suo effetto, e si può enunciare nel moto seguente:

Una forza esercitata su un punto materiale genera un'accelerazione del punto alla quale la forza risulta direttamente proporzionale.

Vediamo che nella legge di newton compare anche la quantità m, che chiamiamo *massa* del corpo, e che è definita come *la costante di proporzionalità tra la forza e l'accelerazione da essa generata.*

Un'enunciato più preciso della legge di Newton è allora:

Una forza esercitata su un corpo (punto materiale) genera un'accelerazione del punto alla quale la forza risulta direttamente proporzionale attraverso una costante di proporzionalità (massa) che dipende dal corpo stesso.

Vediamo che, a parità di forza, l'accelerazione acquistata dal corpo è tanto più piccola quanto più grande è la sua massa. In altre parole, la massa tende a generare una resistenza, o *inerzia*, del corpo all'azione della forza; chiameremo quindi la massa definita dalla legge di Newton anche *massa inerziale* del corpo.

A questo punto, dobbiamo analizzare le dimensioni di una forza, e definira la sua unità di misura. Dalla legge di Newton vediamo che le dimensioni della forza sono

$$[F] = [m \cdot a] = [m \cdot l \cdot t^{-2}].$$

Nel sistema MKS la forza ha quindi le dimensioni di Kilogrammo per metro diviso secondi a meno due; definiamo allora l'unità di forza in questo sistema, che chiameremo *Newton* ed indicheremo con il simbolo N, come

$$1\ N \doteq 1\ Kg \cdot 1\ m \cdot 1\ s^{-2}. \tag{88}$$

È necessario ora precisare, in vista dell'uso della legge di Newton per calcolare la dinamica, che la relazione (87) è. in generale, una relazione *vettoriale.* Per poterla utilizzare, si deve ricordare che un vettore, in un riferimento Cartesiano, è scomponibile nelle sue tre componenti lungo i tre assi. Se indichiamo quindi con F_x, F_y, F_z le componenti della forza, e con a_x, a_y, a_z le componenti dell'accelerazione, l'Eq. (87) *è equivalente al sistema costituito dalle tre equazioni unidimensionali*

$$F_x = m\ a_x\ ,$$

$$F_y = m\ a_y\ ,$$

$$F_z = m\ a_z\ , \tag{89}$$

ed è in questa forma, come vedremo, che può essere utilizzata. D'altra parte, essendo le forze vettori, se su un punto materiale agiscono più forze, la legge di Newton per questo corpo deve contenere al primo membro la *forza totale* agente sul corpo, ovvero il vettore che si ottiene sommando vettorialmente tutte le forze che agiscono sul corpo.

Esercizio 4.1): Decomporre in componenti una forza di modulo pari a $3N$, posta nel piano (X, Y), e che forma con l'asse X un angolo di 30°.
Soluzione: Stiamo considerando un problema bidimensionale. Poichè la componente lungo X della forza è la proiezione del vettore forza su questo asse, e quindi il cateto adiacente all'angolo di 30° che il vettore forma con l'asse, in un triangolo rettangolo di cui il modulo della forza è l'ipotenusa, abbiamo, usando le formule trigonometriche a suo tempo introdotte, che

$$F_x = |\vec{F}| \cos\ 30° = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ N,$$

mentre

$$F_y = |\vec{F}| \sin\ 30^\circ = \frac{3}{2}\ N.$$

La legge di Newton per calcolare la dinamica del punto materiale.

Abbiamo già puntualizzato che il primo membro della legge di Newton (87) contiene la causa del moto (la forza) ed il secondo membro l'effetto (l'accelerazione). Per poter calcolare l'evoluzione dinamica dello stato del punto materiale, è necessario inserire al primo membro, volta per volta, la *legge della forza*. Infatti, una forza può avere diverse origini: può essere causata dalla compressione di una molla, oppure dall'attrazione gravitazionale tra due corpi, o da altro. In ognuno di questi casi il vettore che descrive la forza assumerà una forma diversa. Per esempio, nel caso della molla la forza avrà la forma $\vec{F} = -\ k\ \vec{s}$, cioè sarà proporzionale allo spostamento (rispetto alla posizione di equilibrio), ed avrà verso opposto ad esso (forza elastica di richiamo); nel caso di attrazione gravitazionale avremo $\vec{F} = (G\ m\ M/r^2)\ \hat{r}$, cioè la forza (attrattiva) che il corpo di massa M esercita a distanza r sul nostro punto materiale di massa m è diretta lungo la congiungente i due punti materiali, da M a m (questo è espresso dal versore $\hat{r}$ che ha, appunto, questa direzione e verso), è direttamente proporzionale alle due masse ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le masse. Queste sono le leggi della forza nel caso della molla o dell'attrazione gravitazionale. In generale la legge della forza sarà definita determinando come la forza dipende dalle coordinate e/o da altre caratteristiche, e ci permetterà di inserire al primo membro dell'Eq. (87) una funzione nota. A questo punto, ricavando dalla (87) l'accelerazione, abbiamo

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}}{m}\ , \tag{90}$$

e ricordando che l'equazione vettoriale (87) è equivalente al sistema di equazioni (89), possiamo riscrivere questa relazione come

$$a_x = \frac{F_x}{m}\ ,$$

$$a_y = \frac{F_y}{m}\ ,$$

$$a_z = \frac{F_z}{m} \ . \tag{91}$$

Ricordando, infine, che le componenti lungo gli assi dell'accelerazione sono ovviamente

$$a_x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \ ; \ a_y(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \ ; \ a_z(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2},$$

le relazioni (92) diventano

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{F_x}{m} \ ,$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{F_y}{m} \ ,$$

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = \frac{F_z}{m} \ . \tag{92}$$

Poichè i secondi membri di queste equazioni sono funzioni assegnate delle coordinate x, y, z, possiamo affermare che:

La legge di Newton equivale a tre equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine per le funxioni incognite $x(t), y(t), z(t)$.

Quindi, se risolviamo tali equazioni otteniamo le coordinate $x(t), y(t), z(t)$ del punto materiale e le loro derivate prime nel tempo; in altri termini, otteniamo ad ogni istante la posizione $[\vec{s}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))]$ e la velocità $[\vec{v}(t) \equiv (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \equiv (dx(t)/dt, dy(t)/dt, dz(t)/dt)]$ del punto materiale, cioè, secondo la precedente definizione (***), lo *stato* ad ogni istante. Ricordiamo ora che, in sede di discussione della cinematica, abbiamo costatato che le equazioni differenziali del secondo ordine, come quelle dell'Eq. (92), possono essere risolte dopo aver assegnato le due condizioni iniziali. Quindi, per risolvere la prima dobbiamo assegnare $(x(0), v_x(0))$, per risolvere la seconda dobbiamo assegnare $(y(0), v_y(0))$, per risolvere la terza dobbiamo assegnare $(z(0), v_z(0))$; ma questo equivale a dire che le tre equazioni, e quindi l'equazione vettoriale (90), potranno essere risolte assegnando la coppia di vettori $\vec{s}(0) \equiv (x(0), y(0), z(0)), \vec{v}(0)(v_x(0), v_y(0), v_z(0))$, cioè la posizione e la velocità iniziali del punto, cioè lo *stato iniziale*. Possiamo allora riassumere quanto detto nella seguente affermazione:

Assegnato lo stato del sistema in un certo istante ("iniziale"), la legge di Newton permette di determinare lo stato del sistema ad ogni altro istante.

Ora, prima di procedere a mostrare in alcuni casi semplici come la legge di Newton permetta di determinare la dinamica di un sistema, osserviamo che la Legge di Newton permette in principio di calcolare *esattamente* o, con altro termine, *deterministicamente* lo stato di un punto materiale ad ogni altro istante, una volta assegnato lo stato in un certo istante; quindi, la Meccanica del punto materiale (e la Meccanica più in generale) viene definita una *teoria deterministica*.

Osserviamo inoltre un'altra cosa: *il fatto che una forza sia proporzionale all'accelerazione, e non alla velocità, del corpo al quale è applicata, costituisce un'ipotesi assolutamente non banale e contraria all'esperienza comune.* Infatti, noi ci aspettiamo che se una persona raddoppia la forza della vogata su una barca, quello che raddoppia è la velocità della barca e non la sua accelerazione: *e questo è assolutamente vero!*. Come si spiega allora questa apparente contraddizione? Il fatto è che, nel caso della barca, ed in tutta la nostra esperienza quotidiana, i corpi subiscono *l'azione dell'attrito* (o della viscosità); in queste condizioni vale quindi la cosiddetta *Fisica Aristotelica* e, almeno in buona approssimazione, la forza è effettivamente proporzionale alla velocità. Tuttavia già (in forma particolare) Galileo, e poi Newton, ebbero la grande intuizione che le leggi della Meccanica dovessero essere formulate in assenza di attrito, il quale può essere poi aggiunto come complicazione in un secondo momento. In realtà, questa loro intuizione nasceva dal fatto che questi scienziati erano interessati in modo primario a studiare i moti degli astri, *moti nei quali l'attrito è assolutamente assente.* Se si considerano moti senza attrito, allora vale la legge di Newton e la forza risulta proporzionale all'accelerazione!.

Concludiamo infine con una precisazione: lo stato all'istante t di un punto materiale di massa m, posizione $\vec{s}(t)$ e velocità $\vec{v}(t)$ è più propriamente definito assegnando la coppia formata da posizione e *momento*, e non quella posizione-velocità. Il momento , o *quantità di moto*, $\vec{p}(t)$ nel nostro caso è definito come

$$\vec{p}(t) = m \cdot \vec{v}(t),$$

e quindi lo stato è definito da $(\vec{s}(t), \vec{p}(t))$. Nei casi semplici che stiamo considerando, però, questa definizione è sostanzialmente equivalente a quella data attraverso la coppia $(\vec{s}(t), \vec{v}(t))$.

Applicazione della legge di Newton in casi semplici.

Ora illustreremo come la legge di Newton risolva il problema dell'evoluzione dinamica nel caso di sistemi semplici, cioè nei casi in cui la legge della forza ha una forma semplice.

a) Caso di forza nulla.

Supponiamo che la forza che agisce sul nostro punto materiale sia nulla; siamo, cioè, nel caso del principio di inerzia nel quale non vi sono azioni esterne sul corpo. Mettiamo allora $\vec{F} = 0$ al primo membro della legge di Newton (87), ed otteniamo

$$\vec{a}(t) = 0,$$

cioè che l'accelerazione ad ogni istante deve essere nulla.

Se l'accelerazione è nulla, allora sono ulle le sue tre componenti; quindi abbiamo

$$a_x = 0 \; ,$$

$$a_y = 0 \; ,$$

$$a_z = 0 \; , \tag{93}$$

che non è altro che l'Eq. (92) con le componenti della forza messe a zero. Ricordando che l'accelerazione è la derivata prima della velocità, riscriviamo questa relazione per componenti come

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \; ,$$

$$\frac{dv_y(t)}{dt} = 0 \ ,$$

$$\frac{dv_z(t)}{dt} = 0 \ . \tag{94}$$

Ricordando infine che le funzioni la cui derivata prima è nulla sono le costanti, ne ricaviamo che le tre componenti della velocità sono costanti, e quindi che il vettore velocità è costante. Essendo in particolare costante anche la direzione della velocità, possiamo, per semplificare le cose, scegliere il sistema di riferimento con l'asse X parallelo proprio a tale direzione; ciò significa che rimane diversa da zero solo la componente v_x della velocità, la quale è costante, e che il moto si svolge solo lungo la direzione X. Abbiamo scoperto allora che una forza nulla genera un moto con velocità costante, e quindi *un moto rettilineo uniforme*; vale allora la legge oraria (70), ricavata nell'ambito della cinematica, che qua riscriviamo per maggiore chiarezza:

$$x(t) = x(0) + v_0 \, t \ , \tag{95}$$

dove v_0 indica il valore costante della velocità (con unica componente lungo X nel nostro riferimento). Si noti che qui abbiamo scoperto che *la causa di un moto uniforme è l'assenza di forze.* Essendo ovviamente v_0 il valore che la velocità aveva all'inizio, ecco che abbiamo scoperto che il primo principio è una conseguenza del secondo, che ci dice che in assenza di forze il corpo segue la legge (95); il che significa che se il corpo era in quiete (cioè $v_0 = 0$) allora rimane in quiete, mentre se procedeva con moto uniforme (cioè $v_0 \neq 0$) allora continua a procedere con moto uniforme.

b) Caso di forza costante.

Consideriamo il caso in cui la forza che agisce sul punto materiale sia costante; allora la legge (87) ci dice che *anche l'accelerazione è costante*, e pari a

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \tag{96}$$

dove ora $\vec{F}$ è un vettore costante. Analogamente a quanto abbiamo fatto nel caso precedente, essendo anche la direzione dell'accelerazione costante possiamo scegliere l'asse X parallelo all'accelerazione stessa; sopravvive quindi solo la componente a_x che indicheremo semplicemente con a, con

$$a = \frac{F_x}{m} \equiv \frac{F}{m}, \tag{97}$$

ed il moto è evidentemente unidimensionale, cioè è un moto rettilineo uniformemente accelerato. Abbiamo quindi scoperto che: *un moto rettilineo uniformemente accelerato viene generato da una forza costante.* La soluzione di questo problema dinamico, date le condizioni iniziali $x(0), v(0)$ su posizione e velocità, è allora la legge oraria (54) ricavata nella Lezione 3 appunto per il moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$x(t) = x(0) + v(0)\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2 \ , \tag{98}$$

con la relazione tra la velocità e l'accelerazione data (vedi sempre Lezione 3) da

$$v(t) = v(0) + a\, t \ . \tag{99}$$

Se inseriamo la relazione (97), abbiamo infine

$$x(t) = x(0) + v(0)\, t + \frac{1}{2}\, \frac{F}{m}\, t^2 \ , \tag{100}$$

e

$$v(t) = v(0) + \frac{F}{m}\, t \ . \tag{101}$$

Esercizio 4.2): Un punto materiale di massa $m = 2Kg$ percorre, sotto l'effetto di una forza costante, e partendo da fermo, $10m$ in $2s$. Calcolare l'intensità della forza.
Soluzione: Abbiamo visto che una forza costante, di intensità F, genera un moto uniformemente accelerato dato dalla legge oraria (100). Coi dati a nostra disposizione possiamo intanto calcolare l'accelerazione $a = F/m$. Infatti, scelto l'origine del moto in maniera che $X(0) = 0$, il fatto che il corpo parta da fermo ci dice anche che $v(0) = 0$, e l'Eq. (100) diventa

$$x(t) = \frac{1}{2}\, \frac{F}{m}\, t^2.$$

Sapendo poi che a $t = 2\ s$ il corpo ha percorso 10 metri (cioè $x(2) = 10\ m$, ponendo a primo membro dell'equazione questo valore numerico e a secondo membro $t = 2$, abbiamo

$$10 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot 2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot 4 = 2 \cdot \frac{F}{m}.$$

Poichè $m = 2Kg$, abbiamo

$$10 = 2 \cdot \frac{F}{2},$$

cioè $F = 10\ N$.

c) Moti bidimensionali e moto del proiettile.

Finora abbiamo ricostruito i moti rettilinei (uniforme e uniformemente accelerato) che abbiamo già incontrato nella sezione della cinematica, e che sono moti unidimensionali. Ora introduciamo due casi di moti bidimensionali. Il primo caso lo introduciamo come esercizio per mostrare che a volte la descrizione in più di una dimensione è solo una complicazione di un moto che può essere descritto, scegliendo meglio il sistema di riferimento, come moto unidimensionale; il secondo caso, il moto del proiettile, è invece un caso genuinamente bidimensionale costruito tramite scomposizione e ricomposizione di moti lungo gli assi.

Esercizio 4.3): Calcolare la traiettoria di un punto materiale di massa $m = 1\ Kg$, soggetto alla forza dell'esercizio 1, e che parte da fermo dall'origine degli assi.
Soluzione: Per calcolare la legge oraria dobbiamo risolvere le equazioni (92) per le componenti; in questo caso bidimensionale, però, la componente lungo Z non compare, e quindi dobbiamo risolvere solo le due equazioni

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{F_x}{m},$$

e

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{F_y}{m}.$$

D'altra parte, la forza è costante, e così anche le sue componenti lungo X e Y; quindi, le due equazioni sopra descrivono moti unidimensionali generati lungo X e lungo Y rispettivamente dalle forze costanti, calcolate nell'esercizio 1, $F_x = 3\sqrt{3}/2$ e $F_y = 3/2$. Sappiamo allora dal punto b) che i due moti unidimensionali sono moti uniformemente accelerati, con accelerazioni date rispettivamente $a_x = F_x/m \equiv F_x/1 = 3\sqrt{3}/2\ m\ s^{-2}$ e $a_y = F_y/m \equiv F_y/1 = 3/2\ m\ s^{-2}$; tenendo presente che il corpo parte dall'origine degli assi, e quindi che $x(0) = y(0) = 0$, e che parte da fermo, e quindi che $v_x(0) = v_y(0) = 0$, i due moti sono descritti da:

$$x(t) = \frac{1}{2}\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\,t^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,t^2,$$

e da

$$y(t) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,t^2 = \frac{3}{4}\,t^2.$$

Adesso dobbiamo ricavare la traiettoria che, essendo il moto unidimensionale, si svolgerà nel piano XY, e sarà descritta ricavando come la coordinata y del punto dipende dalla coordinata x; per fare questo, basta ricavare il tempo t (o, in questo caso, il suo quadrato t^2) dalla prima equazione in funzione di x, e sostituire questo risultato al secondo membro dell'altra equazione (cioè, basta, *eliminare* il tempo tra le due equazioni. Procediamo. Dalla prima relazione abbiamo

$$t^2 = \frac{4}{3\sqrt{3}}\,x,$$

e, sostituendo nella seconda, otteniamo

$$y = \frac{3}{4}\,\frac{4}{3\sqrt{3}}\,x = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Risulta quindi che la traiettoria è un *retta*. Questo ci dice che la descrizione in due dimensioni di questo moto è ridondante ed inutilmente complicata; ed infatti, ci ricordiamo che nel punto b) abbiamo detto che, se la forza è costante , allora conviene scegliere uno degli assi, per esempio l'asse X lungo la direzione della forza, in modo da poter descrivere il moto come effettivamente è, cioè un moto rettilineo e quindi unidimensionale. Nel caso di questo esercizio conviene quindi mettersi in un nuovo sistema di riferimento, con l'origine coincidente con quella del sistema di riferimento orginario, ma con l'asse X' lungo la direzione della forza, e quindi formante un angolo di $30°$ con l'originale asse X (naturalmente, anche il nuovo asse YX' risulterà ruotato dello stesso angolo rispetto al vecchio asse Y). A questo punto, l'unica componente della forza è lungo X' e coincide con il suo modulo di

$3\ N$. L'accelerazione lungo $X^{'}$, essendo la massa unitaria, coinciderà numericamente col modulo della forza e varrà quindi $3\ m\ s^{-2}$, e, chiamata $x^{'}(t)$ la coordinata del punto lungo l'asse $X^{'}$ all'istante t, la legge oraria sarà semplicemente data da

$$x^{'}(t) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot t^2 = \frac{3}{2}\, t^2.$$

Premessa al moto del proiettile: la forza di gravità.

Prima di procedere, dobbiamo introdurre una forza molto importante: la forza di gravità. Abbiamo già introdotto tra gli esempi di legge della forza la legge della gravitazione universale che si esercita tra due corpi dotati di massa, e che ha la forma

$$\vec{F} = G\, \frac{m\ M}{r^2} \hat{r},$$

dove i simboli sono stati già spiegati in precedenza. Ora, la forza di gravità è la forza di attrazione che la Terra esercita su un corpo dotato di massa che si trovi in prossimità della sua superficie; con questo intendiamo che, se $R_T \approx 6500\ Km \equiv 6.5 \cdot 10^6\ m$ è il raggio della Terra, e d denota la distanza del corpo considerato dalla superficie terrestre, dobbiamo essere nelle condizioni $d << R_T$ (cioè condizioni nelle quali la distanza d è praticamente trascurabile rispetto ad R_T). Adesso, ritorniamo alla legge di gravitazione universale, e notiamo che essa é scritta per due *punti materiali* di masse m ed M. Ora, il problema è che la Terra può essere considerata un punto materiale se l'altra massa che con essa interagisce è, per esempio, il Sole; infatti, la distanza Terra-Sole è di circa $150 milioni$ di chilometri, cioè circa $1.5 \cdot 10^{11}$, ed il raggio della Terra è trascurabile rispetto ad essa. Ma sicuramente non possiamo adottare questa approssimazione nel caso di interazione con un corpo piccolissimo prossimo alla sua superficie. Si può mostrare, però (con un argomento dello stesso tipo che incontreremo quando faremo il *Teorema di Gauss* in elettrostatica) che, dal punto di vista della gravitazione, ogni corpo sferico di massa M può essere sostituito a tutti gli effetti con un punto materiale posto nel centro del corpo sferico, e di massa pari alla massa totale M. Poichè agli effetti della forza di gravità la Terra può essere considerata, con buona approssimazione, sferica, allora un corpo di massa m vicino alla sua superficie "vede" la forza di attrazione esercitata da un punto materiale posto al centro della Terra e nel quale è concentrata tutta la massa terrestre M_T. Ora, il corpo a distanza d dalla superficie terrestre, dista $d + R_T \approx R_T$ dalcentro della Terra. Quindi, esso risente di una forza, diretta verso il centro della Terra e quindi *verticale verso il basso*, la cui intensità è ottenuta dalla legge di gravitazione sostituendo a M il valore della $M_T$massa Terrestre (che si può ottenere in principio moltiplicando il volume della Terra per la sua densità media), e a r il valore del raggio terrestre R_T:

$$|\vec{F}| \approx G\,\frac{m\,M_T}{{R_T}^2} \equiv m \cdot \left(G\,\frac{M_T}{{R_T}^2}\right).$$

In questa relazione abbiamo alla fine messo in evidenza che, nella nostra approssimazione nella quale la distanza d di un corpo dalla superficie terrestre è trascurabile rispetto al raggio terrestre, e quindi *tutti i corpi vengono attratti alla stessa distanza R_T dal centro in cui è concentrata tutta la massa*, il modulo della forza di gravitá risulta essere *il prodotto $|\vec{F}| m\, g$ della massa m del corpo considerato per una costante g uguale per tutti i corpi e che vale*

$$g = G\,\frac{M_T}{{R_T}^2}.$$

Se ora ci ricordiamo che vale la legge di Newton che ci dice che $|\vec{F}| = m\,|\vec{a}|$, dove $\vec{a}$ è l'accelerazione, vediamo che $g = |\vec{a}|$, cioè che *tutti i corpi prossimi alla superficie terrestre vengono accelerati a a causa dell'attrazione terrestre con la stessa accelerazione di modulo pari a g, diretta perpendicolarmente alla superficie terrestre e verso il suo centro.* Indichiamo con $\vec{g}$ il vettore accelerazione così definito; tale vettore è noto come *accelerazione di gravità.* Riassumendo, dato un corpo di massa m prossimo alla Terra, la forza di gravità ha la forma

$$\vec{F} = m\vec{g}. \tag{102}$$

Il modulo di g può essere misurato, e, nel sistema MKS, vale

$$\vec{g} \approx 9.81\ m\ s^{-2}, \tag{103}$$

valore che negli esercizi approssimeremo, per comodità a 10 $m\ s^{-2}$.

Prima di concludere questa premessa, accenniamo ad una questione che ha conseguenze profonde. Vogliamo infatti far notare che abbiamo parlato di "massa di un corpo" sia nella legge di Newton (dove la massa misura la resistenza al moto, e quindi è stata definita come "massa inerziale"), sia all'interno della legge di gravitazione universale (dove invece le masse sono le *sorgenti* che generano l'attrazione gravitazionale, e quindi vengono definite "masse gravitazionali"). Non solo, ma *abbiamo dato per scontato che massa inerziale e massa gravitazionale di un corpo coincidono.* Infatti, se non l'avessimo fatto, ed avessimo tenuta distinta la massa inerziale M_I del corpo dalla massa gravitazionale m_G dello stesso corpo, scrivendo la legge di Newton per l'attrazione terrestre sul corpo, avremmo scritto

$$G \, \frac{m_G \; M_G T}{{R_T}^2} = m_I \; |\vec{a}|,$$

e non avremmo potuto semplificare tra i due membri la massa del corpo attratto. L'ipotesi che massa inerziale e massa gravitazionale coincidano non è, quindi, affatto banale, ma è un'ipotesi concettualmente profonda che Einstein mette alla base della Teoria della Relatività Generale.

L'ipotesi che massa inerziale e massa gravitazionale coincidano ci permette anche di misurare le masse, tramite una bilancia, attraverso il *peso.* Il peso di un corpo di massa m non è altro che la forza di attrazione terrestre $m \, \vec{g}$; l'unità di misura del peso è il Kilogrammo-peso (dato dal prodotto della massa per g), distinto dall'unità di massa, il Kilogrammo-massa, ma ad essa proporzionale.

Il moto del proiettile.

Ora considereremo il problema di un punto materiale, soggetto alla forza di gravità, che parte dal suolo con una velocità iniziale di modulo v_0, inclinata rispetto al suolo di un angolo θ: questo problema è noto come "moto del proiettile" o, anche, come "moto del grave".

Immaginiamo quindi un proiettile sparato da un cannone o da un mortaio; è subito evidente che il moto del proiettile rimane confinato in un piano, ed in particolare nel piano che contiene il vettore velocità iniziale. Consideriamo allora un sistema di riferimento bidimensionale (vedi Figura) in questo piano, con l'asse X coincidente col suolo, e con l'asse Y che rappresenta la perpendicolare al suolo, e con l'origine fissata nel punto da cui parte il proiettile, la cui massa indichiamo con m.

Per poter risolvere il problema dinamico, dobbiamo scrivere come al solito la legge di Newton per componenti; in particolare, in questo caso, lungo le componenti X e Y:

$$F_x = m\ a_x\ ,$$

$$F_y = m\ a_y\ . \tag{104}$$

Analizziamo ora le forze che agiscono sul proiettile. In realtà, l'unica forza che agisce in questo caso è la forza di gravità, $\vec{F} = m\vec{g}$, che, per come abbiamo scelto il sistema di riferimento, è parallela all'asse Y (la verticale) ed ha verso opposto all'asse (dall'alto verso il basso). Quindi, l'unica componente della forza è lungo l'asse y e vale $F_y = -\ m\ g$, dove il segno negativo è dovuto al verso opposto rispetto a Y. Lungo X, invece, non agiscono forze, e quindi $F_x = 0$. L'Eq. (104) divemta quindi

$$0 = m\ a_x\ ,$$

$$-\ m\ g = m\ a_y\ , \tag{105}$$

cioè

$$a_x = 0\ ,$$

$$a_y = -\ g\ . \tag{106}$$

Allora: lungo l'asse X l'accelerazione è nulla, e quindi (caso a)) abbiamo un moto rettilineo uniforme:

$$x(t) = x(0) + v_x(0)\ t,$$

mentre lungo l'asse Y abbiamo un'accelerazione costante (pari a $-\ g$), e quindi (caso b)) abbiamo un moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$y(t) = y(0) + v_y(0)\ t - \frac{1}{2}\ g\ t^2.$$

Poichè il proiettile parte all'istante iniziale dall'origine abbiamo $x(0)0y(0) = 0$. Adesso dobbiamo calcolare le componenti $v_x(0), v_y(0)$ lungo i due assi della velocità iniziale; poichè questa in modulo vale v_0, e forma un angolo θ con il suolo (e quindi con l'asse X) abbiamo, al solito,

$$v_x(0) = v_0 \ \cos\ \theta \ \ ; \ \ v_y(0) = v_0 \ \sin\ \theta.$$

Inserendo questi dati nelle equazioni, abbiamo che la legge oraria è data dal sistema

$$x(t) = (v_0 \ \cos\ \theta)\ t\ ,$$

$$y(t) = (v_0 \ \sin\ \theta)\ t - \frac{1}{2}\ g\ t^2\ . \tag{107}$$

Avendo risolto il problema dell'evoluzione dinamica, ci proponiamo ora di ricavare la traiettoria del proiettile. Procedendo come nell'esercizio 4.3, eliminiamo il tempo, ricavandolo in funxione di x dalla prima equazione:

$$t = \frac{x}{v_0 \ \cos\ \theta},$$

e sostituendolo nella seconda, in modo da avere la dipendenza di y da x:

$$y = \frac{v_0 \ \sin\ \theta}{v_0 \ \cos\ \theta}\ x - \frac{1}{2}\ g\ \frac{x^2}{(v_0 \ \cos\ \theta)^2},$$

cioè

$$y = (tg\ \theta)\ x - \frac{1}{2}\ g\ \frac{x^2}{(v_0 \ \cos\ \theta)^2}\ . \tag{108}$$

Vediamo quindi che *la traiettoria del proiettile è una parabola, la cui equazione dipende dal modulo e dall'inclinazione della velocità iniziale.*

Esercizio 4.4): Un proiettile viene sparato con una velocità di 40 $m\ s^{-1}$, e co una inclinazione di 60°. Calcolare a quale distanza colpisce il bersaglio al suolo.
Soluzione: Abbiamo $v_0 = 40\ m\ s^{-1}$ e $\theta = 60°$. Quindi, la traiettoria (108) diventa

$$y = (tg\ 60°)\ x - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{x^2}{(40\ \cos\ 60°)^2}\ ,$$

e quindi

$$y = \sqrt{3}\ x - \frac{x^2}{80}.$$

il punto di impatto col suolo è l'intersezione della parabola con l'asse X, e quindi è caratterizzato dalla condizione $y = 0$; annullando il primo membro della relazione precedente, abbiamo

$$\sqrt{3}\, x - \frac{x^2}{80} = 0,$$

cioè

$$x \left(\sqrt{3} - \frac{x}{80} \right) = 0.$$

L'equazione ammette due soluzioni; la prima, $x = 0$, la scartiamo perchè non è altro che l'origine degli assi, cioè il punto di partenza, mentre la seconda è la soluzione del nostro problema:

$$x = 80 \cdot \sqrt{3}\, m \approx 138.56\, m.$$

Esercizio 4.5): Un proiettile viene sparato con una velocità v_0, e con una inclinazione di 45°, e colpisce il bersaglio al suolo ad una distanza di 250 m. Calcolare v_0.
Soluzione: l'equazione (108) con $\theta = 45°$ (e quindi $tg\theta = 1$; $\cos\theta = \sqrt{2}/2$), e con $g \approx 10\ m\ s^{-2}$, è

$$y = x - 10\, \frac{x^2}{{v_0}^2}.$$

L'impatto col suolo si ottiene annullando il primo membro di questa equazione, e scegliendo la soluzione in x diversa da zero che è

$$x_i = \frac{{v_0}^2}{10};$$

poichè $x_i = 250\ m$, abbiamo ${v_0}^2 = 2500\ m^2/s^2$, cioè

$$v_0 = 50\ m\ s^{-1}.$$

Applicazione della legge di Newton nel caso della forza di richiamo elastica.

Passiamo ora ad introdurre un altro caso semplice ed esattamente risolubile di applicazione della legge di Newton: studiamo infatti il moto generato da una forza di richiamo elastica. Questa forza è quella che viene esercitata, su un corpo avente una certa massa, da una molla compressa o allungata. Per scrivere la legge della forza, scegliamo per comodità come origine del sistema di riferimento la posizione del corpo attaccato alla molla quando la molla si trova in equilibrio (cioè, non è né compressa n'e allungata), ed indichiamo con $\vec{s}$ *lo spostamento da questa posizione di equilibrio*; allora, la legge di questa forza (da inserire al primo membro della legge di Newton) si scrive:

$$\vec{F} = -\, k\, \vec{s}, \tag{109}$$

dove con k abbiamo indicato una costante (*costante elastica della molla*), che dipende solo dalle caratteristiche della molla e che, come si vede dalla relazione, ha dimensioni

$$[k] = [F\, l^{-1}] \equiv [m\, l\, t^{-2}\, l^{-1}] = [m\, t^{-2}]\ , \tag{110}$$

cioè di una massa diviso il quadrato di un tempo. Si noti che, se non avessimo scelto l'origine nel punto di equilibrio della molla, quest'ultimo non avrebbe avuto coordinate nulle, e sarebbe stato individuato da un vettore (costante) $\vec{s}_0$; quindi, avremmo dovuto scrivere lo spostamento dalla posizione di equilibrio della molla come $(\vec{s} - \vec{s}_0)$, e la legge (109) avrebbe assunto la forma

$$\vec{F} = -\, k\, (\vec{s} - \vec{s}_0).$$

Adesso, osserviamo che la forza che la molla esercita sul corpo ha verso opposto ed aumenta col modulo dello spostamento dall'equilibrio; abbiamo quindi una forza che si oppone all'allontanamento dall'equilibrio, e cerca di “richiamare” il corpo verso quel punto (e, se la molla viene compressa, tende a farla allungare, mentre se la molla viene allungata, tende a farla comprimere. Questo giustifica il nome di *forza di richiamo.* Inoltre, vediamo che la forza è proporzionale allo spostamento, e stiamo in quello che viene chiamato “regime elastico”; questo giustifica l'appellativo di *forza elastica.*

Adesso, osserviamo che, poichè la forza e lo spostamento hanno la stessa direzione, il moto non potrà che essere *unidimensionale*; quindi, conviene scegliere un sistema di riferimento che, oltre ad avere l'origine nel punto di equilibrio della molla, abbia uno degli assi, per esempio l'asse X, parallelo ai vettori forza e spostamento. In questo modo le componenti Y e Z dei due vettori saranno nulle, e quindi irrilevanti, e la legge (109) si riscrive semplicemente

$$F_x \equiv F = -\, k\, x, \tag{111}$$

dove, per semplicità, abbiamo indicato con F la componente lungo X della forza, e con x (al solito) la componente lungo X dello spostamento. Se scegliamo, ora, il verso dell'asse X diretto nel verso degli allungamenti, allora x sarà positivo e F sarà negativa se la molla si sta allungando, mentre x sarà negativo e F sarà positiva se la molla si sta comprimendo in modo che la forza punti sempre verso il punto di equilibrio della molla (vedi Figura).

A questo punto, possiamo scrivere la legge di Newton ($\vec{F} = m\, \vec{a}$) che, se indichiamo con m la massa del corpo attacatto alla molla, e sul quale quindi si esercita la forza, si scriverà in questo caso solo per l'unica componente lungo X, e sarà (usando la (111)):

$$-\, k\, x = m\, a_x\ ,. \tag{112}$$

e, se ricordiamo che la componente X dell'accelerazione si scrive $a_x = d^2x(t)/dt^2$, e dividiamo tutto per la massa m, abbiamo

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\, \frac{k}{m}\, x(t)\ . \tag{113}$$

Ora, le dimensioni di k calcolate nella (110) ci dicono che quelle di $\sqrt{k/m}$ sono t^{-1}, così come risulta anche dall'analisi dimensionale dell'equazione (113). Definisco allora

$$\omega \doteq \sqrt{k/m}, \tag{114}$$

e riscrivo l'equazione (113) come

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\, \omega^2\, x(t)\ . \tag{115}$$

Questa equazione ci dice che la funzione $x(t)$ che fornisce la legge del moto deve soddisfare la condizione che la sua derivata seconda deve ridare la funzione stessa cambiata di segno e moltiplicata per una costante positiva ω^2. Questa equazione è nota come *equazione del moto armonico* o anche come *equazione dell'oscillatore armonico* Per poterla risolvere, abbiamo bisogno di fare una digressione di tipo matematico.

- Le derivate di seno e coseno -

Prendiamo in considerazioni le funzioni trigonometriche seno e coseno già introdotte in precedenza; esse, come l'esponenziale, devono avere argomento adimensionale, e sono esse stesse adimensionali. Il loro argomento è anche interpretabile come un angolo, come abbiamo già visto. Se, quindi, dobbiamo considerare seno e coseno come funzioni del tempo, dobbiamo scrivere

$$\sin\,(\omega\ t) \qquad ; \qquad \cos\,(\omega\ t),$$

dove ω è una costante le cui dimensioni $[\omega] = [t^{-1}]$, in modo che il prodotto $\omega\ t$, cioè l'argomento del seno o del coseno, sia adimensionale. Si noti che, se definiamo il tempo T attraverso la relazione $\omega = 2\ \pi/T$, abbiamo

$$\omega\ (t+T) \equiv \frac{2\ \pi}{T}\ (t+T) = \frac{2\ \pi}{T}\ t + 2\ \pi \equiv \omega\ t + 2\ \pi,$$

e quindi

$$\sin(\omega\ (t+T)) = \sin(\omega\ t),$$

$$\cos(\omega\ (t+T)) = \cos(\omega\ t).$$

Le due funzioni riprendono quindi lo stesso valore dopo un tempo T (o, ovviamente, un suo multiplo intero), e sono quindi periodiche di periodo T.

Inoltre abbiamo, dalla definizione di frequenza $\nu = 1/T$ che, come sempre, $\omega = 2\ \pi\ \nu$

Adesso, consideriamo prima le funzioni $C\ \cos\ \theta$ e $C^{'}\ \sin\ \theta$ di un angolo θ (dove $C, C^{'}$ sono due costanti), ed eseguiamo le loro derivate prime e seconde rispetto all'argomento θ:

$$\frac{d(C\ \cos\ \theta)}{d\theta} = C\frac{d(\cos\ \theta)}{d\theta} = -\ C\ \sin\ \theta\ ,$$

$$\frac{d(C^{'}\sin\ \theta)}{d\theta} = C^{'}\frac{d(\sin\ \theta)}{d\theta} = \ C^{'}\cos\ \theta\ , \qquad (116)$$

e derivando ancora

$$\frac{d^2(C\cos\ \theta)}{d\theta^2} = -\ \frac{d(C\ \sin\ \theta)}{d\theta} = -\ C\ \cos\ \theta\ ,$$

$$\frac{d^2(C^{'}\sin\ \theta)}{d\theta^2} = \ \frac{d(C^{'}\ \cos\ \theta)}{d\theta} = -\ C^{'}\sin\ \theta\ . \tag{117}$$

Scopriamo, quindi, che le derivate seconde di queste funzioni danno ancora le stesse funzioni cambiate di segno.

Introduciamo allora, come secondo passo, le funzioni del tempo

$$f(t) \doteq C\cos\,(\omega\ t)\ ,$$

$$g(t) \doteq C^{'}\sin\,(\omega\ t)\ , \tag{118}$$

e andiamo ad eseguire le loro derivate prime e seconde rispetto al tempo. Se definisco l'angolo $\theta(t) \doteq \omega\ t$ (che ovviamente è funzione del tempo), ho, secondo le regole delle funzioni composte, e considerando che $d\theta(t)/dt \equiv d(\omega\ t)/dt = \omega$, che le derivate prime di f e g sono

$$\frac{df(t)}{d\ t} = C\ \frac{d(\cos\ \theta(t))}{dt} = C\ \frac{d(\cos\ \theta(t))}{d\theta(t)} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$= -\ C\ \sin\ \theta(t)\cdot\omega = -\ C\ \omega\ \sin\,(\omega\ t),$$

$$\frac{dg(t)}{d\ t} = \frac{d(C^{'}\sin\ \theta)}{d\theta} = C^{'}\frac{d(\sin\ \theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$= C^{'}\ \cos\ \theta(t)\cdot\omega = C^{'}\ \omega\ \cos\,(\omega\ t)\ . \tag{119}$$

Derivando ulteriormente, otteniamo le derivate seconde

$$\frac{d^2f(t)}{d\ t^2} = C\ \frac{d^2(\cos\ \theta(t))}{dt^2} = -\ C\ \omega\ \frac{d(\sin\ \theta(t))}{dt}$$

$$= -\ C\ \omega\ \frac{d(\sin\ \theta(t))}{d\theta(t)}\cdot\frac{d\theta(t)}{dt} = -\ C\ \omega\ \cos\ \theta(t)\cdot\omega$$

$$= -\,\omega^2 \cdot [C \;\; \cos\,(\omega\; t)] \equiv -\,\omega^2\; f(t),$$

$$\frac{d^2 g(t)}{d\;t^2} = C\;\frac{d^2(\sin\;\theta(t))}{dt^2} = C^{'}\;\omega\;\frac{d(\cos\;\theta(t))}{dt}$$

$$= C^{'}\;\omega\;\frac{d(\cos\;\theta(t))}{d\theta(t)} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = -\;C^{'}\;\omega\;\sin\;\theta(t)\cdot\omega$$

$$= -\,\omega^2 \cdot [C^{'} \;\; \sin\,(\omega\; t)] \equiv -\,\omega^2\; g(t)\;, \tag{120}$$

dove abbiamo usato le espressioni (119) delle derivate prime e le definizioni (118) delle funzioni f e g.

Abbiamo quindi scoperto che ambedue le funzioni f e g soddisfano la proprietà che la loro derivata seconda rispetto al tempo è uguale a $-\;\omega^2$ moltiplicato per la funzione stessa:

$$\frac{d^2 f(t)}{d\;t^2} = -\,\omega^2\; f(t),$$

$$\frac{d^2 g(t)}{d\;t^2} = -\,\omega^2\; g(t)\;. \tag{121}$$

Ma sono queste le uniche funzioni che soddisfano questa proprietà? Per rispondere a questa domanda, consideriamo la funzione

$$h(t) = f(t) + g(t) \equiv C\;\cos\,(\omega\; t) + C^{'}\;\sin\,(\omega\; t)\;; \tag{122}$$

$h(t)$ è quindi la somma delle due funzioni. Eseguiamo adesso la derivata seconda di $h(t)$, tenendo presente che le derivate di una somma di funzioni sono uguali alla somma delle derivate delle funzioni:

$$\frac{d^2 h(t)}{d\;t^2} = \frac{d^2[f(t)+g(t)]}{d\;t^2} = \frac{d^2 f(t)}{d\;t^2} + \frac{d^2 g(t)}{d\;t^2}$$

$$= -\,\omega^2\; f(t) -\; \omega^2\; g(t) \equiv -\,\omega^2\; (f(t)+g(t))$$

$$\equiv -\,\omega^2\; h(t)\;, \tag{123}$$

dove abbiamo usato le relazioni (121). Scopriamo, quindi, che non solo f e g, ma anche a loro funzione somma soddisfa la proprietà che la sua derivata seconda rispetto al tempo è uguale a $-\ \omega^2$ moltiplicato per la funzione stessa. Ora, bisogna tener presente che le costanti C e $C^{'}$ che compaiono nelle definizioni di f e g sono *arbitrarie*; infatti, qualsiasi sia il loro valore numerico, le funzioni f, g (e h) soddisfano la proprietà prima esposta sulla derivata seconda. Inoltre, se scegliamo $C^{'} = 0$, h diventa uguale a f, mentre, se scegliamo $C = 0$, h diventa uguale a g; quindi, f e g sono due *casi particolari di h.* Ne possiamo concludere che la funzione (125) *è la forma più generale di funzione che soddisfa alla proprietà che la sua derivata seconda rispetto al tempo è uguale a $-\ \omega^2$ moltiplicato per la funzione stessa.* Quindi $h(t)$ data da

$$h(t) = C\ \cos\,(\omega\ t) + C^{'}\ \sin\,(\omega\ t)\ , \tag{124}$$

con C e $C^{'}$ costanti arbitrarie *è la forma più generale di funzione che soddisfa alla proprietà che la sua derivata seconda rispetto al tempo è uguale a $-\ \omega^2$ moltiplicato per la funzione stessa.* Ci rendiamo anche conto che, poichè possiamo soddisfare questa proprietà cambiando a piacere i valori di C e $C^{'}$, e questo lo possiamo fare in *infiniti modi*, la forma (125) rappresenta *tutte le possibili infinite funzioni che soddisfano alla proprietà che la loro derivata seconda rispetto al tempo sia uguale a $-\ \omega^2$ moltiplicato per la funzione stessa.* Vediamo dalla relazione (125) che la funzione $h(t)$ è una *combinazione lineare con coefficienti costatnti C e $C^{'}$ delle funzioni* $\cos\,(\omega\ t)$ *e* $\sin\,(\omega\ t)$.

- Soluzione dell'equazione del moto armonico -

Siamo ora in grado di fornire la soluzione dell'equazione (115) del moto armonico generato dalla forza di richiamo elastica (111). Infatti, vediamo che la funzione incognita del tempo $x(t)$ che dà la legge oraria deve soddisfare la consizione che la sua derivata seconda rispetto al tempo è uguale a $-\ \omega^2$ moltiplicato per la funzione stessa. Ma abbiamo appena visto che la forma (125) rappresenta tutte le possibili infinite funzioni che soddisfano a questa proprietà; quindi, ne possiamo concludere che *la soluzione più generale dell'equazione (115) del moto armonico generato dalla forza di richiamo elastica ha la forma (125), cioè è una combinazione lineare delle funzioni* $\cos\,(\omega\ t)$ *e* $\sin\,(\omega\ t)$. Quindi

$$x(t) = C \cos\,(\omega\ t) + C^{'} \sin\,(\omega\ t)\ , \tag{125}$$

Abbiamo quindi la forma generale del nostro problema dinamico. Innanzitutto, però, cominciamo con il ricordare che, nel nostro caso, $\omega = \sqrt{k/m}$; quindi, dalla relazione che lega ω al periodo ed alla frequenza ($T = 2\,\pi/\omega$; $\nu = \omega/2\,\pi$), abbiamo

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad ; \qquad \nu = \frac{1}{2\,\pi}\,\sqrt{\frac{k}{m}}\ . \tag{126}$$

Quindi: *il moto armonico generato da una molla su un corpo è un moto periodico con periodo e frequenza dipendenti dalla massa del corpo e dalla costante elastica della molla.* Il periodo rappresenta il tempo necessario alla molla per fare un'oscillazione completa (cioè, una volta che il corpo soggetto alla molla è partito da un certo punto, il tempo minimo necessario al corpo per tornare in quel punto a causa dell'oscillazione). Vediamo che, come risulta intuitivo, il periodo aumenta all'aumentare della massa del corpo e diminuisce all'aumentare della costante elastica della molla. La frequenza, che rappresenta il numero di oscillazioni per unità di tempo, ovviamente dipende in modo inverso da queste quantità.

Ora, però, rimane aperta una questione: cos'è che determina i particolari valori delle costanti arbitrarie C e C' quando siamo in presenza di uno specifico moto armonico ? La risposta deriva in modo naturale dall'osservazione che abbiamo fatto durante la discussione generale della legge di Newton, e cioè che, risultando che per risolvere un problema dinamico con la legge di Newton è necessario fornire lo stato iniziale del sistema, cioè, secondo la nostra definizione, la coppia di valori $x(0)$ e $v(0)$ della posizione e della velocità al tempo iniziale $t = 0$ del sistema. Abbiamo quindi a disposizione due valori numerici che, come ora vedremo, ci permetteranno di calcolare le costanti C e C'.

Infatti, andiamo ad inserire nella soluzione generale (125) il tempo $t = 0$, e otteniamo (poichè $\cos(0) = 1$ e $\sin(0) = 0$)

$$x(0) = C\ , \tag{127}$$

cioè *la costante C rappresenta la posizione all'istante iniziale del corpo attaccato alla molla.* Vediamo anche dalla Eq. (125) che le dimensioni di C devono essere effettivamente quelle di una lunghezza perchè devono essere quelle di $x(t)$ divise per la quantità *adimensionale* $\cos{(\omega\, t)}$.

Per determinare $C^{'}$ cominciamo a calcolare la velocità $v(t) = dx(t)/dt$ al generico istante t del corpo attaccato alla molla; eseguendo la derivata prima dei due membri della (125) abbiamo:

$$v(t) \left(\equiv \frac{dx(t)}{dt} \right) = \frac{d[C \cos{(\omega\ t)} + C^{'} \sin{(\omega\ t)}]}{dt}$$
$$= -\ C\ \omega \sin{(\omega\ t)} + C^{'}\ \omega \cos{(\omega\ t)}\ . \qquad (128)$$

Inserendo ora nella (128) il tempo $t = 0$ otteniamo

$$v(0) = C^{'} \cdot \omega\ . \qquad (129)$$

Da questa relazione possiamo ricavare la seconda costante $C^{'}$; vediamo quindi che *la costante* $C^{'}$ *è data dalla velocità iniziale divisa per* ω. Per quanto riguarda le dimensioni, la costante $C^{'}$ ha, come C, le dimensioni di una lunghezza, e il rapporto $v(0)/\omega$ ha le dimensioni $[l \cdot t^{-1} \cdot (t^{-1})^{-1}] = [l \cdot t^{-1} \cdot t] = [l]$; quindi, le dimensioni di $C^{'}$ e di $v(0)/\omega$ coincidono.

Ricapitolando:

$$C = x(0) \qquad ; \qquad C^{'} = \frac{v(0)}{\omega}\ . \qquad (130)$$

Allora, inserendo questi dati nell'Eq. (125) abbiamo la soluzione dell'equazione del moto armonico con posizione iniziale $x(0)$ e velocità iniziale $V(0)$:

$$x(t) = x(0)\ \cos{(\omega\ t)} + \frac{v(0)}{\omega}\ \sin{(\omega\ t)}\ . \qquad (131)$$

Ricordiamo infine che il moto armonico (115) generato dalla forza di richiamo elastica $F = -\ k\ x$ su una massa m ha frequenza ω data dalla relazione (114). Ricordiamo anche che la (131) ha questa forma perchè abbiamo scelto l'origine dell'asse X coincidente con il punto di equilibrio della molla (se no, dobbiamo sostituire il primo membro con $x(t) - x_e q$, dove $x_e q$ è la coordinata lungo X del punto di equilibrio).

A questo punto abbiamo risolto completamente la dinamica generata da una forza di richiamo elastica.

Esercizio 4.6): Si consideri un punto materiale di massa $m = 300\ g$ attaccato ad una molla di costante elastica $k = 2.7\ N/m$. Se all'istante iniziale il punto

materiale si trova nel punto di equilibrio della molla, ed ha una velocità di 10 m/s, trovare la legge oraria $x(t)$.
Soluzione: Secondo dati del problema, a $t = 0$ il corpo si trova nel punto di equilibrio; quindi, con la nostra scelta dell'origine degli assi,

$$x(0) = 0.$$

Inoltre, ci viene anche data la velocità all'istante iniziale

$$v(0) = 10\ m/s.$$

Infine, la relazione (114) ci fornisce anche la frequenza; però, prima di applicare questa relazione, dobbiamo trasformare la massa da grammi a chilogrammi ($1\ g = 10^{-3}\ Kg$) perchè stiamo calcolando tutto nel sistema MKS:

$$m = 300 \cdot 10^{-3}\ Kg = 0.3\ Kg.$$

Adesso la relazione (114) ci dà

$$\omega = \sqrt{\frac{2.7}{0.3}}\ s^{-1} = \sqrt{9}\ s^{-1} = 3\ s^{-1}.$$

Allora, con questi dati la relazione (131) fornisce la legge oraria

$$x(t) = \frac{10}{3}\ \sin\,(3\ t) \approx 3.333 \cdot \sin\,(3\ t).$$

Esercizio 4.7): Si consideri un punto materiale di massa $m = 400\ g$ attaccato ad una molla di costante elastica $k = 6.4\ N/m$. Se all'istante iniziale la molla é allungata, il punto materiale si trova a distanza di 20 cm dal punto di equilibrio della molla, ed ha velocità nulla, trovare la legge oraria $x(t)$.
Soluzione: Secondo dati del problema, a $t = 0$ il corpo si trova nella posizione iniziale

$$x(0) = 20\ cm$$

perchè la molla si sta allungando e abbiamo scelto il verso dell'asse X nel senso dell'allungamento (questo spiega il segno positivo di $x(0)$). Ora, prima di tutto conviene trasformare da centimetri a metri ($1\ cm = 10^{-2}\ m$ per mettersi nel sistema MKS:

$$x(0) = 20\ cdot 10^{-2}\ m = 0.2\ m.$$

L'altro dato che ci viene fornito é che la velocità iniziale è nulla:

$$v(0) = 0.$$

Infine, dopo aver trasformato da grammi a chilogrammi la massa

$$m = 400 \cdot 10^{-3}\ Kg = 0.4\ Kg,$$

usiamo la (114) per calcolare ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{6.4}{0.4}}\ s^{-1} = \sqrt{16}\ s^{-1} = 4\ s^{-1}.$$

Con questi dati la relazione (131) fornisce la legge oraria

$$x(t) = 0.2\ \sin\ (4\ t).$$

Nota: in questi due esercizi abbiamo visto in quali casi otteniamo come soluzione in particolare solo coseno o solo seno; i casi sono, rispettivamente, che la posizione iniziale coincide con quella di equilibrio e la velocità iniziale è diversa da zero, e con quella in cui la velocità iniziale è da zero e la posizione iniziale non coincide con quella di equilibrio. Nel prossimo esercizio considereremo invece un caso generale.

Esercizio 4.8): Si consideri un punto materiale di massa $m = 500\ g$ attaccato ad una molla di costante elastica $k = 12.5\ N/m$. Se all'istante iniziale la molla é allungata, il punto materiale si trova a distanza di 30 cm dal punto di equilibrio della molla, ed ha una velocità di 18 Km/h, trovare la legge oraria $x(t)$.
Soluzione: Cominciamo a trasformare tutti i dati nel sistema MKS:

$$m = 500 \cdot 10^{-3}\ Kg = 0.5\ Kg,$$

$$x(0) = 30 \cdot 10^{-2}\ m = 0.3\ m.$$

$$v(0) = 18 \cdot \frac{1000}{3600}\ m\ s^{-1} = 5\ m\ s^{-1}.$$

Ora calcoliamo ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{12.5}{0.5}}\ s^{-1} = \sqrt{25}\ s^{-1} = 5\ s^{-1}.$$

Con questi dati la relazione (131) fornisce la legge oraria

$$x(t) = 0.3\ \cos\,(5\ t) + \frac{5}{5}\ \sin\,(5\ t) = 0.3\ \cos\,(5\ t) + \sin\,(5\ t).$$

Esercizio 4.9): Si consideri un punto materiale di massa $m = 1\ Kg$ attaccato ad una molla di costante elastica k. Sapendo che quando la molla é allungata di 40 cm il punto materiale risente di una forza di intensità 1.6 N ed ha una velocità di 36 Km/h, trovare la legge oraria $x(t)$.
Soluzione: Cominciamo a trasformare tutti i dati nel sistema MKS:

$$40\ cm = 40 \cdot 10^{-2}\ m = 0.4\ m.$$

$$36\ Km/h = 36 \cdot \frac{1000}{3600}\ m\ s^{-1} = 10\ m\ s^{-1}.$$

Poi, usando la legge (111) della forza elastica per ricavare la costante k, possiamo scrivere

$$k = \frac{|F|}{|x|};$$

sapendo che a $|x| = 0.4\ m$ l'intensità della forza è $|F| = 1.6\ N$, abbiamo allora

$$k = \frac{1.6}{0.4}\ N/m = 4\ N/m.$$

Possiamo ora calcolare anche ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{1}}\ s^{-1} = 2\ s^{-1}.$$

Adesso possiamo scegliere come istante iniziale $t = 0$ proprio quello nel quale la la molla é allungata di 0.4 m; i dati del problema ci dicono allora che la coordinata iniziale ha segno positivo (perchè la molla è allungata, ed abbiamo scelto il verso positivo di X nel senso degli allungamenti), e vale

$$x(0) = 0.4\ m,$$

mentre la velocità iniziale vale

$$v(0) = 10\ m\ s^{-1}.$$

Con questi dati la relazione (131) fornisce la legge oraria

$$x(t) = 0.4\ \cos\ (2\ t) + \frac{10}{2}\ \sin\ (5\ t) = 0.4\ \cos\ (2\ t) + 5\ \sin\ (2\ t).$$

Esercizi

Esercizio 4.10): Una forza di intensità costante F agisce per un tempo $t = 10\ s$ su un corpo, inizialmente fermo, di massa $m = 500\ g$; dopo tale tempo la forza F smette istantaneamente di agire sul corpo, che nello stesso istante colpisce una molla a riposo di costante elastica $k = 12.5\ N/m$, comprimendola. Se dopo 10 s dall'impatto col corpo la molla è stata compressa di 20 cm, calcolare l'intensità della forza F, e lo spazio percorso dal corpo prima di colpire la molla.
Soluzione: Trasformiamo innanzitutto tutti i dati nel sistema MKS:

$$m = 500 \cdot 10^{-3}\ Kg = 0.5\ Kg,$$

$$20\ cm = 20 \cdot 10^{-2}\ m = 0.2\ m.$$

Esaminiamo poi i vari punti dell'esercizio:
- L'intero moto (accelerato + compressione molla) si svolge su una retta che scegliamo come asse X;
- la forza costante imprime al corpo un moto uniformemente accelerato, con accelerazione di modulo

$$a = F/m \equiv F/(0.5) = 2\ F\ m\ s^{-2};$$

- poichè il corpo parte da fermo, la velocità dopo un tempo $t = 10\ s$ è

$$v(t) = a\ t \equiv (2\ F) \cdot t = (2\ F) \cdot 10\ m\ s^{-1} = 20\ F\ m\ s^{-1};$$

- il corpo colpisce la molla con questa velocità, quando la forza smette di agire, e quando la molla è a riposo; quindi, ridefinendo l'origine degli assi in modo che coincida proprio con questo punto, che è quello di equilibrio per la molla, e azzerando di nuovo il tempo, cioè ridefinendo l'istante $t = 0$ come quello nel quale c'è l'impatto, abbiamo che il corpo in questo istante ha posizione iniziale nulla ($x(0) = 0$) e velocità iniziale data in modulo da quella precedentemente calcolata con il moto accelerato $v(0) = 20\ F\ m\ s^{-1}$;
- siccome il corpo comprime la molla, su di esso comincia a esercitarsi una forza di richiamo elastica $F' = -\ k\ x$, che genera un moto armonico (Eq. (131)) con ω data da

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12.5}{0.5}} = \sqrt{25} = 5\, s^{-1},$$

e con condizioni iniziali $x(0) = 0\,;\ v(0) = 20\ F\ m\ s^{-1}$;
- inserendo questi dati nell'Eq. (131), e calcolando il modulo dei due membri, abbiamo

$$|x(t)| = \frac{20\ F}{5}\ |\sin\ (5\ t)| = 4\ F\ |\sin\ (5\ t)|;$$

- sapendo che dopo $t = 10\ s$ la molla si è compressa di $|x(10)| = 0.2\ m$, inserendo quest'ultimo valore al primo membro dell'Eq. precedente, ed il valore $t = 10\ s$ al secondo membro della stessa equazione, abbiamo

$$0.2 = 4\ F\ |\sin\ (5 \cdot 10)| = 4\ F\ |\sin\ (50)| \approx 4\ F \cdot 0.2378 \approx 0.9512\ F,$$

- da cui

$$F \approx \frac{0.2}{0.9512} \approx 2.1\ N;$$

- infine, con questa forza l'accelerazione del primo moto risulta

$$a = 2\ F\ m\ s^{-2} \approx 4.2\ m\ s^{-2},$$

- e quindi lo spazio percorso dal corpo nei $10\ s$ partendo da fermo risulta

$$x_0 = \frac{1}{2}\ a\ t^2 \approx \frac{1}{2} \cdot (4.2) \cdot (10)^2 = 210\ m.$$

Esercizio 4.11): Due corpi della stessa massa m svolgono due moti sotto l'azione di forze costanti; l'intensità della forza che agisce sul primo corpo è $F = 2\ N$, mentre quella che agisce sul secondo è $F^{'}$. Inoltre, il primo corpo parte a $t = 0$ con una velocità iniziale $v(0) = 18\ Km/h$, mentre il secondo parte da fermo. Sapendo che dopo 10 s il primo corpo ha percorso 100 m mentre il secondo corpo dopo lo stesso tempo ha percorso 50 m, calcolare l'intensità della forza $F^{'}$ che agisce sul secondo corpo.
Soluzione: Innanzitutto trasformiamo la velocità nel sistema MKS:

$$v(0) = 18 \cdot \frac{1000}{3600} = 5\ m\ s^{-1}$$

A questo punto scriviamo l'equazione dei due moti uniformemente accelerati generati dalle forze costanti, inserendo i dati (e scegliendo le posizioni iniziali nulle):

$$x(t) = v(0) \cdot t + \frac{1}{2}\ a\ t^2 = v(0) \cdot t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}\ t^2 = 5 \cdot t + \frac{1}{2}\ \frac{2}{m}\ t^2 = 5 \cdot t + \frac{t^2}{m};$$

$$x^{'}(t) = \frac{1}{2}\ a^{'}\ t^2 = \frac{1}{2}\frac{F^{'}}{m}\ t^2.$$

Inserendo nella prima $x(10) = 100\ m$ e $t = 10\ s$, e nella seconda $x^{'}(10) = 50\ m$ e $t = 10\ s$, abbiamo

$$100 = 5 \cdot 10 + \frac{(10)^2}{m} = 50 + \frac{100}{m};$$

$$50 = \frac{1}{2}\ \frac{F^{'}}{m} \cdot (10)^2 = \frac{1}{2}\ \frac{F^{'}}{m} \cdot 100 = 50\ \frac{F^{'}}{m};$$

ricavo dalla prima la massa m, ottenendo:

$$m = 2\ Kg,$$

e, inserendo questo dato, dalla seconda ricavo

$$50 = 25 \cdot F^{'},$$

cioè

$$F^{'} = 25\ N.$$

Esercizio 4.12): Un proiettile viene sparato con una velocità di modulo v_0 ed un'inclinazione rispetto al suolo di 45°. Sapendo che il proiettile raggiunge la sua quota massima quando la sua coordinata lungo X vale $x_m = 45\ m$, calcolare la velocità iniziale v_0 e la quota massima.

Esercizio 4.13): Un proiettile di massa $m = 2\ Kg$ viene sparato con una velocità di modulo v_0 ed un'inclinazione rispetto al suolo di 45°. Il proiettile colpisce il suolo dopo essere stato sparato ad una distanza di 160 m. Di quanto si comprimerebbe una molla di costante elastica $k = 72\ N/m$ posta nel punto di impatto e parallela alla velocità di impatto del proiettile?

Esercizio 4.14): Una molla di costante elastica $k = 4\ N/m$, alla quale è attaccata una massa $m = 400\ g$, viene compressa di 30 cm, e poi viene lasciata andare; quanto dovrebbe valere una forza costante applicata allo stesso corpo per imprimergli dopo 10 s la stessa velocità che la molla ha fatto acquistare al corpo quando quest'ultimo arriva nel punto di equilibrio della molla?

5 Lavoro ed Energia

5.1 Conservazione dell'energia meccanica

Uno dei principi della natura è quello di conservazione dell'energia; si sa infatti, genericamente che "l'energia si conserva". Tuttavia, per poter dare significato fisico a questa affermazione è prima di tutto necessario definire l'energia o, meglio ancora, le varie forme di energia possedute da un sistema. Nel caso di un punto materiale soggetto alle leggi della Meccanica (parleremo quindi di *energia meccanica*) possiamo definire due forme di energia: *energia cinetica* ed *energia potenziale*. Vedremo che il principio di conservazione dell'energia ci dirà che queste due forme di energia si trasformano l'una nell'altra lasciando invariato il bilancio totale.

Energia cinetica

L'energia cinetica è associata al moto di un corpo. Se il punto materiale ha massa m e velocità di modulo v, l'energia cinetica, che indicheremo con K è definita da

$$K \doteq \frac{1}{2}\, m\, v^2. \tag{132}$$

Vediamo quindi che questa forma di energia cresce col quadrato della velocità, e che è una quantità scalare, non vettoriale. Non dipende, infatti dalla direzione e dal verso della velocità ma solo dal suo modulo.

Vediamo quali sono le dimensioni fisiche dell'energia:

$$[K] = [m \cdot v^2] = [m \cdot l^2 \cdot t^{-2}]. \tag{133}$$

Nel sistema MKS abbiamo quindi che K si misura in $Kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$. In realtà quando fra poco introdurremo il lavoro vedremo che per l'energia si preferisce definire un'unità specifica.

Lavoro meccanico

Ricordiamo ora che ogni moto, e quindi la possibilità per ogni corpo di acquistare una velocità, è dovuto all'azione di una qualche forza. Allora, deve essere possibile associare una qualche forma di energia all'azione di una forza. Definiamo quindi il *lavoro meccanico* (che d'ora in poi chiameremo semplicemento lavoro) svolto da una forza. Dal punto di vista dell'esperienza comune, noi siamo abituati ad associare il concetto di lavoro al concetto di “fatica”; in questo senso, trascinare un grosso pacco significa compiere un “lavoro”, e tanto più grande è il tratto lungo il quale lo trasciniamo, tanto più grande è la “fatica”, e quindi il lavoro. Di conseguenza, capiamo che nella definizione di lavoro oltre alla forza deve entrare anche lo spostamento. Nel definire il lavoro procederemo per gradi, partendo dal caso più semplice fino ad arrivare al caso più generale.

a) Caso di forza costante e spostamento rettilineo parallelo alla forza.

In prima approssimazione, ci limiteremo a definire il lavoro nel caso semplice di una forza costante $vecF$ che trascina un corpo parallelemente alla propria direzione (per esempio, un pacco da noi trascinato lungo un pavimento). Se la forza trascina il corpo da un punto A ad un punto B, la distanza $\overline{AB}$, che indicheremo con s, la definiamo come “spostamento”. Definiamo allora “lavoro compiuto dalla forza $vecF$”.per spostare il corpo dal punto A al punto B come il prodotto della intensità F della forza per lo spostamento s da A a B

$$L_{AB} \doteq F\ s. \qquad (134)$$

È da sottolineare però che in F dobbiamo inglobare un segno relativo rispetto allo spostamento. Supponiamo infatti che la forza abbia il verso che va da A a B; allora, essa è concorde con lo spostamento, ambedue avranno segno positivo, ed il loro prodotto, cioè il lavoro, sarà positivo (si pensi ad un uomo che cerca di far muovere un carretto). Supponiamo invece che la forza abbia il verso che va da B ad A; allora, essa ha verso opposto rispetto allo spostamento, e le attribuiamo segno negativo, lasciando il segno positivo allo spostamento; il loro prodotto, cioè il lavoro, sarà allora negativo. Questo secondo caso lo abbiamo per esempio se il corpo si sta muovendo da A a B, e la forza si oppone a questo movimento (si pensi per esempio ad un uomo posto sulla cima di una discesa che cerca di fermare con una corda un carretto che sta scendendo lungo la discesa).

Prima di proseguire, analizziamo le dimensioni del lavoro, e facciamo vedere che queste sono le stesse dimensioni dell’energia cinetica:

$$[L_{AB}] = [F \cdot l] = [m \cdot l \cdot t^{-2} \cdot l] = [m \cdot l^2 \cdot t^{-2}]. \qquad (135)$$

Ne concludiamo che l’energia cinetica ed il lavoro sono due forme di energia, e si misurano quindi con la stessa unità di misura. Definiamo allora l’unità di misura del lavoro (e, quindi, dell’energia) nel sistema MKS come il *Joule* (simbolo J) definito nel modo seguente: *Un Joule è il lavoro compiuto da una forza di* 1 *Newton per causare al corpo lo spostamento di* 1 *metro* (cioè, $1\ J = 1\ N \cdot 1\ m$).

Naturalmente, qualsiasi forma di eergia può essere misurata nel sistema MKS in Joule, ed è quello che faremo da ora in poi.

Esercizio 5.1): Un punto materiale, sottoposto ad una forza costante di modulo $F = 3\ N$, si sposta di un tratto $s = 2\ m$ tra i punti A e B nella stessa direzione e nello stesso verso della forza. Calcolare il lavoro eseguito dalla forza sul punto materiale.
Soluzione: Forza e spostamento sono di verso concorde, quindi il lavoro ha segno positivo e vale

$$L_{AB} \equiv F\ s = 3 \cdot 2\ J = 6\ J.$$

Esercizio 5.2): Un punto materiale, sottoposto ad una forza costante di modulo $F = 4\ N$, si sposta di un tratto $s = 5\ m$ tra i punti A e B nella stessa direzione ma in verso opposto a quello della forza. Calcolare il lavoro eseguito dalla forza sul punto materiale.
Soluzione: Forza e spostamento sono di verso discorde, quindi il lavoro ha segno negativo e vale

$$L_{AB} \equiv -F\ s = -4 \cdot 5\ J = -20\ J.$$

b) Caso di forza costante e spostamento rettilineo, ma non parallelo alla forza.

Prima di procedere, generalizziamo leggermente la definizione di lavoro (134) che, in effetti, si riferisce ad un caso molto particolare. Definiamo infatti $\vec{s}$ (il *vettore spostamento*) come quel vettore che, dati i punti A e B trai quali lo spostamento avviene, ha come modulo la distanza tra A e B, come direzione la retta che contiene A e B, e come verso quello che va da A a B. Se $\vec{F}$ è il vettore forza, la definizione (134) si riferisce al caso in cui la forza è costante, ed i due vettori $\vec{F}$ ed $\vec{s}$ hanno la stessa direzione. In pratica, $\vec{F}$ ed $\vec{s}$ possono essere o paralleli e concordi (stesso verso, lavoro positivo) o paralleli e discordi (verso opposto, lavoro negativo).

Consideriamo ora il caso che la forza sia ancora costante, e lo spostamento sia ancora rettilineo, ma supponiamo che il vettore forza F e quello spostamento s non abbiano più la stessa direzione, ma formino tra loro un angolo *theta*. Si immagini per esempio che stiamo trascinando un pacco sul pavimento tirando una corda attaccata al pacco, ma non teniamo la corda parallela al pavimento; poichè la forza che esercitiamo ha la direzione della corda, e lo spostamento è parallelo al pavimento, abbiamo un caso nel quale forza e spostamento non sono paralleli. Si capisce subito, in questo caso, che la parte della forza che può spostare il corpo lungo la direzione dello spostamento è solo la componente della forza lungo la direzione dello spostamento. Possiamo cioè scomporre la forza in una componente parallela allo spostamento, che è quella che fa il lavoro, ed in una componente perpendicolare allo spostamento, che non può contribuire a muovere il corpo nella direzione voluta. Quindi, generalizziamo la definizione di lavoro a questo caso dicendo che *il lavoro di una forza costante $\vec{F}$ per realizzare uno spostamento rettilineo $\vec{s}$ tra un punto A ed un punto B è dato dal prodotto della componente della forza nella direzione dello spostamento, per il modulo dello spostamento.* Essendo *theta* l'angolo tra la forza e la direzione dello spostamento, abbiamo che la componente della forza lungo questa direzione è, come sappiamo, $|\vec{F}|\ \cos\ $*theta*; allora, se s indica il modulo dello spostamento, abbiamo

$$L_{AB} \doteq (|\vec{F}|\ \cos\ \theta)\ s, \tag{136}$$

espressione che, se si ricorda la definizione di prodotto scalare tra due vettori, si può riscrivere come

$$L_{AB} \doteq \vec{F} \cdot \vec{s}, \tag{137}$$

dove "$\cdot$" indica (vedi le prime lezioni) proprio il prodotto scalare tra i due vettori. Si noti che, nel caso particolare nel quale $\vec{F}$ ed $\vec{s}$ hanno la stessa direzione, l'angolo θ varrà 0 se i vettori hanno verso concorde, mentre varrà π se i vettori hanno verso discorde; poichè $\cos\ 0 = 1$ e $\cos\ \pi = -\ 1$, vediamo che $|\vec{F}|\ \cos\ 0 = |\vec{F}|$, mentre $|\vec{F}|\ \cos\ \pi = -\ |\vec{F}|$, ed allora nel primo caso (verso concorde) abbiamo lavoro positivo, e nel secondo caso (verso discorde) abbiamo lavoro negativo. Quindi, quello che abbiamo indicato con F nella relazione (134) (la componente della forza) non è altro che $|\vec{F}|\ \cos\ 0$ nel primo caso, e $|\vec{F}|\ \cos\ \pi$ nel secondo caso.

Infine, ricordiamo una cosa importante; cioè che il prodotto scalare $\vec{F} \cdot \vec{s}$ può essere interpretato sia come il prodotto della componente di $\vec{F}$ lungo $\vec{s}$ moltiplicata per il modulo di $\vec{s}$, *sia come il prodotto della componente di $\vec{s}$ lungo $\vec{F}$ moltiplicata per il modulo di $\vec{F}$.* Quindi, possiamo anche affermare che *nel lavoro conta solo la componente dello spostamento lungo la direzione della forza.* Sfrutteremo questo fatto nel seguito.

Esercizio 5.3): Un punto materiale, sottoposto ad una forza costante di modulo $F = 5\ N$, si sposta di un tratto tra i punti A e B, distanti tra loro 3 m. Il vettore spostamento $\vec{s}$ forma con la forza $\vec{F}$ un angolo $\theta = 60°$. Calcolare il lavoro eseguito dalla forza sul punto materiale.
Soluzione: Le relazioni (136), (137) ci danno

$$L_{AB} \equiv \vec{F} \cdot \vec{s} \equiv (|\vec{F}|\ \cos\ \theta)\ s$$

$$= (5 \cdot \cos\ 60°) \cdot 3\ J = (5 \cdot \frac{1}{2}) \cdot 3\ J = 7.5\ J.$$

Esercizio 5.4): Un punto materiale, sottoposto ad una forza costante di modulo $F = 4\ N$, si sposta di un tratto tra i punti A e B, distanti tra loro 6 m. Il vettore spostamento $\vec{s}$ forma con la forza $\vec{F}$ un angolo $\theta = 135°$. Calcolare il lavoro eseguito dalla forza sul punto materiale.
Soluzione: Le relazioni (136), (137) ci danno

$$L_{AB} \equiv \vec{F} \cdot \vec{s} \equiv (|\vec{F}|\ \cos\ \theta)\ s$$

$$= (4 \cdot \cos\ 135°) \cdot 6\ J = (4 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2})) \cdot 6\ J = -12\ \sqrt{2}\ J \approx -16.92\ J.$$

c) Caso generale.

Adesso usiamo la definizione b) per generalizzare il concetto di lavoro al caso più generale: forza variabile e spostamento di forma qualsiasi.

Consideriamo infatti una forza $\vec{F}$ che può dipendere dal punto (per esempio, si pensi alla forza di richiamo elastica oppure alla forza di attrazione gravitazionale). Si consideri poi il caso in cui il punto materiale si sposti da un punto A ad un punto B seguendo un percorso di forma qualsiasi tra i due punti: per esempio, muovendosi lungo un semicerchio che ha $\overline{AB}$ come diametro, oppure lungo una qualsiasi linea comunque tortuosa che unisca A con B. Come calcoliamo il lavoro fatto dalla forza in questo caso?

A questo scopo, dividiamo la linea che unisce A con B in N tratti, e indichiamo con Δs_i $(i = 1, ..., N)$ il tratto i-esimo a partire da A. Facciamo in modo che i tratti siano di lunghezza così piccola da poterli considerare praticamente rettilinei, e contemporaneamente da poter considerare costante la forza su tutti i punti di un certo tratto; questo vuol dire che il valore della forza (nel senso di modulo, direzione e verso) è praticamente lo stesso in qualsiasi punto di un tratto fissato, e che il suo valore cambia solo spostandosi su un altro tratto. Indichiamo con $\vec{F}_i$ il valore della forza sui punti del tratto Δs_i. Si noti che, quando la lunghezza dei tratti Δs_i diventa veramente molto piccola, praticamente la direzione di questi tratti diventa tangente alla curva che descrive lo spostamento da A a B. Definiamo ora il vettore $\Delta\vec{s}_i$ (lo *spostamento elementare i-esimo*) come quel vettore che ha come modulo la lunghezza del tratto Δs_i, come direzione quella dello stesso tratto, e come verso quello che va da A a B. Poichè abbiamo detto che scegliamo il tratto Δs_i così piccolo da poterlo considerare rettilineo, e da poter considerare costante il valore $\vec{F}_i$ su di esso, vediamo che su un singolo tratto ricadiamo nel caso b), e possiamo quindi calcolare il *lavoro elementare* ΔL_i fatto dalla forza lungo lo spostamento elementare $\Delta\vec{s}_i$ attraverso la relazione (137):

$$\Delta L_i \doteq \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i. \tag{138}$$

Questo rappresenta il lavoro elementare fatto dalla forza lungo lo spostamento elementare i-esimo; per ottenere il lavoro totale fatto dalla forza lungo tutta la linea che rappresenta lo spostamento tra A e B basterà sommare tutti lavori elementari fatti dalla forza sugli N tratti in cui abbiamo diviso tale linea:

$$L_{AB} \doteq \sum_{i=1}^{N} \Delta L_i. = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i. \tag{139}$$

Dal punto di vista matematico, quando tutti tratti Δs_i "tendono a zero", la quantità definita nell'Eq. (139) si definisce "integrale di linea da A a B", e si indica con il simbolo $\int_{AB,L} \vec{F} \cdot d\vec{s}$, dove con L abbiamo indicato la linea prescelta; dal punto di vista pratico, la somma dell'Eq. (139) approssima il valore dell'integrale entro qualsiasi errore prefissato purchè si scelga il numero N di tratti abbastanza grande, e la loro lunghezza abbastanza piccola.

Non insisteremo molto su questo caso generale, ma presentiamo un esempio abbastanza semplice nel quale possiamo calcolare esplicitamente il lavoro in base alla definizione (139).

Esercizio 5.5): Un punto materiale si sposta da A a B lungo un semicerchio di raggio $Requiv\overline{AB}/2 = 2\ m$, sotto l'azione di una forza di modulo costante pari a 4 N, ma di direzione che varia su ogni punto del semicerchio rimanendo tangente al semicerchio stesso, e di verso concorde a quello che va da A a B. Calcolare il lavoro eseguito dalla forza sul punto materiale.
Soluzione: Dividiamo il semicerchio negli spostamenti elementari $\Delta\vec{s}_i$. Ogni spostamento elementare, come abbiamo detto, è di fatto tangente alla linea tra A e B, cioè, in questo caso, tangente al semicerchio, concorde con il verso che va da A a B. Essendo la forza sempre tangente al semicerchio, il suo valore $\vec{F}_i$ su $\Delta\vec{s}_i$ è quindi tangente a $\Delta\vec{s}_i$ e concorde con il suo verso; questo significa che l'angolo tra $\vec{F}_i$ e $\Delta\vec{s}_i$ è nullo, e allora il lavoro elementare vale

$$\Delta L_i = (|\vec{F}_i| \cdot \cos\ 0°) \cdot |\Delta\vec{s}_i| = 4 \cdot |\Delta\vec{s}_i|.$$

La relazione (139) dà quindi

$$L_{AB} = \sum_{i=1}^{N} 4 \cdot |\Delta\vec{s}_i| = 4 \cdot \sum_{i=1}^{N} |\Delta\vec{s}_i| = 4 \cdot (\pi\ R) = 4 \cdot (2\ \pi) = 8\ \pi\ J,$$

dove abbiamo usato il fatto che la somma delle lunghezze di tutti i trattini Δs_i dà ovviamente la lunghezza totale della linea (in questo caso, la lunghezza del semicerchio).

Energia potenziale

Il concetto di lavoro, ed il fatto che bisogna compiere lavoro per generare moto (cioè energia cinetica) ci porta a definire, nel caso dei *sistemi conservativi*, il concetto di *energia potenziale*. Preliminarmente, è necessario definire il concetto di sistema conservativo, anzi, per meglio dire, il concetto di *forza conservativa*: *una forza si definisce conservativa se il lavoro che questa forza esegue per spostare un corpo da un punto A ad un punto B non dipende dal percorso seguito per andare da A a B, ma solo dai punti A e B.* Per capirci, supponiamo di considerare un semicerchio che parta da A e arrivi a B, e poi il segmento rettilineo che congiunge A con B. Allora la definizione implica che se la forza è conservativa compie lo stesso lavoro se sposta il corpo lungo il segmento oppure se lo sposta lungo il semicerchio (o lungo qualsiasi altro percorso da A a B; l'unica cosa che conta è che lo spostamento parta da A

e arrivi a B). Si noti che, ovviamente, non è questa la nostra esperienza diretta; di solito facciamo più fatica a trascinare un pacco sul contorno circolare di una piazza che a trascinarlo direttamente attraversando la piazza, perchè conta la lunghezza del percorso; il problema è che in questo caso il sistema complessivo delle forze **non è** conservativo perchè agisce ache l'attrito, da una parte, ed il nostro lavoro muscolare dall'altra.

Si capisce facilmente che una forza conservativa è molto comoda; infatti, qualsiasi sia il percorso che effettivamente fa il corpo, noi possiamo calcolare il lavoro compiuto scegliendo, fra tutti i possibili percorsi che congiungono A a B, quello per il quale il conto risulta più facile!

Ma vediamo ora le conseguenze della definizione di forza conservativa. Se il lavoro L_{AB} compiuto dalla forza dipende solo da A e da B, allora non è difficile capire che *deve essere possibile definire una funzione il cui valore dipende solo dal punto nello spazio e che deve essere connessa al lavoro.* Se indichiamo con U_A e U_B i valori che questa funzione assume, rispettivamente, nei punti A e B, allora il lavoro L_{AB} si deve poter scrivere come la differenza di questi valori:

$$L_{AB} = U_A - U_B. \qquad (140)$$

È ora necessario rilevare due cose:

- Poichè la quantità fisica che possiamo misurare è il lavoro, quello che possiamo definire attraverso la (140) è la *differenza di energia potenziale*; non possiamo invece definire in assoluto l'energia potenziale in un singolo punto perchè non siamo in grado di misurarla. In altre parole, *l'energia potenziale è definita a meno di una costante arbitraria.* Infatti, se diciamo che in A l'energia potenziale vale $U_A' \doteq U_A + C$ (invece di U_A), ed in B l'energia potenziale vale $U_B' \doteq U_B + C$ (invece di U_B), dove C nei due casi è una stessa costante, vediamo che $U_A' - U_B' \equiv U_A + C - (U_B + C) = U_A + C - U_B - C = U_A - U_B$; cioè, la differenza di energia potenziale, che coincide con l'unica quantità misurabile che è il lavoro, non cambia. Allora, quello che possiamo fare è dare un valore convenzionale a questa costante, per esempio fissarla uguale a zero, e potremo parlare convenzionalmente di "valore dell'energia potenziale in un punto". In realtà, questo significa semplicemente misurare l'energia potenziale rispetto ad un riferimento convenzionale. Supponiamo infatti di scegliere arbitrariamente, ma una volta per tutte, un punto O nello spazio che prenderemo come riferimento (in modo simile a quanto facciamo scegliendo l'origine dell'asse X). Indichiamo poi con U_O il valore, anch'esso convenzionale ed arbitrario, dell'energia potenziale nel punto O. Allora, possiamo definire l'energia potenziale in qualsiasi altro punto dello spazio (A, B, ...) *come la differenza di energia potenziale tra il punto scelto ed il punto di riferimento* O; cioè, $U_A \equiv U_A - U_O$, $U_B \equiv U_B - U_O$, ecc. Allora, abbiamo che $U_A - U_B = U_A - U_O - (U_B - U_O)$. In pratica, la costante C arbitraria di cui parlavamo prima corrisponde a $C = -U_O$, e, come questa costante, possiamo fissare arbitrariamente $U_O = 0$. Questo è quello che faremo nelle applicazioni.

- Poichè abbiamo dato la definizione (140) di energia potenziale, e poichè in realtà la variazione di energia potenziale tra A e B, che indichiamo con ΔU_{AB}, come di norma, è definita come la differenza tra il punto *finale* B ed il punto *iniziale* A

$$\Delta U_{AB} \doteq U_B - U_A,$$

ne concludiamo che *la variazione di energia potenziale tra due punti è uguale al lavoro compiuto tra i due punti cambiato di segno*:

$$\Delta U_{AB} \doteq -\, L_{AB}. \tag{141}$$

È questa di solito la definizione che viene data di energia potenziale.

Principio di conservazione dell'energia meccanica

Possiamo ora enunciare il *principio di conservazione dell'energia meccanica*: *In un sistema di forze conservativo l'energia meccanica totale di un corpo, definita come la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica del corpo, rimane costante.*

Vediamo di capire ora come possiamo esprimere in formula questo principio. Partiamo dalle definizioni delle due forme di energia (cinetica e potenziale) che abbiamo dato. Sappiamo che l'energia potenziale dipende dal punto dello spazio; ma anche l'energia cinetica dipende dal punto nello spazio. Infatti, dato un certo moto, la velocità del corpo, e quindi la sua energia cinetica, dipende dal punto nel quale la misuriamo. Allora, indichiamo con $v_A, v_B, K_A, K_B, U_A, U_B$, rispettivamente, le velocità, le energie cinetiche, e le energie potenziali possedute in due *qualsiasi* punti A e B dal nostro corpo. Naturalmente

$$K_A = \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 \;\; ; \;\; K_B = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2.$$

Il principio di conservazione dell'energia meccanica ci dice semplicemente che la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica di un corpo *non dipende dal punto*; cioè

$$U_A + K_A = U_B + K_B, \tag{142}$$

o, con la forma esplicita delle energie cinetiche,

$$U_A + \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 = U_B + \frac{1}{2}\, m\, v_B^2. \tag{143}$$

Se definiamo l'*energia totale* E come

$$E \doteq U + K \equiv U + \frac{1}{2}\, m\, v^2, \tag{144}$$

dove le energie potenziale e cinetica sono riferite ad un qualsiasi punto dello spazio, il principio di conservazione (143) lo possiamo simbolicamente scrivere come

$$E = cost. \tag{145}$$

Prima di proseguire, si noti che la relazione (143), portando a primo membro tutte le energie potenziali e a secondo membro tutte quelle cinetiche, si può riscrivere come

$$U_A - U_B = +\frac{1}{2}\, m\, v_B^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_A^2, \tag{146}$$

cioè

$$-\,\Delta U_{AB} \equiv L_{AB} = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_A^2; \tag{147}$$

questa, con al primo membro il lavoro, sarà la forma più comoda per le applicazioni.

Un importante esempio di forza conservativa: la forza peso

Un importante esempio di forza conservativa è la forza peso $F_p = m\, g$. Applichiamo ora a questa forza i concetti esposti precedentemente. Innanzitutto, cominciamo con il considerare un corpo di massa m che cade lungo la verticale sotto l'azione di questa forza. Poichè in questo caso lo spostamento è rettilineo, con verso dall'alto verso il basso, e la forza è costante ed ha la stessa direzione e lo stesso verso, ricadiamo nel caso più semplice, e possiamo calcolare il lavoro della forza tramite la (134); inoltre, questo lavoro avrà segno positivo perchè forza e spostamento hanno verso concorde. Se A è il punto di partenza del corpo a quota più alta, e B è il punto di arrivo a quota più bassa, allora lo spostamento sarà dato dalla differenza di quota tra i due punti

$$s = \Delta h.$$

Per esempio, se il corpo parte da un punto A a quota 100 m rispetto al suolo, e raggiunge cadendo B che sta a quota 50 m rispetto al suolo, allora $s \equiv \Delta h = (100 - 50)\ m = 50\ m$.

Il lavoro compiuto dalla forza peso $F_p = m\ g$ per far cadere il corpo dal punto A al punto B separati dalla differenza di quota $\Delta\ h$ sarà allora dato da

$$L_{AB} = m\ g\ \Delta h. \tag{148}$$

Naturalmente, la definizione (141) ci dice che la differenza di energia potenziale tra i due punti è data da

$$\Delta U_{AB} = -\ m\ g\ \Delta h. \tag{149}$$

Si noti che in questo caso abbiamo applicato automaticamente il principio che, potendo essere definite solo le differenze di energia potenziale, è necessario scegliere un punto di riferimento rispetto al quale calcolare tali differenze; è chiaro che in questo caso, poichè l'energia potenziale dipende solo dalla *quota*, abbiamo preso come riferimento un punto sulla superficie terrestre. Infatti, le quote le abbiamo misurate rispetto a terra. Allora, se O è il punto di riferimento sulla superficie terrestre, possiamo fissare arbitrariamente la quota h_0 di questo punto, e definire l'energia potenziale di un punto a quota h come

$$U_h = -\ m\ g\ (h\ -\ h_0). \tag{150}$$

Poichè h_0 è arbitrario, ci conviene fissarlo a zero; questo equivale a scegliere l'energia potenziale del punto di riferimento O uguale a zero : $U_0 \equiv -\ m\ g\ h_0 = 0$. Si noti anche che, poichè tutti i punti sulla superficie terrestre stanno a quota zero, tutti questi punti hanno la stessa energia potenziale di riferimento pari a zero.

Comunque, torniamo ora alla conservazione dell'energia. Se indichiamo con v_A la velocità che il corpo possiede nel punto iniziale A a quota più alta, e con v_B quella che il corpo ha acquistato nel punto B a quota più bassa, l'applicazione della forma (147) della conservazione dell'energia, con il lavoro dato in quesro caso dalla prosimo argomentoEq. (148), ci dà nel caso della caduta verticale di un corpo la relazione:

$$m\ g\ \Delta h = \frac{1}{2}\ m\ v_B^2 - \frac{1}{2}\ m\ v_A^2. \tag{151}$$

Questa relazione, note le due quote e la velocità iniziale, ci permette di calcolare, in modo più rapido e semplice rispetto all'applicazione del moto uniformemente accelerato, la velocità finale del corpo. Quindi, la conservazione dell'energia è uno strumento potente per risolvere problemi. Vediamo poi che nella relazione precedente la massa si elimina (come deve essere), e quindi la relazionprosimo argomentoe si riduce a

$$g\ \Delta h = \frac{1}{2}\ (v_B^2\ -\ v_A^2). \tag{152}$$

Facciamo degli esempi.

Esercizio 5.6): Un corpo, lasciato cadere da fermo, precipita a terra da un'altezza di 20 m. Calcolare la velocità finale.
Soluzione: Innanzitutto il corpo parte da fermo, quindi

$$v_A = 0,$$

e inoltre $\Delta h = 20\ m$.
La relazione (152) ci dà allora

$$v_b = \sqrt{2\ g\ \Delta h}\ m\ s^{-1} \approx \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20}\ m\ s^{-1} = \sqrt{400}\ m\ s^{-1} = 20\ m\ s^{-1}.$$

Si noti anche *che la relazione (152) può essere usata anche al contrario.* Possiamo cioè domandarci da quale altezza dovremmo cadere per avere lo stesso effetto di andare a sbattere contro un muro alla velocità di 20 $m\ s^{-1}$ (che corrisponde alla velocità, apparentemente ragionevole, di 72 Km/h): la risposta è, ovviamente, da 20 m (cioè da un po' più di 6 piani!).

Esercizio 5.7): Un corpo, avente una velocità iniziale di 10 $m\ s^{-1}$, cade da un'altezza di 33.8 m. Quale sarà la sua velocità a 10 metri dal suolo?
Soluzione: Abbiamo

$$v_A = 10\ m\ s^{-1}\ \ ;\ \ \Delta h \equiv (33.8 - 10)\ m = 23.8\ m.$$

Ricavando v_B^2 dalla (152) abbiamo

$$v_B^2 = v_A^2 + 2\ g\ \Delta h,$$

e, estraendo la radice quadrata e sostituendo i valori numerici,

$$v_B \approx \sqrt{100 + 20 \cdot 23.8}\ m\ s^{-1} = \sqrt{576}\ m\ s^{-1} = 24\ m\ s^{-1}.$$

La forza peso: il piano inclinato e gli altri percorsi non verticali

Supponiamo ora di considerare un piano inclinato di un certo angolo α, che non presenti attrito, e supponiamo di appoggiarvi un punto materiale che vi possa scivolare. È chiaro che il problema risulta di fatto bidimensionale, perchè, una volta che il corpo ha cominciato a scivolare seguirà una linea retta e non si sposterà di lato. Possiamo quindi rappresentare il piano inclinato attraverso una sezione verticale, e quindi come un triangolo rettangolo ABC, la cui ipotenusa $\overline{AC}$ rappresenta proprio il piano inclinato, il cui cateto verticale $\overline{AB}$ ha lunghezza pari alla quota, o altezza, del punto più alto A dal suolo, ed il cui cateto orizzontale $\overline{BC}$ è paralelo al terreno. L'angolo di inclinazione α del piano è l'angolo formato tra il cateto orizzontale $\overline{BC}$ e l'ipotenusa $\overline{AC}$; esso, quindi, è *adiacente* a $\overline{BC}$ e *opposto* ad $\overline{AB}$. Quindi, se indichiamo con l la lunghezza dell'ipotenusa $\overline{AC}$, cioè la *lunghezza* del piano inclinato, e con h la lunghezza del cateto verticale $\overline{AB}$, cioè l'*altezza* del piano inclinato, abbiamo

$$h = l\ \sin\ \alpha.$$

Infine, se indichiamo con b la lunghezza della base $\overline{BC}$ del piano inclinato, abbiamo

$$b = l\ \cos\ \alpha.$$

Adesso, prendiamo in considerazione il fatto che la forza che fa scivolare il corpo, e che per fare questo compie un lavoro, è la forza peso $\vec{F}_p$. Ora, questa forza ha modulo costante pari ad $m\,g$ (dove m è la massa del corpo), è verticale ed è diretta verso il basso. Lo spostamento lungo il piano inclinato $\overline{AC} \equiv \vec{l}$ (dove $\vec{l}$ è il vettore di lunghezza l diretto da A a C) è rettilineo, e forma un angolo $\pi/2 - \alpha$ con $\vec{F}_p$. Trovandoci nel caso in cui la forza è costante e lo spostamento è rettilineo, possiamo applicare la definizione (137), o l'equivalente (136), ottenendo

$$L_{AB} = \vec{F}_p \cdot \vec{l} = \left[m\,g\,\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]\,l$$

$$\equiv m\,g\,\left[l\,\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = m\,g\,[l\,\sin\,\alpha] \equiv m\,g\,h. \tag{153}$$

Vediamo quindi che il lavoro che la forza peso compie per trascinare lungo il piano inclinato $\overline{AC}$ il corpo è lo stesso che compierebbe se il corpo fosse lasciato cadere lungo la verticale $\overline{AB}$. Quello che viene messo in evidenza è che nel lavoro conta solo la componente dello spostamento lungo la direzione della forza, come abbiamo visto in precedenza.

Prima di passare alle applicazioni, facciamo un'altra considerazione.

Innanzitutto, vediamo subito che il lavoro che la forza peso può compiere lungo la direzione della base $\overline{BC}$ è zero, perchè l'angolo tra la forza peso e la base è $\pi/2$, ed il coseno di $\pi/2$ (che entra nel prodotto scalare, e quindi nel lavoro) è zero. Consideriamo allora due percorsi che portano dal punto A al punto C. Come primo percorso consideriamo quello diretto lungo l'ipotenusa, cioè lungo il piano inclinato. Come secondo percorso consideriamo quello che va da A a B (lungo il cateto verticale), e poi da B a C (lungo la base). Abbiamo già calcolato il lavoro fatto dalla forza peso lungo il primo percorso ($\overline{AC}$), trovando che esso é uguale all'espressione (153), cioè è equivalente a quello che la forza peso farebbe lungo la verticale $\overline{AB}$. Il lavoro fatto lungo il secondo percorso, cioè lungo i due cateti, è ovviamente uguale a quello fatto lungo la vertivale $\overline{AB}$, che coincide con quello fatto lungo il primo percorso $\overline{AC}$ più quello fatto lungo la base $\overline{BC}$, *che però abbiamo visto essere nullo*. Quindi: *sia il lavoro lungo $\overline{AC}$ che quello lungo $\overline{AB} + \overline{BC}$ coincidono col lavoro fatto lungo la verticale $\overline{AB}$, e quindi i due lavori sono uguali.* Semplicemente, la forza peso, come abbiamo detto, è conservativa ed il lavoro che compie non dipende dal percorso, ma coincide sempre con quello fatto lungo la verticale, cioè lungo la direzione della forza.

Non è difficile capire che, anche se consideriamo un percorso non rettilineo, per esempio come gli scivoli ondulati di un AcquaPark, se dividiamo il percorso in tanti trattini abbastanza piccoli da poter essere considerati rettilinei, ricordiamo che l'unica parte di questi trattini che conta per il lavoro è la loro componente verticale, e poi sommiamo tutte queste piccole componenti verticali, otteniamo proprio la differenza di quota che, moltiplicata per il modulo costante della forza peso, ci dà proprio il lavoro lungo la verticale.

In conclusione, nelle applicazioni possiamo comunque usare sempre la forma (152), dove Δh denota la differenza di quota tra i due punti tra i quali avviene lo spostamento, *anche se questi due punti non sono allineati lungo la stessa verticale*.

Esercizio 5.8): Un punto materiale scivola senza attrito, partendo da fermo, dalla cima di un piano lungo 30 m, ed inclinato di 60 gradi. Calcolare:

- la velocità del punto quando ha percorso 20 metri lungo il piano;
- la velocità del punto alla fine del piano inclinato.

Soluzione: Abbiamo, nelle nostre notazioni,

$$l = 30\ m\ \ ;\ \ \alpha = 60^\circ\ \ ;\ \ v_A = 0.$$

- Per rispondere alla prima domanda, indichiamo con D il punto lungo il piano inclinato che dista 20 metri dalla cima (cioè dal punto A, nelle nostre notazioni); tracciamo poi a partire da D la parallela alla base del piano inclinato, ed indichiamo con E il suo punto di intersezione con la verticale $\overline{AB}$. Abbiamo ora i tre punti A, che rappresenta la quota massima, E che rappresenta la quota del punto D, e B che rappresenta il suolo. Come abbiamo visto, il lavoro della forza peso dipende solo dalle differenze di quota; quindi, il lavoro per spostare il corpo da A a D coincide con quello necessario a farlo precipitare da A ad E; infatti, $\overline{AE}$ rappresenta proprio la differenza di quota tra A e D. Indichiamo la distanza $\overline{AE}$, cioè la differenza di quota, con $\Delta h'$. Se consideriamo i due triangoli rettangoli ABC e AED, vediamo che hanno i lati paralleli; in particolare, vediamo quindi che l'angolo $\widehat{ACB}$, cioè α, coincide con l'angolo $\widehat{ADE}$, che quindi è anch'esso α. Allora, $\overline{AE}$, di lunghezza $\Delta h'$, è il cateto opposto ad α, la cui ipotenusa è $\overline{AD}$, di lunghezza 20 m; quindi

$$\Delta h' = \overline{AD} \cdot \sin\ \alpha = 20 \cdot \sin\ 60^\circ\ m = 10\ m.$$

A questo punto possiamo applicare la relazione (152), sostituendo Δh con $\Delta h' = 10\ m$, v_B con $v_E \equiv v_D$, e ricordando che $v_A = 0$:

$$g\ \Delta h^{'} = \frac{1}{2}\ v_E^2 \equiv \frac{1}{2}\ v_D^2,$$

cioè

$$100 = \frac{1}{2}\ v_D^2\ m^2\ s^{-2},$$

da cui

$$v_D = \sqrt{200}\ m\ s^{-1} \approx 14.14\ m\ s^{-1}.$$

- Per rispondere alla seconda domanda basta calcolare la differenza di quota $\overline{AB}$, cioè l'altezza h che è data, come sappiamo, da

$$h = l\ \sin\alpha = 15\ m.$$

Applicando la (152) con $\Delta h = 15\ m$ e $v_A = 0$, abbiamo

$$15\ g \equiv 150\ m^2\ s^{-2} = \frac{1}{2}\ v_B^2\ m^2\ s^{-2},$$

da cui

$$v_B = \sqrt{300}\ m\ s^{-1} \approx 17.32\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 5.9): Un primo corpo cade liberamente, partendo da fermo, da un'altezza di 20 metri. Quanto deve essere l'inclinazione minima di un piano inclinato di lunghezza $l = 40\ m$ affinché un secondo corpo che vi scivola senza attrito e partendo da fermo acquisti una velocità superiore al primo?
Soluzione: Anche se non è necessario per la soluzione del problema, calcoliamo la velocità del primo corpo; considerando che la velocità iniziale è zero, abbiamo

$$20\ g \equiv 200 = \frac{1}{2}\ v_f^2,$$

dove v_f denota la velocità finale. Quindi

$$v_f = \sqrt{400}\ m\ s^{-1} = 20\ m\ s^{-1}.$$

Ora, risolviamo il problema. Denotato con α l'angolo di inclinazione del piano, abbiamo che l'altezza del piano è

$$h = l \ \sin \ \alpha = 40 \ \sin \ \alpha \ m.$$

Poichè ambedue i corpi partono da fermo, e le velocità finali dipendono quindi solo dalle quote, basterà imporre che h sia maggiore della quota dalla quale precipita il primo corpo, cioè 10 metri:

$$h > 20 \ m;$$

inserendo l'espressione di h abbiamo

$$40 \ \sin \ \alpha > 20 \ m,$$

cioè

$$\sin \ \alpha > \frac{20}{40} \equiv \frac{1}{2},$$

e quindi

$$\alpha > 60°.$$

Esercizio 5.10): Un punto materiale scivola senza attrito all'interno di una conca semicircolare di raggio pari a 45 metri. Il corpo parte da fermo dal bordo della conca. Calcolare la velocità che il corpo ha acquistato sul fondo della conca, e l'altezza alla quale risalirà dall'altra parte.
Soluzione: Abbiamo detto che, qualsiasi sia il percorso, conta solo la differenza di quota. Se il corpo parte dal bordo della conca si trova chiaramente a quota pari al raggio rispetto al suolo, cioè a quota $\Delta h = 45 \ m$. Chiamo O il punto al fondo della conca. Quello che dobbiamo calcolare è v_O. Poichè il corpo parte da fermo, se A è il punto sul bordo della conca, possiamo usare la relazione (152) con $v_A = 0$, v_B sostituita da v_O, e $\Delta h = 45 \ m$, ottenendo

$$45 \ g \equiv 450 \ m^2 \ s^{-2} = \frac{1}{2} \ v_O^2 \ m^2 \ s^{-2},$$

da cui

$$v_O = \sqrt{900} \ m \ s^{-1} = 30 \ m \ s^{-1}.$$

Per quanto riguarda la seconda domanda, è ovvio che la conservazione dell'energia ci dice che il corpo risale esattamente alla stessa altezza di prima, cioè

$\Delta h = 45\ m$. Insomma, il corpo parte dal bordo della conca e, quando arriva al fondo, ha trasformato tutta l'energia potenziale in energia cinetica; quest'ultima poi fa in modo che il corpo risalga alla stessa quota dall'altra parte della conca, in modo che tutta l'energia cinetica sia ri-trasformata in energia potenziale, e così via indefinitamente; il corpo, cioè, continua ad oscillare nella conca, in assenza di attrito, passando da un punto sul bordo all'altro punto sul bordo che è opposto al primo ecc.

6 Forze di attrito

Abbiamo finora considerato il caso di sistemi meccanici soggetti a forze conservative. Tuttavia, nel mondo reale, se si esclude la meccanica celeste, sono sempre presenti fenomeni di attrito e, quindi, di dissipazione.È da mettere in evidenza che tali fenomeni rivestono una notevole importanza nella nostra vita, anche in termini positivi; per esempio, è la presenza dell'attrito che ci permette di camminare, o alle automobili di muoversi (si pensi a cosa succede quando è presente ghiaccio, che di fatto riduce quasi a zero l'attrito). D'altra parte, in presenza di attrito il principio di conservazione dell'energia meccanica perde la sua validità, a causa dei fenomeni di dissipazione che rendono non più reversibile la dinamica del sistema. Questo, però, non vuol dire che non esiste comunque un principio più universale di conservazione dell'energia. Infatti, come ci insegna la nostra esperienza comune, la presenza di attrito comporta lo sviluppo di *calore* (per questo strofiniamo le mani tra loro quando fa freddo); ma, se ci si mette in un ambito più ampio, quello della *Termodinamica* si può dimostrare che anche il calore è una forma di energia, anche se non si tratta di energia meccanica. Quindi, se si include anche questa forma di energia nel bilancio globale, si può stabilire che vale un più generale principio di conservazione dell'energia, noto come il *Primo Principio della Termodinamica*, che afferma che la somma dell'energia meccanica e del calore(energia termica) si conserva.

Se, però, vogliamo tener conto della parte di attrito in un bilancio energetico rimanendo nell'ambito dei fenomeni meccanici, come possiamo fare? Per raggiungere questo scopo si può introdurre il concetto di *forze di attrito*. Il criterio è semplice: se, infatti, riusciamo ad associare all'attrito una forza, allora, quando il corpo si sposta, questa forza compirà un *lavoro* (come abbiamo visto in precedenza); *questo lavoro rappresenterà l'energia dissipata dall'attrito, e dovrà essere sottratto, nella forma (12) (Lezione 6) della conservazione dell'energia meccanica, al lavoro L_{AB} fatto dalle forze conservative che agiscono sul corpo; questa differenza fornirà così il lavoro utile, inferiore a quello fatto dalle forze conservative, che può essere trasformato in energia cinetica*. Se indichiamo con L^a_{AB} il lavoro (dissipativo) fatto dalle forze di attrito durante lo spostamento tra A e B, la relazione (12) (Lezione 6) viene così modificata

$$L_{AB} - L^{(a)}_{AB} = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_A^2. \tag{154}$$

Come si vede, il primo membro di questa relazione è inferiore a quello della originaria forma (12) (Lezione 6) della conservazione dell'energia meccanica, il che ha come conseguenza che la velocità acquisita dal corpo nel punto finale B sarà inferiore a quella accquisita senza attrito, come è naturale (cioè, con l'attrito il corpo "frena").

Ora , il problema è determinare quanto vale $L_{AB}^{(a)}$; ma questo equivale a determinare la forma delle forze di attrito.

Vari tipi di forze di attrito: attrito statico e attrito dinamico.

Partiamo sempre dall'esperienza comune; noi sappiamo che trascinare un pacco su un pavimento (e non sul ghiaccio dove l'attrito è quasi nullo) comporta un certo sforzo. Sappiamo, inoltre

1) che è più difficile spostare un pacco inizialmente fermo che continuare a muoverlo una volta che incomincia a spostarsi,

2) che la fatica necessaria è tanto più grande quanto più il corpo è pesante.

In base alla considerazione 1) distinguiamo innanzitutto tra *attrito statico* ed *attrito dinamico*; il primo descrive l'opposizione del corpo a *iniziare* il moto, mentre il secondo descrive l'opposizione del corpo a *continuare* il moto una volta che questo è iniziato. Da quello che abbiamo detto, l'attrito statico è superiore all'attrito dinamico.

In base alla considerazione 2) capiamo che le forze di attrito, che ci accingiamo ad introdurre, devono dipendere dal peso del corpo, e devono aumentare con esso.

A questo punto siamo pronti a definire la forma delle forze di attrito:

La forza di attrito (statico o dinamico) esercitata da un corpo di massa m durante il suo trascinamento su un piano orizzontale ha stessa direzione ma verso opposto allo spostamento del corpo, ed ha modulo

$$F_{as} = c_s \, mg \ ,$$

$$F_{ad} = c_d \, mg \ , \tag{155}$$

dove F_{as} , F_{ad} indicano, rispettivamente, i moduli della forza di attrito statico e di quella di attrito dinamico, ed i coefficienti numerici adimensionali c_s , c_d

prendono il nome di coefficiente di attrito statico e coefficiente di attrito dinamico.

In altre parole: *Le forze di attrito che si esercitano su un corpo trascinato su un piano orizzontale hanno stessa direzione e verso opposto allo spostamento del corpo, ed hanno modulo proporzionale al peso del corpo attraverso coefficienti di proporzionalità che prendono il nome di coefficiente di attrito statico o coefficiente di attrito dinamico.*

Dalla considerazione 1), e dalla forma (155) delle forze di attrito, è chiaro che

$$c_s > c_d \ . \tag{156}$$

Il valore dei coefficienti di attrito dipende dai materiali di cui sono fatti il corpo ed il piano, e dalla superficie di contatto tra i due; questo valore viene determinato fenomenologicamente tramite misura.

A questo punto possiamo scrivere la forma esplicita del modulo del lavoro fatto dalle forze di attrito nel caso di un corpo di massa m trascinato lungo un piano orizzontale:

$$\begin{gathered} L_{AB}^{(as)} = c_s \ m \ g \ s, \\ \\ L_{AB}^{(ad)} = c_d \ m \ g \ s, \end{gathered} \tag{157}$$

dove abbiamo usato la notazione $L_{AB}^{(as)}$, $L_{AB}^{(ad)}$ per il lavoro fatto dalle forze di attrito statico o dinamico, rispettivamente, e dove s rappresenta il modulo dello spostamento tra A e B. È chiaro, infine, che, avendo la forza di attrito sempre verso opposto allo spostamento del corpo, esso è sempre negativo, e che quindi vale la relazione di bilancio energetico (154).

Facciamo ora un esempio.

Esercizio 6.1): Un corpo di massa pari a 1 Kg, viene trascinato per 3 metri su un piano in presenza di attrito dinamico di coefficiente $c_d = 0.3$; la forza $\vec{F}$ che trascina il corpo è orizzontale, costante, e di modulo $F = 5 \ N$. Se il corpo parte praticamente da fermo, calcolare la velocità finale.
Soluzione: Usiamo la relazione (154). Innanzitutto, poichè il corpo parte da fermo

$$v_A = 0.$$

Inoltre, la forza che trascina il corpo è costante e parallela (e concorde) allo spostamento; quindi

$$L_{AB} = F\ s = 5 \cdot 3\ J = 15\ J.$$

Infine

$$L_{AB}^{(ad)} = c_d\ mg\ s = 0.3 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 3\ J = 9\ J.$$

Allora

$$(15 - 9)\ J \equiv 6\ J = \frac{1}{2}\ m\ v_B^2 \equiv \frac{1}{2}\ v_B^2,$$

da cui

$$v_B = \sqrt{12}\ m\ s^{-1} \approx 3.464\ m\ s^{-1}.$$

Finora abbiamo considerato il caso di un corpo trascinato su un piano orizzontale, ed abbiamo determinato la forma (155) delle forze di attrito che si esercitano sul corpo stesso. Ci possiamo però ora domandare: cosa succede in un caso più generale, per esempio nel caso in cui il corpo viene trascinato lungo un piano inclinato? In questo caso, basta modificare in modo opportuno la forma (155). Infatti, se indichiamo con $\vec{F}_N$ *la componente normale al piano di trascinamento della forza totale agente sul corpo*, e con F_N il suo modulo, la forma più generale dei moduli delle forze di attrito (statica o dinamica) agente su un corpo diventa

$$F_{as} = c_s\ F_N\ ,$$

$$F_{ad} = c_d\ F_N\ , \tag{158}$$

e le corrispondenti espressioni per il lavoro (dissipativo) da esse fatto diventano

$$L_{AB}^{(as)} = c_s\ F_N\ s,$$

$$L_{AB}^{(ad)} = c_d \, F_N \, s. \tag{159}$$

Quindi, la definizione generale di forze di attrito diventa: *Le forze di attrito che si esercitano su un corpo trascinato su un piano hanno stessa direzione e verso opposto allo spostamento del corpo, ed hanno modulo proporzionale alla componente normale al piano di trascinamento della forza totale agente sul corpo, attraverso coefficienti di proporzionalità che prendono il nome di coefficiente di attrito statico o coefficiente di attrito dinamico.*

Prima di passare a qualche appllicazione, dobbiamo fare una precisazione. Il tipo di attrito (statico o dinamico) che abbiamo preso in considerazione finora presuppone che il corpo sul quale questo attrito si esercita venga *trascinato*; diciamo allora in questo caso che si tratta di *attrito radente.* Esiste però un altro tipo di attrito che si esercita quando siamo in presenza di *rotolamento* (per esempio, quando abbiamo una ruota che avanza ruotando): in questo caso parliamo di *attrito volvente.* In realtà l'attrito volvente, specie se la regione di contatto istante per istante tra il corpo (la ruota) ed il terreno si riduce sostanzialmente ad un punto, ha il solo ruolo di permettere il movimento rotatorio; in pratica, è questo attrito che permette ad una macchina di "correre" lungo l'autostrada (avete mai provato, invece, a guidare sul ghiaccio?...). Prendendo come esempio proprio una macchina, quindi, l'attrito volvente è quello che le permette di muoversi. Quando, però, è necessario frenare, allora deve intervenire l'attrito *radente*, il quale agisce quando le ruote *strisciano e non girano.* Questo spiega perchè l'impianto frenante è tanto più efficace quanto più rapidamente blocca il moto rotatorio, permettendo l'innesco del moto radente (avrete sentito spesso l'espressione "inchiodare le ruote"). I costruttori di auto, quindi, mettono molta attenzione a questo aspetto; inoltre, studiano la composizione e la "rugosità" dei pneumatici in modo tale che, una volta innescato il moto radente, il coefficiente di attrito sia il più alto possibile. Per concludere questa divagazione pratica, ricordo che abbinare alla frenata uno scalamento delle marce è salutare perchè diminuisce la spinta del motore; e, soprattutto, ricordo che *evitare di correre troppo rimane l'accorgimento più salutare per salvare la propria vita e quella degli altri* (in questo senso, vi invito a notare l'importanza del termine cinetico $\frac{1}{2}\, m\, v_A^2$, relativo nel nostro caso alla velocità prima della frenata, nell'Eq. (154), ed alla sua dipendenza dal QUADRATO della velocità).

Comunque, a parte questa divagazione, non abbiamo la possibilità di approfondire il concetto di attrito volvente, e passiamo ora ad esempi ed applicazioni.

Applicazioni al piano inclinato.

Consideriamo ora, come caso di applicazione della definizione più generale (159) di forze di attrito, un corpo appoggiato ad un piano inclinato che presenta attrito. Indichiamo ancora con α, come nella lezione 6, l'angolo di inclinazione, e rappresentiamo, sempre come nella lezione 6, il piano inclinato attraverso una sezione verticale, e quindi come un triangolo rettangolo ABC, la cui ipotenusa $\overline{AC}$ rappresenta proprio il piano inclinato, il cui cateto verticale $\overline{AB}$ ha lunghezza pari alla quota, o altezza, del punto più alto A dal suolo, ed il cui cateto orizzontale $\overline{BC}$ è paralelo al terreno. L'angolo di inclinazione α del piano è sempre l'angolo formato tra il cateto orizzontale $\overline{BC}$ e l'ipotenusa $\overline{AC}$; esso, quindi, è *adiacente* a $\overline{BC}$ e *opposto* ad $\overline{AB}$. Infine, riscriviamo qui anche le relazioni tra altezza, base e lunghezza del piano inclinato (vedi lezione 6):

$$h = l \ \sin \ \alpha,$$

$$b = l \ \cos \ \alpha.$$

Ora, se vogliamo applicare il bilancio energetico che comprende anche l'attrito, per prima cosa dobbiamo determinare quanto vale il modulo F_N della componente della forza totale agente sul corpo che è perpendicolare al piano inclinato, cioè al piano di scivolamento. Se m è la massa del corpo, la forza che agisce su di esso è la forza peso, di modulo $m \ g$ diretta perpendicolarmente alla base del triangolo ABC, e dall'alto verso il basso. Questa forza può essere scomposta in una componente perpendicolare al piano inclinato, ed in una parallela a tale piano. Si traccino infatti due assi Cartesiani, con origine sul corpo (punto materiale), uno dei quali (asse X) abbia direzione coincidente con quella del piano inclinato e verso che va da A a C, e l'altro (asse Y) direzione perpendicolare al piano inclinato e verso (per esempio) uscente dal triangolo ABC. Indichiamo con O l'origine degli assi, che coincide con la posizione del punto materiale. Disegnamo il vettore forza-peso come una freccetta verticale che parte da O e punta verso il basso, e indichiamo con D la punta della freccia. La lunghezza $\overline{OG}$ sarà quindi il modulo della forza peso, cioè $m\ g$. Tracciamo ora, a partire da D, la perpendicolare all'asse X, e chiamiamo E il suo punto di intersezione con tale asse; allora, la lunghezza $\overline{OE}$ sarà il modulo della componente della forza peso lungo X, e quindi sarà il modulo della componente della forza peso *parallela* al piano inclinato. Tracciamo poi, sempre a partire da D, la perpendicolare all'asse Y, e chiamiamo G il suo punto di intersezione con tale asse; allora, la lunghezza $\overline{OG}$ sarà il modulo della componente della forza peso lungo Y, e quindi sarà il modulo della componente della forza peso *perpendicolare* al piano inclinato.

Adesso, è chiaro che F_N, il modulo della componente della forza totale agente sul corpo che è perpendicolare al piano inclinato, non è altro che la lunghezza $\overline{OG}$. Per calcolarla, consideriamo il triangolo rettangolo ODG, la cui ipotenusa $\overline{OD}$ vale $m\ g$, e di cui $\overline{OG}$ rappresenta un cateto. Ora, notiamo che gli angoli $\widehat{ACB}$, che non è altro che α, e $\widehat{GOD}$ hanno lati tra loro perpendicolari ($\overline{OG}$ è perpendicolare ad $\overline{AC}$, e $\overline{OD}$ è perpendicolare a $\overline{CB}$); per un noto teorema di geometria, i due angoli sono uguali:

$$\widehat{GOD} = \widehat{ACB} \equiv \alpha.$$

Allora, nel triangolo rettangolo ODG il cateto $\overline{OG}$, cioè F_N, è adiacente ad α, e quindi è uguale all'ipotenusa $\overline{OD} \equiv m\ g$ moltiplicata per il coseno di α:

$$F_N = m\ g\ \cos\ \alpha. \tag{160}$$

La forza di attrito dinamico è allora

$$F_{ad} = c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha), \tag{161}$$

e il lavoro dissipativo dovuto ad uno spostamento con attrito (dinamico) lungo un tratto generico $\overline{PQ}$ di lunghezza s del piano inclinato (dove P e Q sono due punti generici del piano) è dato, usando la (159) e la (160), da

$$L_{PQ}^{(ad)} = c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha)\ s. \tag{162}$$

Poichè, chiamata Δh_{PQ} la differenza di quota tra i punti P e Q, il lavoro L_{PQ} che la forza peso svolgerebbe in assenza di attrito è (vedi Lezione 6) $L_{PQ} = m\ g\ \Delta h_{PQ}$, la relazione (154), tenuto conto della (162) diventa in questo caso

$$m\ g\ \Delta h_{PQ} - c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha)\ s = \frac{1}{2}\ m\ v_Q^2 - \frac{1}{2}\ m\ v_P^2, \tag{163}$$

dove naturalmente v_P e v_Q sono le velocità del corpo nei punti P e Q. Eliminando la massa m, presente in tutti i termini dell'equazione, abbiamo infine

$$g\ (\Delta h_{PQ} - c_d\ s\ \cos\ \alpha) = \frac{1}{2}\ (v_Q^2 - v_P^2). \qquad (164)$$

Prima di proseguire con delle applicazioni, facciamo due osservazioni.

Innanzitutto, la prima delle (158) e l'espressione (160) ci dicono che la forza di attrito statico lungo il piano inclinato è

$$F_{as} = c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha). \qquad (165)$$

Inoltre, notiamo che la componente della forza peso parallela al piano inclinato, che poi è la componente che effettivamente fa muovere il corpo, ha modulo F_P dato, nelle nostre notazioni, dalla lunghezza $\overline{OE}$, che coincide con la lunghezza dell'altro cateto del triangolo rettangolo ODG, al quale è parallelo, e che è opposto ad α; quindi, questa componente vale

$$F_P = m\ g\ \sin\ \alpha. \qquad (166)$$

Vediamo ora qualche applicazione.

Esercizio 6.2): Un punto materiale scivola lungo un piano inclinato, partendo praticamente da fermo; il piano è inclinato di un angolo α, ed il coefficiente di attrito dinamico è 0.3. Calcolare quanto deve valere α affinchè il corpo si fermi esattamente ai piedi del piano inclinato
Soluzione: Dai dati del problema, nelle nostre notazioni, i punti P e Q della formula (164) coincidono con i punti A e C del triangolo rettangolo ABC che rappresenta il piano inclinato, la distanza tra P e Q è quindi la lunghezza l del piano inclinato, $\Delta h_{PQ} \equiv \Delta h_{AC}$ coincide con l'altezza h del piano inclinato, e inoltre $v_Q \equiv v_C$ e $v_P \equiv v_A = 0$. Allora, Riscriviamo la relazione (164) con $P \equiv A$, $Q \equiv C$, $s \equiv l$, $\Delta h_{PQ} \equiv \Delta h_{AC} = h$, $v_Q \equiv v_C$, e $v_P \equiv v_A = 0$:

$$g\ (h - c_d\ l\ \cos\ \alpha) = \frac{1}{2}\ v_C^2.$$

Ricordiamo ora che l'altezza h del piano inclinato e la sua lunghezza sono connessi dalla relazione $h = l\ \sin\ \alpha$ e, sostituendo nella precedente relazione

$$g\ l\ (\sin\ \alpha - c_d\ \cos\ \alpha) = \frac{1}{2}\ v_C^2.$$

Poichè la velocità ai piedi del piano inclinato, cioè v_C deve essere nulla, annullando il secondo membro dell'ultima relazione abbiamo

$$\sin\ \alpha - c_d\ \cos\ \alpha = \ \alpha 0,$$

da cui

$$c_d = \tan\ \alpha,$$

cioè

$$\alpha = \arctan\ c_d = \arctan\ 0.3 = 17.197°.$$

Esercizio 6.3): Un corpo, partendo da una velocità iniziale v_0, scivola dalla cima di un piano inclinato di lunghezza pari a 27 metri, inclinato di 60 gradi, con un attrito dinamico di coefficiente pari a 0.3. Calcolare quanto deve valere v_0 affinchè il corpo alla fine del piano inclinato abbia la stessa velocità che avrebbe se partisse da fermo dalla cima del piano inclinato in assenza di attrito.
Soluzione: Con le solite notazioni, scriviamo la relazione (164) con $P \equiv A$, $Q \equiv C$, $s \equiv l$, $\Delta h_{PQ} \equiv \Delta h_{AC} = h$, $v_Q \equiv v_C$, e $v_P \equiv v_A = v_0$:

$$g\ (h - c_d\, l\ \cos\ \alpha) = \frac{1}{2}\ (v_C^2 - v_0^2).$$

Nel nostro caso abbiamo $l = 27\ m$, $c_d = 0.3$, $\alpha = 60°$ e $h = l\ \sin\ \alpha$; quindi, da $\sin\ 60° = \sqrt{3}/2$, $\cos\ 60° = 1/2$ e $g \approx 10\ m\ s^{-2}$, abbiamo

$$10 \cdot 27 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.3 \cdot \frac{1}{2}) \approx 193.326\ m^2\ s^{-2} = \frac{1}{2}\ (v_C^2 - v_0^2),$$

da cui

$$v_C^2 = v_0^2 + 2 \cdot 193.326\ m^2\ s^{-2} = v_0^2 + 386.652\ m^2\ s^{-2}.(*)$$

Questa è la velocità finale nel caso con attrito. Nel caso senza attrito il corpo parte da fermo, cioè $v_P \equiv v_A = 0$, e possiamo applicare la (164) con $v_P \equiv v_A = 0$ e $c_d = 0$, ottenendo:

$$g\ h \equiv g\ l\ \sin\ \alpha = \frac{1}{2}\ v_C^2,$$

cioè

$$10 \cdot 27 \cdot \sqrt{3}2 \approx 233.826 = \frac{1}{2}\, v_C^2,$$

da cui

$$v_C^2 = 467.652\ m^2\ s^{-2}.(**)$$

Poichè v_C^2, secondo le richieste del problema, deve avere lo stesso valore sia nella relazione (*) che nella relazione (**), uguagliando i secondi membri otteniamo

$$v_0^2 + 386.652 = 467.652,$$

cioè

$$v_0^2 = 467.652 - 386.652\ m^2\ s^{-2} = 81\ m^2\ s^{-2}.$$

Quindi

$$v_C = 9\ m\ s^{-1}.$$

Esercizi

Esercizio 6.4): Un'utomobile corre su un tratto rettilineo di autostrada a 144 km/h, sbanda e va a sbattere contro un traliccio. Da quale altezza bisognerebbe lasciar cadere da ferma l'auto per causarle gli stessi danni?
Soluzione: Il lavoro che la forza di gravità compie quando un corpo di massa m cade da un'altezza h è $m\ g\ h$. La conservazione dell'energia ci dice che questo lavoro viene trasformato in energia cinetica:

$$m\ g\ h = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

da cui

$$h = \frac{v^2}{2\ g}.$$

Nel sistema MKS 144 Km/h corrispondono a 40 m/s, da cui

$$h \approx \frac{1600}{20}\ m = 80\ m.,$$

corrispondenti ad un palazzo di circa 26 piani!

Esercizio 6.5): Due automobili che vanno ciascuna alla velocità di 36 Km/h fanno uno scontro frontale. Da quale altezza bisognerebbe lasciar cadere da ferme le auto per causar loro gli stessi danni?
Soluzione: Per la composizione delle velocità, ciascuna automobile viaggia rispetto all'altra con una velocità effettiva di $(36+36)\ Km/h = 72\ Km/h = 20\ m/s$. dalla relazione

$$h = \frac{v^2}{2\,g}$$

abbiamo

$$h \approx \frac{400}{20}\ m = 20\ m$$

(più di 6 piani!).

Esercizio 6.6): Un'utomobile corre su un tratto rettilineo di autostrada a 144 km/h. Il coefficiente di attrito dinamico dell'asfalto vale circa 0.3. Quanto spazio sarà necessario all'auto per fermarsi dal momento in cui la frenata blocca le ruote e quindi l'automobile comincia a strisciare, ed il motore ha esaurito la sua spinta?
Soluzione: Possiamo applicare la (154). Trattandosi di un moto in piano con forza normale data dalla forza peso, il lavoro dissipativo è dato dalla seconda relazione dell'Eq. (157), con $c_d = 0.3$ e con s che rappresenta l'incognita. Inoltre, essendosi esaurita la spinta del motore, il contributo L_{AB} nella (154) è nullo. Infine, la velocità iniziale v_A è $v_A = 144\ km/h = 40\ m/s$, e la velocità finale v_B, dovendosi la mcchina fermare, è $v_B = 0$. possiamo quindi scrivere, semplificando anche m,

$$-\ 0.3\ g\ s \approx -\ 3\ s = -\frac{1}{2}\ (40)^2 \equiv -\ 800,$$

da cui

$$s \approx \frac{800}{3}\ m \approx 266.66\ m.$$

Esercizio 6.7): Un corpo, partendo praticamente da fermo, scivola con attrito lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha = 30°$. Il coefficiente di attrito dinamico è $c_d = 0.3$, e la lunghezza del piano è $l = 30\ m$. Calcolare qual'è la velocità del corpo dopo che ha percorso 10 metri lungo il piano.

Esercizio 6.8): Un corpo di massa $m = 2\ Kg$ è soggetto ad una forza F costante di 10 N e, partendo da fermo, percorre senza essere soggeto ad attrito 100 m; a questo punto la forza F cessa di agire praticamente in modo istantaneo, ed il corpo colpisce una molla, inizialmente in equilibrio, di costante elastica $k = 3\ N/m$, e la comprime. Lo stesso corpo, con la stessa massa $m = 2\ Kg$ e soggetto alla stessa forza F costante, ma soggetto anche ad attrito dinamico, percorre, partendo da fermo, 100 metri, dopo i quali la forza F cessa di agire praticamente in modo istantaneo; a questo punto cessa anche l'attrito, ed il corpo colpisce la stessa molla, inizialmente in equilibrio, di costante elastica $k = 3\ N/m$, e la comprime. Calcolare:

1) la velocità del corpo dopo i 100 metri percorsi senza attrito (usare la conservazione dell'energia meccanica);

2) il valore del coefficiente di attrito dinamico sapendo che, dopo un tempo $t = \pi/(2\omega)$ dall'inizio della compressione della molla (con $\omega = \sqrt{k/m}$), la lunghezza della compressione stessa nel caso con attrito è la metà di quella nel caso senza attrito;

3) la velocità del corpo dopo i 100 metri percorsi con attrito (usare il valore del coefficiente di attrito dinamico ricavato dal quesito 2).

7 Meccanica dei sistemi di punti materiali

Ovviamente, non sempre un sistema meccanico può essere ridotto ad un solo punto materiale. Infatti, possiamo trovarci in presenza di più corpi, *ciascuno dei quali* può essere considerato un punto materiale (se le dimensioni di ogni corpo sono trascurabili rispetto alla scala di osservazione). Oppure, possiamo trovarci nella situazione in cui le dimensioni di un corpo *non* sono trascurabili rispetto alla scala di osservazione ("corpo esteso"). Nel primo caso avremo a che fare con un *sistema di punti materiali*, cioè con un sistema costituito da un certo numero N di punti materiali, che potranno in principio interagire tra loro, oltre che con sistemi meccanici esterni. Ma anche nel secondo caso (corpo esteso) potremo considerare il corpo come costituito da *moltissimi* (al limite "infiniti") punti materiali. Potremo infatti dividere il corpo esteso in tanti volumetti "piccolissimi", contenenti un massa anch'essa, ovviamente "piccolissima", ciascuno dei quali può essere considerato un punto materiale; il corpo esteso può essere quindi trattato come un sistema costituito da tutti questi punti materiali.

A questo punto ci possiamo domandare: esistono delle leggi, analoghe a quelle che descrivono la meccanica di un punto materiale, che sono in grado di descrivere la meccanica di un sistema di punti materiali?

Per poter affrontare questo argomento, cominciamo con introdurre delle opportune definizioni e notazioni.

Innanzitutto, numeriamo arbitrariamente da 1 a N i punti materiali costituenti il nostro sistema, ed indichiamo con Indichiamo poi con P_1 il punto dello spazio in cui si trova il primo punto materiale, con P_2 il punto dello spazio in cui si trova il secondo punto materiale, ... , con P_N il punto dello spazio in cui si trova l'N-simo punto materiale. Conviene comunque usare la solita notazione sintetica, indicando con P_i $(i = 1, ..., N)$ il punto dello spazio in cui si trova il punto materiale i-esimo.

Inoltre, indichiamo con m_i $(i = 1, ..., N)$ la massa del punto materiale i-esimo.

Definiamo poi arbitrariamente, nella zona di spazio contenente il sistema di punti materiali, un sistema di riferimento Cartesiano, con origine in un punto O, e con assi X, Y, Z. In questo sistema di riferimento, ognuno degli N punti materiali sarà associato ad un vettore posizione. Indichiamo con $\vec{s}_i$ $(i = 1, ..., N)$ il vettore posizione del punto materiale i-esimo; questo vettore avrà modulo pari alla distanza $\overline{OP_i}$ che va dall'origine O del sistema di riferimento al punto P_i in cui si trova il punto materiale i-esimo, direzione e verso da O a P_i. Indicheremo anche con x_i, y_i, z_i $(i = 1, ..., N)$ le componenti lungo gli assi X, Y, Z di $\vec{s}_i$, cioè $\vec{s}_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$.

Ovviamente, se il sistema di punti materiali è soggetto ad una dinamica, la posizione di ogni punto dipenderà dal tempo, e quindi potremo scrivere $\vec{s}_i(t) \equiv (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ $(i = 1, ..., N)$, intendendo che $\vec{s}_i(t)$ rappresenta la posizione del punto materiale i-esimo all'istante t.

Indichiamo, ancora, con $\vec{v}_i(t)$ $(i = 1, ..., N)$ la velocità del punto materiale i-esimo all'istante t. Essa sarà definita, ovviamente da

$$\vec{v}_i(t) \doteq \frac{d\vec{s}_i(t)}{dt} \ ; \ i = 1, ..., N \ . \tag{167}$$

La velocità del punto materiale i-esimo all'istante t avrà componenti lungo gli assi X, Y, Z $v_{i,x}(t), v_{i,y}(t), v_{i,z}(t)$, definite come le derivate temporali delle corrispondenti componenti di $\vec{s}_i(t)$:

$$v_{i,x}(t) \doteq \frac{dx_i(t)}{dt} \ ; \ i = 1, ..., N \ ,$$

$$v_{i,y}(t) \doteq \frac{dy_i(t)}{dt} \ ; \ i = 1, ..., N \ ,$$

$$v_{i,z}(t) \doteq \frac{dz_i(t)}{dt} \ ; \ i = 1, ..., N \ . \tag{168}$$

Introduciamo anche la quantità di moto $\vec{p}_i(t)$ $(i = 1, ..., N)$ del punto materiale i-esimo all'istante t, definita da

$$\vec{p}_i(t) \doteq m_i \ \vec{v}_i(t) \ ; \ i = 1, ..., N \ , \tag{169}$$

le cui componenti sono, ovviamente

$$\vec{p}_i(t) \equiv p_{i,x}(t), p_{i,y}(t), p_{i,z}(t) \equiv (m_i \ v_{i,x}(t), m_i \ v_{i,y}(t), m_i \ v_{i,z}(t))$$

$$\equiv \left(m_i \ \frac{dx_i(t)}{dt}, m_i \ \frac{dy_i(t)}{dt}, m_i \ \frac{dz_i(t)}{dt} \right) .$$

Definiamo, infine, la *quantità di moto totale* $\vec{p}^{(tot)}$ del sistema all'istante t come

$$\vec{p}^{(tot)}(t) \doteq \sum_{i=1,...,N} \vec{p}_i(t) \ . \tag{170}$$

Introdotte queste definizioni e notazioni, possiamo ora passare a stabilire i principi che regolano la dinamica dei sistemi di punti materiali.

7.1 Il principio di conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato

Allo scopo di arrivare ad enunciare le leggi che regolano regolano la dinamica dei sistemi di punti materiali introduciamo innanzitutto il concetto di *sistema isolato di punti materiali*: *un sistema di N punti materiali si definisce isolato se le forze che agiscono su un qualsiasi punto del sistema sono esercitate esclusivamente dagli altri punti del sistema stesso*. Se definiamo *forze interne* le forze che si esercitano tra i soli punti del sistema, possiamo anche affermare che *un sistema di N punti materiali si definisce isolato se in esso sono presenti esclusivamente forze interne*. Un esempio di sistema isolato è un sistema di punti materiali tra i quali si esercita attrazione gravitazionale reciproca, e che si trova molto distante da qualsiasi altro sistema materiale.

Indichiamo ora con $\vec{F}_{ij}$ $(i, j = 1, ..., N \ ; i \neq j)$ la forza che il punto materiale i-esimo esercita sul punto materiale j-esimo; per esempio, $\vec{F}_{12}$ è la forza che il punto materiale 1 esercita sul punto materiale 2. Chiaramente, le forze $\vec{F}_{ij}$ sono le forze interne. Definiamo poi la *risultante delle forze interne, o forza totale interna,* $\vec{F}^{(int)}$ come la somma vettoriale di tutte le forze interne:

$$\vec{F}^{(int)} \doteq {\sum}^{(')}{}_{i,j=1,...,N} \ \vec{F}_{ij} \ , \tag{171}$$

dove $\sum^{(')}$ indica che nella somma non viene incluso il caso $i = j$. Si noti che nella somma compaiono sia $\vec{F}_{ij}$ (la forza che i esercita su j) che $\vec{F}_{ji}$ (la forza che j esercita su i).

Adesso enunciamo un principio di conservazione che avrà un'importante conseguenza per le forze interne. Si ricorderà che un principio in Fisica è un assunzione dedotta dall'osservazione, e poi avvalorata controllandone la validità attraverso esperimenti.

Principio di conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato: "in un sistema isolato la quantità di moto totale rimane costante nel tempo".

Espresso in formula, il principio dà

$$\vec{p}^{(tot)}(t) = cost. \tag{172}$$

Vediamo cosa significa esattamente, e quali conseguenze ha, questo principio. Il principio ci dice che, se il sistema di punti materiale rimane isolato, cioè, se in esso sono presenti solo forze interne, i punti materiali potranno anche cambiare le loro velocità *individuali*, e quindi le loro quantità di moto individuali, ma sempre in modo tale che, ad ogni istante, la somma di tutte le quantità di moto rimanga la stessa. Prendiamo, per semplicità, l'esempio semplice di un sistema isolato costituito da due soli punti materiali, di masse m_1 e m_2, di velocità $\vec{v}_1(t)$ e $\vec{v}_2(t)$ all'istante generico t, e, conseguentemente, di quantità di moto $\vec{p}_1(t) = m_1\ \vec{v}_1(t)$ e $\vec{p}_2(t) = m_2\ \vec{v}_2(t)$ all'istante generico t. Adesso consideriamo due diversi istanti di tempo $t^{'}$ e $t^{''} > t^{'}$ (per esempio, $t^{'} = 1\ s$ e $t^{''} = 2\ s$); indichiamo quindi con $\vec{p}_1(t^{'})$ e $\vec{p}_2(t^{'})$ le quantità di moto dei due punti all'istante $t^{'}$, e con $\vec{p}_1(t^{''})$ e $\vec{p}_2(t^{''})$ le quantità di moto dei due punti all'istante $t^{''}$. Supponiamo ancora che $\vec{p}_1(t^{''})$ sia *diverso* da $\vec{p}_1(t^{'})$, cioè che la quantità di moto del primo punto materiale *sia cambiata* passando dall'istante $t^{'}$ al successivo istante $t^{''}$; allora, il principio di conservazione ci dice che *deve essere cambiata anche la quantità di moto del secondo punto, in modo tale che*

$$\vec{p}_1(t^{'}) + \vec{p}_2(t^{'}) = \vec{p}_1(t^{''}) + \vec{p}_2(t^{''}).\ (*)$$

Diamo anche dei valori numerici in questo esempio per renderlo più chiaro. Supponiamo quindi che le masse dei due punti valgano $m_1 = 2\ Kg$ e $m_2 = 3\ Kg$. Assegnamo poi anche le velocità; qui interviene la complicazione che le velocità, e quindi le quantità di moto, sono *vettori*, e quindi le loro somme vanno eseguite vettorialmente, il che è un po' complicato. Allora, per semplificare la situazione, supponiamo che $\vec{v}_1(t^{'})$, $\vec{v}_2(t^{'})$, e $\vec{v}_1(t^{''})$ (e, quindi, anche $\vec{p}_1(t^{'})$, $\vec{p}_2(t^{'})$, e $\vec{p}_1(t^{''})$) *abbiano tutti la stessa direzione*; in altre parole, all'istante $t^{'}$ le velocità (e quindi le quantità di moto) dei due corpi sono dirette lungo la stessa retta, e all'istante successivo $t^{''}$ la velocità (e quindi la quantità di moto) del primo corpo ha cambiato al più il suo modulo e/o il suo verso, ma *è ancora diretta lungo la stessa direzione iniziale.*

A questo punto, la condizione $(*)$ (che esprime la conservazione della quantità di moto totale in questo caso) ci dice innanzitutto *che anche* $\vec{v}_2(t^{''})$ *(e quindi* $\vec{p}_2(t^{''})$*) deve avere la direzione degli altri tre vettori quantità di moto*; infatti, se il primo membro della $(*)$ $(\vec{p}_1(t^{'}) + \vec{p}_2(t^{'}))$ è un vettore diretto lungo una certa direzione, ed anche il primo vettore a secondo membro della $(*)$ $(\vec{p}_1(t^{''}))$ è diretto lungo la stessa direzione, il secondo vettore del secondo membro $(\vec{p}_2(t^{''}))$ non può avere un'altra direzione, altrimenti la composizione vettoriale lungo la diagonale del rombo di lati $\vec{p}_1(t^{''})$ e $\vec{p}_2(t^{''})$ darebbe una direzione diversa. A questo punto, fissiamo un sistema di riferimento che ha un asse coincidente con la direzione comune dei quattro vettori; se sull'asse assegnamo un verso positivo, le quattro quantità di moto saranno assegnati dandone il modulo ed il segno (positivo se puntano nel verso positivo, negativo se puntano nel verso opposto). In base a queste considerazioni, fissiamo $v_1(t^{'}) = +15\ m/s$, $v_2(t^{'}) = +10\ m/s$, $v_1(t^{''}) = -5\ m/s$; quindi, vediamo che le velocità all'istante $t^{'}$ hanno tutte e due verso positivo, mentre all'istante $t^{''}$ la velocità del primo corpo ha cambiato non solo il modulo ma anche il verso. In base alle definizioni, le corrispondenti quantità di moto valgono $p_1(t^{'}) = +30\ kg \cdot m/s$, $p_2(t^{'}) = +30\ kg \cdot m/s$, e $p_1(t^{''}) = -10\ kg \cdot m/s$. La condizione $(*)$ ci dice allora quanto deve valere $p_2(t^{''})$; infatti, inserendo i precedenti dati numerici nella $(*)$ abbiamo:

$$(30 + 30)\ kg \cdot m/s = -10\ kg \cdot m/s + p_2(t^{''}),$$

da cui ricaviamo

$$p_2(t^{''}) = 70\ kg \cdot m/s.$$

Quindi il principio di conservazione della quantità di moto totale fornisce *un vincolo*.

Ma vedremo ora che tale principio ha un'importante conseguenza relativa alle forze interne. Per arrivare a questa conseguenza facciamo alcune considerazioni preliminari.

Innanzitutto, se deriviamo rispetto al tempo la quantità di moto $\vec{p}_i(t)$ del punto i-esimo, ed usiamo la definizione (169), otteniamo

$$\frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} \equiv m_i\ \frac{d\vec{v}_i(t)}{dt} = m_i\ \vec{a}_i(t)\ ;\ i = 1, ..., N\ ; \qquad (173)$$

ma la derivata della velocità rispetto al tempo è l'accelerazione, e quindi *la derivata della velocità del punto i-esimo rispetto al tempo è l'accelerazione* $\vec{a}_i(t)$ *del punto i-esimo*, e quindi:

$$\frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = m_i\ \vec{a}_i(t)\ ;\ i = 1, ..., N\ . \tag{174}$$

D'altra parte, dal secondo principio della dinamica sappiamo che il prodotto della massa m_i del punto i-esimo per la sua accelerazione $\vec{a}_i(t)$ *è uguale alla forza totale* $\vec{F}_i$ *che si esercita sul punto i-esimo*; quindi, possiamo scrivere:

$$\frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = \vec{F}_i\ ;\ i = 1, ..., N\ . \tag{175}$$

Ora, se il sistema è isolato la forza totale che si esercita sul punto i-esimo non può che essere uguale alla somma delle forze interne che *gli altri* punti materiali esercitano su di esso; avendo indicato, secondo le nostre notazioni, con $\vec{F}_{ji}$ $(j = 1, ..., N\ ; j \neq i)$ la forza che il punto materiale j-esimo esercita sul punto i-esimo, la forza $\vec{F}_i$ è la somma di queste forze, e cioè

$$\vec{F}_i = \sum\nolimits^{(')}_{j=1,...,N}\ \vec{F}_{ji}\ , \tag{176}$$

dove $\sum^{(')}$ indica, come prima, che si somma solo sui $j \neq i$. Inserendo questa relazione nella Eq. (175) abbiamo anche

$$\frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = \sum\nolimits^{(')}_{j=1,...,N}\ \vec{F}_{ji}\ ;\ i = 1, ..., N\ . \tag{177}$$

Adesso, facciamo ancora un passo, e inseriamo nell'Eq. (177) la somma su tutti gli da 1 a N, ottenendo

$$\sum_{i=1,...,N} \frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = \sum_{i=1,...,N} \sum\nolimits^{(')}_{j=1,...,N}\ \vec{F}_{ji} \equiv \sum\nolimits^{(')}_{i,j=1,...,N}\ \vec{F}_{ij}\ , \tag{178}$$

dove abbiamo unificato le due somme in un'unica somma doppia, con la solita condizione $i \neq j$. Ma, se guardiamo l'Eq. (171) vediamo che il secondo membro della (178) non è altro che la forza interna totale (somma di tutte le forze interne), e quindi abbiamo

$$\sum_{i=1,...,N} \frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = \vec{F}^{(int)}\ . \tag{179}$$

Torniamo ora al principio di conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato, espresso dalla condizione (172); deriviamo i due membri di questa relazione, ottenendo

$$\frac{d\vec{p}^{(tot)}(t)}{dt} = 0 \; , \tag{180}$$

poichè la derivata della costante a secondo membro è, come sappiamo, nulla. Se ora ricordiamo la definizione (170) di $\vec{p}^{(tot)}(t)$ e la inseriamo al primo membro della (180), otteniamo

$$\frac{d\vec{p}^{(tot)}(t)}{dt} \equiv \frac{d(\sum_{i=1,\ldots,N} \; \vec{p}_i(t))}{dt} \equiv \sum_{i=1,\ldots,N} \frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} \; ; \tag{181}$$

di conseguenza la relazione (180) si riscrive come

$$\sum_{i=1,\ldots,N} \frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = 0 \; . \tag{182}$$

Ma l'Eq. (179) ci dice che il primo membro di questa relazione *è uguale alla forza interna totale* $\vec{F}^{(int)}$, e quindi, in definitiva,

$$\vec{F}^{(int)} = 0 \; . \tag{183}$$

Questa relazione, conseguenza del principio di conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato, ci dice che

"*la forza interna totale, cioè la somma delle forze interne, di un sistema isolato è sempre nulla*".

Si noti che talvolta si enuncia questo come principio, e si ricava il principio di conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato come sua conseguenza; di fatto, i due principi sono equivalenti.

Se ci riduciamo ancora al caso particolare di due soli punti materiali (punto 1 e punto 2), vediamo che in questo caso agiscono solo due forze interne: $\vec{F}_{12}$ (la forza che il punto materiale 1 esercita sul punto materiale 2), e $\vec{F}_{21}$ (la forza che il punto materiale 2 esercita sul punto materiale 1). La forza interna totale $\vec{F}^{(int)}$ sarà allora la somma di queste due forze

$$\vec{F}^{(int)} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21},$$

e la condizione (183) darà allora

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0,$$

cioè

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \ . \tag{184}$$

Questa relazione è nota come *Principio di azione e reazione*, e si può enunciare nel modo seguente:

"*all'azione che il punto materiale* 1 *esercita sul punto materiale* 2 *(*$\vec{F}_{12}$*) corrisponde una reazione uguale (in modulo) e contraria (in verso) del punto materiale* 2 *sul punto materiale* 1 *(*$-\vec{F}_{21}$*)*".

Si noti, comunque, che la formulazione in termini di azione e reazione può essere estesa anche al caso generale. Infatti, dividiamo arbitrariamente il sistema di N punti materiali in due sottosistemi, costituiti da N_1 e N_2 punti, con $N_1 + N_2 = N$; indichiamo con $\vec{F}_{N_1,N_2}$ la forza totale che il sistema di N_1 punti esercita su quello di N_2 punti, e con $\vec{F}_{N_2,N_1}$ la forza totale che il sistema di N_2 punti esercita su quello di N_1 punti; allora, chiaramente,

$$\vec{F}^{(int)} = \vec{F}_{N_1,N_2} + \vec{F}_{N_2,N_1},$$

e la condizione (183) darà in questo caso

$$\vec{F}_{N_1,N_2} = -\vec{F}_{N_2,N_1} \ . \tag{185}$$

Questo spiega l'enunciato più noto e generale: "ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria".

7.2 Le forze esterne, il concetto di baricentro, e la legge del moto traslatorio di un sistema di punti materiali

Forze esterne

Abbiamo finora considerato sistemi isolati, cioè sistemi di punti materiali nei quali agiscono solo forze interne. Avendo stabilito che la somma delle forze interne è sempre nulla, è chiaro che il sistema *nel suo complesso* mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme; in altre parole, le forze interne non possono modificare il moto complessivo del sistema.

Supponiamo ora che il sistema di punti materiali *non sia isolato*, cioè che su di esso agiscano anche forze esercitate da altri sistemi; chiameremo queste forze *forze esterne*. Per esempio, possiamo pensare ad un sistema di punti materiali che interagiscono tra loro attraverso l'attrazione gravitazionale, ma che sono anche soggetti complessivamente all'attrazione gravitazionale di un corpo esterno al sistema. Consideriamo allora il punto materiale i-esimo $(i = 1, ..., N)$, ed indichiamo con $\vec{F}_i^{(int)}$ la forza totale interna che agisce su questo punto (cioè, la somma delle forze che gli altri punti del sistema esercitano sul punto i-esimo), forza che ha ancora l'espressione data dal secondo membro della relazione (176). Indichiamo poi con $\vec{F}_i^{(ext)}$ la risultante delle forze esterne che agisce sullo stesso punto materiale i-esimo. Indicando ancora con $\vec{F}_i$ la forza totale che agisce sul punto materiale i-esimo, vediamo che ora essa è data dalla somma della risultante delle forze interne con la risultante delle forze esterne:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(int)} + \vec{F}_i^{(ext)}.$$

Ma, se $\vec{F}_i$ è la forza totale che agisce sul singolo punto materiale $i$esimo, il secondo principio della dinamica ci dice che

$$\vec{F}_i = m_i \, \vec{a}_i,$$

dove m_i è la massa del punto i-esimo, e $\vec{a}_i$ è la sua accelerazione.
Mettendo insieme le due ultime relazioni, otteniamo

$$\vec{F}_i^{(int)} + \vec{F}_i^{(ext)} = m_i \, \vec{a}_i \ , \tag{186}$$

che rappresenta l'equazione del moto del punto i-esimo. Volendo ora trovare l'equazione del moto per l'intero sistema di punti materiali, procediamo a sommare su tutti i valori di i da 1 a N ambedue i membri della (186):

$$\sum_{i=1,...,N} \vec{F}_i^{(int)} + \vec{F}_i^{(ext)} = \sum_{i=1,...,N} m_i \, \vec{a}_i \ ; \tag{187}$$

ma al primo membro la somma delle forze interne, come abbiamo visto, è nulla, mentre la somma delle forze esterne su tutti i punti dà la forza totale

$\vec{F}^{(ext)}$ che agisce sul sistema, e quindi abbiamo

$$\vec{F}^{(ext)} = \sum_{i=1,...,N} m_i \; \vec{a}_i \; . \tag{188}$$

Questa relazione costituisce l'equazione del moto per il sistema di punti materiali nel suo complesso; tuttavia, in questa forma non risulta molto semplice da usare. Passeremo quindi ora ad introdurro il concetto di *baricentro del sistema di punti materiali*, e ad usare questo concetto per arrivare ad una forma della (188) molto semplice da usare.

Il baricentro

Incominciamo col denotare con M la *massa totale del sistema di N punti materiali*, definita da

$$M = \sum_{i=1,...,N} m_i \; . \tag{189}$$

Definiamo il *baricentro del sistema di punti materiali* come il punto la cui posizione $\vec{s}_B$ è definita da

$$\vec{s}_B = \frac{1}{M} \sum_{i=1,...,N} m_i \; \vec{s}_i \; , \tag{190}$$

dove, ricordiamo, $\vec{s}_i$ denota il vettore-posizione del punto materiale i-esimo, e m_i la massa di tale punto. Vediamo che, nella determinazione della coordinata del baricentro, le posizioni dei singoli punti sono "pesate" con la loro massa: punti che hanno massa maggiore contano di più, nel senso che il baricentro sarà spostato verso di loro. Vediamo anche che essendo le componenti di $\vec{s}_i$ date da $\vec{s}_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$, dove x_i, y_i, z_i rappresentano le coordinate lungo gli assi X, Y, Z del punto i-esimo ($i = 1, ..., N$), l'Eq. (190) ci dice che la posizione del baricento in termini di coordinate è data da

$$\begin{aligned} \vec{s}_B &\equiv (x_B, y_B, z_B) \\ &\equiv \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1,...,N} m_i \; x_i, \frac{1}{M} \sum_{i=1,...,N} m_i \; y_i, \frac{1}{M} \sum_{i=1,...,N} m_i \; z_i \right) \; . \end{aligned} \tag{191}$$

Questo rende possibile calcolare per componenti lungo gli assi del prescelto sistema di riferimento la posizione del baricentro.

Adesso, deriviamo due volte rispetto al tempo la posizione del baricentro; tale derivata, per definizione, ci darà *l'accelerazione* $\vec{a}_B$ del baricentro. Otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{s}_B}{dt^2} &\equiv \vec{a}_B \\
&= \frac{d^2((\sum_{i=1,\ldots,N} m_i\vec{s}_i)/M)}{dt^2} = \frac{1}{M}\sum_{i=1,\ldots,N} m_i\frac{d^2\vec{s}_i}{dt^2} \\
&= \frac{1}{M}\sum_{i=1,\ldots,N} m_i\,\vec{a}_i\ , \qquad (192)
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $d^2\vec{s}_i/dt^2$ non è altro che l'accelerazione $\vec{a}_i$ del punto i-esimo. Confrontando questa relazione con l'Eq. (188), vediamo che il secondo membro della (188) coincide con l'ultimo membro della (192) moltiplicato per la massa totale M, e quindi con il prodotto $M\ \vec{a}_B$ della massa totale del sistema per l'accelerazione del baricentro. Possiamo quindi riscrivere l'Eq. (188) nella forma

$$\vec{F}^{(ext)} = M\ \vec{a}_B\ . \qquad (193)$$

Vediamo che questa equazione rappresenta la legge di Newton per un *singolo* punto materiale posto nel baricentro e dotato di massa pari alla massa totale del sistema.

Possiamo quindi affermare che: *la dinamica complessiva di un sistema di punti materiali è equivalente a quella di un singolo punto materiale posto nel baricentro del sistema, dotato di massa pari alla massa totale del sistema, e soggetto alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema.*

È ovvio che questo semplifica enormemente lo studio del moto traslazionale di un sistema di punti materiali, perchè, una volta calcolati banalmente il baricentro e la massa totale, lo riduce alllo studio del moto di un singolo punto materiale. È anche chiaro che avremo variazioni del moto complessivo del sistema solo se varia il moto del suo baricentro. Si noti che questo non esclude che i punti del sistema possano muoversi, anche se il sistema nel suo complesso non lo fa. Infatti, si pensi per esempio a due punti materiali attaccati ai due lati di una molla; supponiamo che il tutto sia posato sul ghiaccio (in modo che non ci sia attrito), e supponiamo di tirare in senso opposti i due punti dilatando la molla, e poi di lasciarli andare. I due punti cominceranno allora a muoversi oscillando, *ma il sistema nel suo complesso non si sposterà traslazionalmente sul ghiaccio.*

Adesso vediamo come questa legge ci semplifica anche lo studio dei corpi estesi. Abbiamo visto che anche in questo caso possiamo pensare a questi corpi come un sistema di moltissimi punti materiali, associati a picoli volumetti nei quali avremo diviso il corpo. Quindi, anche in questo caso possiamo calcolare il baricentro del corpo tramite la somma (190) che, entro un cero errore riducibile a piacere, approssimerà un limite nel quale diventerà un "integrale". Una volta calcolato il baricentro del corpo, e conoscendo la sua massa, di fatto potremo studiarne il moto (per esempio, lungo un piano inclinato) sostituendolo con un singolo punto materiale coincidente con il baricentro, e dotato della massa totale del corpo, *anche se le dimensioni del corpo non sono trascurabili rispetto a quelle del moto.* Quindi, tutti gli esercizi fatti per un punto materiale valgono anche per un corpo esteso, sostituito dal suo baricentro. Naturalmente, questo è vero se il corpo *non è deformabile* ("corpo rigido"). Infatti, se abbiamo un corpo elastico, durante il moto potrà cambiare anche la distribuzione delle masse, e quindi la posizione del baricentro, in modo complicato. Si noti che, per corpi rigidi di densità *omogenea*, e di forma semplice, la posizione del baricentro si può determinare subito, senza effettuare i conti, semplicemente sulla base di considerazioni di *simmetria.* Per esempio, è chiaro che il baricentro di un corpo sferico omogeneo, per simmetria, coincide con il centro della sfera; che il baricentro di un corpo omogeneo a forma cubica coincide con il centro del cubo, cioè con il punto di intersezione delle diagonali non che collegano vertici appartenenti a facce diverse, ecc.

Esercizio 7.1): Calcolare il baricentro di un sistema di punti dotati tutti della stessa massa, e posti sui vertici di un poligono regolare.
Soluzione: per simmetria, il baricentro coinciderà con il centro del poligono, cioè con il punto interno al poligono che è equidistante da tutti i suoi vertici.

Esercizio 7.2): Un sistema è costituito da 4 punti materiali (posti nei punti P_1, P_2, P_3, P_4), di masse

$$m_1 = 2Kg \ , \ m_2 = 1 \ Kg \ , \ m_3 = 3Kg \ , \ m_4 = 5Kg.$$

I 4 punti sono posti sui vertici di un quadrato, di lato $L = 2\ m$, nellla seguente

disposizione: guardando il quadrato, il punto P_1 (dove è piazzata la massa m_1) è posto nel vertice in basso a sinistra, il punto P_2 (dove è piazzata la massa m_2) è posto nel vertice in alto a sinistra,. il punto P_3 (dove è piazzata la massa m_3) è posto nel vertice in alto a destra, il punto P_4 (dove è piazzata la massa m_4) è posto nel vertice in basso a destra. Calcolare la posizione del baricentro del sistema.
Soluzione: Il sistema è posto in un piano; possiamo quindi scegliere un sistema di riferimento Cartesiano bidimensionale, con l'origine posta nel punto P_1; con l'asse X concidente con il lato orizzontale del quadrato (che contiene P_1 e P_4) e con verso che va da P_1 4 P_4; con l'asse Y concidente con il lato verticale del quadrato (che contiene P_1 e P_2) e con verso che va da P_1 4 P_2. Allora, le coordinate dei 4 punti sono (in metri)

$$P_1 \equiv (0,0),$$

$$P_2 \equiv (0,2),$$

$$P_3 \equiv (2,2),$$

$$P_4 \equiv (2,0).$$

La massa totale del sistema è poi

$$M = (2+1+3+5)\ Kg = 11\ Kg.$$

Allora, la relazione (191) ci dà per la coordinata x_B

$$x_B = \frac{1}{11}\,(2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2)\ m = \frac{16}{11}\ m,$$

e per la coordinata y_B

$$y_B = \frac{1}{11}\,(2\cdot 0 + 1\cdot 2 + 3\cdot 2 + 5\cdot 0)\ m = \frac{8}{11}\ m.$$

Quindi, il baricentro è posto nel punto di coordinate

$$\vec{s}_B \equiv (\frac{16}{11}\ m, \frac{8}{11}\ m).$$

Esercizio 7.3): Un sistema è costituito da 4 punti materiali (posti nei punti P_1, P_2, P_3, P_4). I punti materiali P_1 e P_3 sono posti sui lati opposti di una delle due diagonali di un quadrato di lato $L = 2\ m$, e posseggono la stessa massa $\tilde{m}$. Gli altri due punti materiali P_2 e P_4 sono posti sui lati opposti dell'altra diagonale del quadrato, e posseggono masse $m_2 = 2\ \tilde{m}$ e $m_4 = 4\ \tilde{m}$ Calcolare la posizione del baricentro del sistema.
Soluzione: È chiaro "a priori" che le due masse uguali di P_1 e P_3 si fanno equilibrio, e quindi che il baricentro dovrà trovarsi sulla diagonale contenente P_2 e P_4, e che in particolare esso dovrà trovarsi più vicino al punto P_4 di massa maggiore. Comunque, facciamo il conto. In questo caso conviene scegliere come asse X la diagonale che contiene P_1 e P_3, con verso che, per esempio, va da P_1 a P_3; come asse Y conviene scegliere poi la diagonale che contiene P_2 e P_4, con verso che, per esempio, va da P_4 a P_2 (conviene disegnare la prima diagonale orizzontale, la seconda verticale, ed i lati del quadrato obliqui). L'intersezione tra le due diagonali sarà allora l'origine 0 degli assi. Calcoliamo ora le coordinate lungo X dei punti:

$$P_1 = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ m = -\sqrt{2}\ m,$$

$$P_2 = 0\ m,$$

$$P_3 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ m = \sqrt{2}\ m,$$

$$P_4 = 0\ m,$$

e le coordinate lungo Y dei punti:

$$P_1 = 0\ m,$$

$$P_2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ m = \sqrt{2}\ m,$$

$$P_3 = 0\ m,$$

$$P_4 = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\, m = -\sqrt{2}\, m.$$

Ricapitolando, le coordinate dei punti sono:

$$P_1 \equiv (-\sqrt{2}\, m, 0\, m),$$

$$P_2 \equiv (0\, m, \sqrt{2}\, m),$$

$$P_3 \equiv (\sqrt{2}\, m, 0\, m),$$

$$P_4 \equiv (0\, m, -\sqrt{2}\, m).$$

Usando la relazione (191), abbiamo che la coordinata x_B è data da

$$x_B = \frac{1}{8\,\tilde{m}} \cdot (-\sqrt{2} \cdot \tilde{m} + \sqrt{2} \cdot \tilde{m})\, m = 0\, m,$$

mentre la coordinata x_B è data da

$$y_B = \frac{1}{8\,\tilde{m}} \cdot (\sqrt{2} \cdot (2\,\tilde{m}) - \sqrt{2} \cdot (4\,\tilde{m}))\, m = -\frac{\sqrt{2}}{4}\, m.$$

Quindi

$$\vec{s}_B \equiv (0\, m, -\frac{\sqrt{2}}{4}\, m).$$

Come prevedibile, il baricentro si trova sulla diagonale che congiunge P_2 e P_4, ed è spostato verso P_4 che possiede la massa maggiore.

Esercizio 7.4): Un sistema è costituito da 3 punti materiali (posti nei punti P_1, P_2, P_3), disposti sui tre vertici di un triangolo isoscele, con i due lati uguali di lunghezza $L = 2\, m$, e formanti tra loro un angolo $\theta = 120°$. I due punti P_1 e P_2 sono posti sui due estremi della base del triangolo (guardando il triangolo, P_1 all'estremo di sinistra e P_2 all'estremo di destra), mentre P_3 coincide con il vertice che congiunge i due lati uguali. Le masse associate ai tre punti materiali sono

$$m_1 = 3Kg\ ,\ m_2 = 2\ Kg\ ,\ m_3 = 6\ Kg.$$

Calcolare la posizione del baricentro del sistema.
Soluzione: Conviene scegliere un sistema di riferimento con origine nel punto O posto sulla base a metà tra P_1 e P_2; con l'asse X coincidente con la retta che contiene la base del triangolo, e verso che va da P_1 a P_2; con l'asse Y coincidente con la retta che contiene l'altezza del triangolo, e verso che va da O a P_3. Per calcolare le coordinate dei tre punti bisogna prima calcolare la lunghezza di metà della base, cioè del tratto $\overline{P_1O}$; questo tratto rappresenta il cateto del triangolo rettangolo P_1OP_3, la cui ipotenusa è $\overline{P_1P_3}$, cioè il lato L lungo $2\ m$, e che è opposto all'angolo $P_1\widehat{P_3}O$ che vale $\theta/2 = 60°$. Quindi abbiamo

$$\overline{P_1O} = L\ \sin\ 60° = 2 \cdot \frac{1}{2}\ m = 1\ m.$$

Inoltre, bisogna anche calcolare l'altezza $\overline{OP_3}$ del triangolo; questa è l'altro cateto del triangolo rettangolo P_1OP_3, adiacente all'angolo $P_1\widehat{P_3}O$ di $60°$. Quindi abbiamo

$$\overline{OP_3} = L\ \cos\ 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ m = \sqrt{2}\ m.$$

Allora le coordinate dei tre punti sono:

$$P_1 \equiv (-1\ m, 0\ m),$$

$$P_2 \equiv (1\ m, 0\ m),$$

$$P_3 \equiv (0\ m, \sqrt{2}\ m).$$

Infine, la massa totale è

$$M = (3 + 2 + 6)\ Kg = 11\ Kg.$$

Adesso possiamo calcolare la coordinata x_B:

$$x_B = \frac{1}{11} \cdot (3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0)\ m = -\frac{1}{11}\ m,$$

e la coordinata y_B:

$$y_B = \frac{1}{11} \cdot (3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot \sqrt{2})\ m = \frac{6\sqrt{2}}{11}\ m.$$

Quindi

$$\vec{s}_B \equiv (-\frac{1}{11}\ m, \frac{6\sqrt{2}}{11}\ m).$$

Esercizio 7.5): Supponendo che i 3 punti materiali dell'esercizio precedente siano vincolati in ogni caso a restare sui vertici del triangolo isoscele, calcolare quali saranno le coordinate del baricentro del sistema dopo 2 secondi se l'intero sistema, partendo da fermo, compie un moto traslazionale dovuto ad una forza costante $\vec{F}^{ext}$ di modulo pari a 2 Newton, diretta a 45° rispetto al sistema di riferimento scelto nell'esercizio precedente, e con verso che si allontana dall'origine.

Soluzione: Essendo il moto puramente traslazionale, e non potendo il baricentro variare per effetto di spostamenti relativi tra i 3 punti materiali, basta ridurre il sistema ad un unico punto materiale coincidente con il baricentro, nel quale viene concentrata la massa totale, la cui posizione iniziale, nel sistema di riferimento scelto, è quella calcolata nell'esercizio 3, cioè,

$$\vec{s}_B(0) \equiv (-\frac{1}{11}\ m, \frac{6\sqrt{2}}{11}\ m),$$

e la cui velocità è nulla (perchè il sistema parte da fermo. Essendo richieste le coordinate lungo X e Y dopo 5 secondi, conviene considerare il moto descritto dalla Eq. (193) scomposto lungo i due assi. Nell'Esercizio 3 abiamo già calcolato la massa totale M del sistema, ottenenendo

$$M = 11\ Kg.$$

Scomponiamo ora lungo gli assi i due membri dell'Eq. (193); al primo membro, secondo i dati di questo problema, abbiamo una forza $\vec{F}^{ext}$, le cui componenti lungo X e Y sono, rispettivamente,

$$F_x^{ext} = |\vec{F}^{ext}|\ \cos\ 45° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ N = \sqrt{2}\ N,$$

e

$$F_y^{ext} = |\vec{F}^{ext}| \ \sin \ 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \ N = \sqrt{2} \ N.$$

Le due componenti del secondo membro del'Eq. (193) sono ovviamente

$$M \ a_{Bx} \equiv 11 \ a_{Bx},$$

e

$$M \ a_{By} \equiv 11 \ a_{By}.$$

Uguagliando tra loro le componenti omologhe dell'Eq. (193), e ricavando le componenti lungo gli assi dell'accelerazione del baricentro, abbiamo

$$a_{Bx} = \frac{\sqrt{2}}{11} \ m \ s^{-2},$$

e

$$a_{By} = \frac{\sqrt{2}}{11} \ m \ s^{-2}.$$

abbiamo quindi due moti uniformemente accelerati, con lo stesso valore ($\frac{\sqrt{2}}{11}$ m s^{-2}), sia lungo X che lungo Y. Sappimao che, ad un istante t, le coordinate lungo i due assi saranno allora

$$x_B(t) = x_B(0) + v_{Bx}(0) \ t + \frac{1}{2} \ a_{Bx} \ t^2,$$

e

$$y_B(t) = y_B(0) + v_{Bx}(0) \ t + \frac{1}{2} \ a_{Bx} \ t^2.$$

Ora, il sistema, e quindi il baricentro, parte da fermo, cioè

$$v_{Bx}(0) = v_{By}(0) = 0.$$

Inoltre abbiamo $t = 2 \ s$ e

$$x_B(0) = -\frac{1}{11} \ m \ \ ; \ \ y_B(0) = \frac{6 \sqrt{2}}{11} \ m.$$

Allora, inserendo questi dati ed i valori delle due accelerazioni, abbiamo che le coordinate del baricentro sono diventate

$$x_B(2\ s) = (-\frac{1}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{11} \cdot 2^2)\ m = \frac{(2\sqrt{2} - 1)}{11}\ m,$$

e

$$y_B(2\ s) = (\frac{6\sqrt{2}}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{11} \cdot 2^2)\ m = \frac{8\sqrt{2}}{11}\ m.$$

7.3 Cenni sui moti di rotazione

Nel caso di sistemi di punti materiali si presenta una possibilità che non può essere contemplata nel caso di un singolo punto materiale: il sistema può *ruotare*. La cosa è più evidente se consideriamo corpi estesi (rigidi); la trottola ne è un esempio tipico.

A questo punto dobbiamo domandarci: quali sono le grandezze fisiche associate al moto di rotazione, sia quelle che descrivono la causa che genera la rotazione, sia quelle che descrivono l'effetto della rotazione stessa.

Partiamo innanzitutto da un punto di vista intuitivo. Quando dobbiamo imprimere una rotazione ad un disco, o ad una trottola, quello che facciamo è dare un "colpo" *tangente* al bordo del disco o della trottola; inoltre, la velocità di rotazione che riusciamo a imprimere dipende

a) dalla *distribuzione di massa* del corpo considerato (infatti, se la trottola ha qualche difetto di simmetria *ruota male*,

b) dal raggio della trottola o del disco,

c) dall'intensità del "colpo" che imprimiamo,

d) dalla direzione del "colpo" rispetto, per esempio, al bordo dell'oggetto o, equivalentemente, al suo raggio (se non manteniamo il colpo tangente al bordo o, equivalentemente, perpendicolare al raggio, la rotazione "viene male").

Tutto questo ci dice che le caratteristiche della rotazione devono dipendere dall *forza* $\vec{F}$ che esercitiamo sull'oggetto (punto c), dall'*angolo* tra questa e il raggio dell'oggetto (punto d), dalla lunghezza del raggio (punto b), e da come è fatta la distribuzione di massa dell'oggetto (punto a).

Quello che vedremo adesso è che i punti b), c) e d) sono associati alla *causa* della rotazione, mentre il punto a) influenza l'*effetto* della rotazione.

Alla fine, la legge che regola le rotazioni dei sistemi di punti (in particolare dei corpi estesi rigidi) avrà una forma analoga a quella della legge di newton; ricordiamo che in questa legge la "causa" è la *forza*, e l'"effetto" è *l'accelerazione*, mentre la costante di proporzionalità tra le due, che influenza l'effetto (ed è una carateristica del corpo) è la *massa*.

Incominciamo allora ad introdurre una quantità vettoriale che giocherà, nel moto rotazionale, un ruolo analogo a quello che la forza ha nel moto traslazionale.

Il momento di una forza

Prima di tutto, introduciamo la grandezza fisica che è in grado di generare la rotazione di un corpo.

Consideriamo una generica forza $\vec{F}$ *applicata in un punto* P *del corpo* (per esempio, in un punto del bordo di una trottola). Consideriamo poi un generico punto $P^{'}$ dello spazio, e indichiamo con $\vec{r}$ il vettore di modulo pari al segmento $\overline{PP'}$, e con direzione e verso da P a $P^{'}$. Definiamo allora *il momento* $\vec{M}$ *della forza* $\vec{F}$ *rispetto al punto* $P^{'}$ come

$$\vec{M} \doteq \vec{r} \wedge \vec{F} \ . \tag{194}$$

$\vec{M}$ prende anche il nome di *momento angolare* (sempre relativo alla forza scelta ed al punto $P^{'}$ scelto). Si ricordi (vedi la seconda lezione) che "$\wedge$" indica il *prodotto vettoriale tra due vettori*, che il prodotto vettoriale $\vec{r} \wedge \vec{F}$ è un vettore che ha direzione perpendicolare al piano individuato da $\vec{r}$ ed $\vec{F}$, verso dato da quello nel quale procede una vite che gira in modo che $\vec{r}$ si sovrappone a $\vec{F}$, e modulo dato da $|\vec{M}| \equiv |\vec{r} \wedge \vec{F}| = |\vec{r}| \ |\vec{F}| \ \sin \ \theta$, dove *theta* denota l'angolo tra $\vec{r}$ ed $\vec{F}$. Il momento $\vec{M}$ della forza è quindi massimo, fissati i moduli della forza e di $\vec{r}$, quando $\theta = 90°$ ($\sin \theta = 1$) e quindi quando $\vec{r}$ ed $\vec{F}$ sono tra loro perpendicolari, mentre è nullo quando $\theta = 0°$ ($\sin \theta = 0$) e quindi quando $\vec{r}$ ed $\vec{F}$ sono tra loro paralleli.

Come al solito, prima di procedere, calcoliamo le dimensioni fisiche del momento

$$[\vec{M}] = [r \cdot F \cdot \sin \ \theta] = [r \cdot F] = [l \ m \ l \ t^{-2}] = [m \ l^2 \ t^{-2}] \ . \tag{195}$$

Quindi, il momento nel sistema MKS si può misurare in metri $\cdot$ Newton (ed è questo che di solito si fa), ma anche in anche in Joule (perchè $[m \ l^2 \ t^{-2}] \equiv [m \ v^2]$, cioè un'energia.

Nel caso più semplice, la forza e $\vec{r}$ sono perpendicolari. Mettiamoci in questo caso per mostrare intuitivamente che è proprio il momento di una forza la causa della rotazione di un corpo. Infatti, tutti noi compiamo ogni giorno l'atto di aprire o chiudere una porta facendola ruotare sui cardini. Ora, quello che facciamo, per esempio per arirla, è "spingere" su un certo punto della forza; questo significa che stiamo applicando una forza in quel determinato punto della forza. Ora, è sempre esperienza comune che se più lontano dai cardini è il punto sul quale spingiamo, minore è la forza necessaria a ruotare la porta; mentre, se spingiamo su un punto molto vicino ai cardini ci vuole molta fatica, cioè una forza maggiore. Ma questo conferma che la potenza della nostra spinta dipende non solo dalla forza, ma anche dalla distanza del punto di applicazione della forza dallo stipite: in effetti, tale potenza dpende dal prodotto dei moduli di queste due quantità, che è il caso particolare del prodotto vettoriale che dà il momento $\vec{M}$ della (194) quando $\vec{r}$ ed $\vec{F}$ sono perpendicolari, avendo scelto il punto P' sulla linea contenente i cardini della porta. In realtà, proprio da questo esempio capiamo che la rotazione di un corpo avviene rispetto ad un certo *asse di rotazione* (in questo caso,la linea contenente i cardini della porta); e non è difficile da capire che il prodotto vettoriale a secondo membro della (194), fissato un asse di rotazione, *non dipende dallo specifico punto sull'asse rispetto al quale si calcola*, ed è sempre uguale in modulo al prodotto del modulo della forza per la distanza minima del punto di applicazione della forza dall'asse, distanza minima che si ottiene tracciando la perpendicolare all'asse a partire dal punto di applicazione della forza, e che prende il nome di "braccio"; indicato il braccio con b, abbiamo quindi per il modulo del momento

$$|\vec{M}| = |\vec{F}|\, b\ , \tag{196}$$

mentre vediamo che neanche la direzione ed il verso del momento dipendono dal punto scelto sull'asse di rotazione perchè nè il piano formato da $\vec{r}$ ed $\vec{F}$ (rispetto al quale il momento è ortogonale), nè il verso di rotazione della vite ottenuto sovrapponendo $\vec{r}$ ad $\vec{F}$ cambiano al variare del punto sull'asse.

Il principio di conservazione del momento della quantità di moto totale di un sistema isolato

Prima di procedere alla deduzione di una legge per le rotazioni analoga alla legge di Newton per i moto traslazionali, enunciamo un secondo principio di conservazione, analogo a quello ottenuto per la quantità di moto totale di un sistema isolato.

A questo scopo, introduciamo la definizione di *momento della quantità di moto*, che indicheremo con $\vec{Q}_i$, del punto materiale i-esimo di un sistema di punti materiali. Avendo indicato in precedenza con $\vec{p}_i \doteq m_i \; \vec{v}_i$ la quantità di moto del punto materiale i-esimo, analogamente a come abbiamo definito il momento di una forza, definiamo il momento della quantità di moto $\vec{Q}_i$ rispetto ad un punto $P^{'}$ dello spazio come il vettore dato dal prodotto vettoriale

$$\vec{Q}_i \doteq \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i \; . \tag{197}$$

dove $\vec{r}_i$ indica il vettore che va dal punto P_i dello spazio in cui si trova il punto materiale al punto $P^{'}$. Naturalmente, anche il momento della quantità di moto in generale dipenderà dal tempo: $\vec{Q}_i(t)$.

Analogamente al caso della quantità di moto, definiamo il *momento totale della quantità di moto* $\vec{Q}^{(tot)}$ come

$$\vec{Q}^{(tot)} \doteq \sum_{i=1,\ldots,N} \vec{Q}_i \; . \tag{198}$$

Adesso possiamo enunciare il:

Principio di conservazione del momento totale della quantità di moto di un sistema isolato: "in un sistema isolato il momento totale della quantità di moto rimane costante nel tempo".

In formula abbiamo

$$\vec{Q}^{(tot)} = cost. \; . \tag{199}$$

Ora, se il sistema è isolato, sappiamo che agiscono solo le forze *interne*. Ora, innanzitutto nel seguito conveniamo di considerare solo il caso di un corpo rigido che esegua *un puro moto di rotazione*, tipicamente intorno ad un asse; non è difficile allora capire che, a secondo membro della (197) che definisce le $\vec{Q}_i$, le distanze $\vec{r}_i$ *non* potranno dipendere dal tempo, poichè la distanza di un punto del corpo dall'asse non potrà variare nè per effetto di deformazione (essendo il corpo rigido), nè per avvicinamento o allontanamento (non essendoci moto traslatorio). Quindi, se noi deriviamo rispetto al tempo $\vec{Q}^{(tot)}$, le derivate agiranno dentro le $\vec{Q}_i$ solo sulle quantità di moto $\vec{p}_i$, ed avremo, derivando rispetto al temp i due membri dell'Eq. (199), usando la definizione

(198), e ricordando che la derivata di una costante è zero,

$$\frac{d\vec{Q}^{(tot)}}{dt} \equiv \frac{d\sum_{i=1,\dots,N}\ \vec{Q}_i}{dt} \equiv \sum_{i=1,\dots,N} \frac{d\vec{Q}_i}{dt}$$

$$\equiv \sum_{i=1,\dots,N} \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0 \ . \qquad (200)$$

Ma ricordiamo la relazione (175), che ci dice che la derivata della quantità di moto i-esima altro non è che la forza totale che agisce sul punto materiale i-esimo. Ma, ancora, essendo il sistema isolato, sui suoi punti agiranno solo forze *interne*; se indichiamo con $\vec{F}_i^{(int)}$ la forza totale interna che agisce sul punto i-esimo (e dovuta agli altri punti del sistema) possiamo riscrivere la (200) come

$$\frac{d\vec{Q}^{(tot)}}{dt} \equiv \sum_{i=1,\dots,N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(int)}$$

$$\equiv \sum_{i=1,\dots,N} \vec{M}_i^{(int)} = 0 \ , \qquad (201)$$

dove $\vec{M}_i^{(int)}$ denota il momento della forza interna i-esima. Quindi, la conservazione del momento totale della quantità di moto di un sistema isolato è equivalente alla proposizione

"*in un sistema isolato la somma sei momenti delle forze interne è nulla*".

Ora, se mettiamo insieme le conseguenze dei due principi di conservazione validi per i sistemi di punti materiali isolati, possiamo affermare

"*in un sistema isolato sono nulle sia la somma dele forze interne che la somma sei momenti delle forze interne*".

Che cosa ne deduciamo in parole povere?: in realtà qualcosa di molto semlice ed evidente. E cioè:

- se il sistema è isolato ed è inizialmente fermo, non essendoci azioni esterne rimane fermo, cioè non può nè traslare (perchè la risultante delle forze interne è nulla), nè ruotare (perchè la risultante dei momenti delle forze interne è nulla);

- se il sistema è isolato ed inizialmente trasla con una certa velocità e/o ruota con una certa velocità angolare, a causa dell'assenza d azioni esterne che ne possono modificare il moto continua a traslare e/o a ruotare con la stessa velocità, o velocità angolare, iniziale.

Momenti esterni

Analogamente al caso delle traslazioni, in presenza di forze esterne il momento angolare totale non sarà più nullo; indichiamolo con $\vec{M}^{ext}$ per indicare che è la somma dei momenti delle forze esterne (essendo quella delle forze interne, come abbiamo visto, nulla). Ci aspettiamo allora che valga una legge per la dinamica rotazionale analoga a quella di Newton ($\vec{F} = m\,\vec{a}$) che vale per la dinamica traslazionale di un punto materiale, e che vale ancora nella stessa forma, Eq. (193), per il baricentro di un sistema di puntimateriali. È anche chiaro che il primo membro della relazione analoga per le rotazioni debba essere dato da $\vec{M}^{ext}$ (al posto della risultante delle forze esterne che appare nella (193)), che nel caso dlle rotazioni esprime la *causa* che genera la rotazione stessa; ma cosa ci deve essere al secondo membro? Innanzitutto, ci aspettiamo che l'effetto della traslazione, cioè l'accelerazione, che compare nel secondo membro della legge di Newton, sia sostituito dall'effetto della rotazione Ma già sappiamo che una rotazione È dovuta alla variazione nel tempo di in *angolo*, e non di uno spazio. Ora, abbiamo già introdotto la velocità angolare, l'analogo nelle rotazioni della velocità lineare, come $d\theta(t)/dt$, dove $\theta(t)$ è l'angolo di rotazione all'istante t; abbiamo cioè semplicemente sostituito lo spazio con l'angolo. Possiamo allora definire nel caso delle rotazioni l'analogo dell'accelerazione lineare, e la chiameremo *accelerazione angolare* indicandola con $\vec{a}_\theta$, semplicemente come il vettore

$$\vec{a}_\theta \doteq \frac{d^2\theta}{dt^2}\,\vec{n}, \tag{202}$$

dove il versore $\vec{n}$ ha la stessa direzione e verso di $\vec{M}^{(ext)}$. È chiaro allora che, come nella legge di Newton la causa (la forza) è proporzionale all'effetto (l'accelerazione) tramite una costante di proporzionalità (la massa) che dipende solo dal corpo, nel caso dlle rotazioni la causa (il momento angolare) sarà proporzionale all'effetto (l'accelerazione angolare) tramite una costante di proporzionalità (quale?) che dovrà dipendere ancora solo dal corpo e che indicheremo con I. Scriveremo allora

$$\vec{M}^{ext} = I\ \vec{a}_\theta\ . \tag{203}$$

Ora, la cosa più semplice che possiamo fare per individuare di che tipo deve essere questa costante di proporzionalità, è trovrane le dimensioni fisiche. Abbiamo calcolato prima le dimensioni del momento, ed abbiamo visto che sono quelle di Newton per metro o, equivalentemente, quelle di un'energia, massa per lunghezza al quadrato diviso tempo al quadrato: $[\vec{M}^{ext}] = [m\ l^2\ t^{-2}]$. Dalla definizione (202) di accelerazione angolare abbiamo, ricordando che un angolo è adimensionale: $[\vec{a}_\theta] = [t^{-2}]$. Allora, dalla relazione (203) abbiamo

$$[m\ l^2\ t^{-2}] = [I \cdot t^{-2}]\ , \tag{204}$$

da cui ricaviamo

$$[I] = [m\ l^2]\ . \tag{205}$$

Quindi, le dimensioni della costante I, che prende il nome di *momento di inerzia*, sono quelle di massa per lunghezza al quadrato. Se individuiamo l'asse intorno al quale il corpo ruota, dividiamo poi il corpo nei soliti N volumetti molto piccoli, praticamente puntiformi, indichiamo con $\Delta\ m_i$ la massa molto piccola contenuta nel volumetto i-esimo, e con r_i la distanza del volumetto $i$esimo dall'asse di rotazione, non è difficile mostrare che

$$I = \sum_{i=1,\ldots,N} m_i\ r_i^2\ , \tag{206}$$

che ha le dimensioni giuste (massa per lunghezza al quadrato). Vediamo quindi che la rotazione dipende dal corpo attraverso la *distribuzione spaziale della sua massa*.

Un ultimo accenno, infine, al *lavoro* fatto durante una rotazione; infatti, comunque per ottenere un qualsiasi moto si compie lavoro. Nel moto di rotazione, abbiamo già visto che lo spostamento è sostituito dall'angolo di rotazione; poichè il ruolo della forza è svolto dal momento $\vec{M}^{ext}$, il prodotto della forza per lo spostamento (che dà appunto il lavoro nel caso traslazionale) è sostituito dal prodotto del momento angolare per l'angolo di rotazione. Nel caso semplice di momento angolare costante abbiamo quindi che, se il corpo ha ruotato di un angolo θ,il lavoro compiuto dal momento è

$$L_\theta = |\vec{M}^{ext}| \cdot \theta\ . \tag{207}$$

Da questa relazione si vede che, essendo l'angolo adimensionale, questo lavoro ha le dimensioni del momento angolare; ma abbiamo già visto che queste dimensioni sono quelle di una forza per lunghezza (Newton per metro, cioè Joule), coincidenti, appunto, con quelle di un lavoro.

Esercizi

Esercizio 7.6: Una forza di modulo pari a 5 Newton viene applicata ad un corpo esteso rigido in un punto che si trova a distanza di 2 metri dall'asse di rotazione. Se il momento di inerzia I vale 5 $Kg \cdot m^2$, calcolare il modulo dell'accelerazione angolare.
Soluzione: Il momento (esterno) $\vec{M}^{ext}$ della forza si può calcolare come il prodotto del modulo della forza per il braccio, dato dalla distanza del punto di applicazione dall'asse di rotazione, e quindi

$$|\vec{M}^{ext}| \equiv |\vec{F}^{ext}| \cdot b = 5 \cdot 2 \ N \cdot m = 10 \ N \cdot m.$$

L'Eq. (203) ci dice poi che

$$10 \ N \cdot m = 5 \cdot |\vec{a}_\theta| \ N \cdot m,$$

da cui

$$|\vec{a}_\theta| = 2 \ s^{-2}.$$

Esercizio 7.7: Calcolare quanto lavoro è stato compiuto nell'esercizio precedente dopo che il corpo ha ruotato di $\theta = 45°$.
Soluzione: La relazione (207) ci dà subito il lavoro. Dobbiamo solo prima trasformare i gradi in radianti:

$$45° = \frac{\pi}{4} \ rad,$$

e quindi

$$L_{45°} = 10 \cdot \frac{\pi}{4} \ J = \frac{5 \ \pi}{2} \ J.$$

8 Alcuni elementi di Elettromagnetismo

8.1 Fenomenologia

Elettrizzazione per strofinio e cariche elettriche

Per poter introdurre un nuovo settore della Fisica è necessario partire dai fenomeni che si vogliono descrivere.

Sin dall'antichità alcuni di questi fenomeni erano già noti. Per esempio, è noto che, strofinando con un panno di lana alcuni materiali, questi acquistano la proprietà di attrarne altri. Ogni studente ha strofinato una penna a sfera sul proprio maglione, e ha verificato che dopo questa operazione la penna è in grado di attrarre un pezzo di carta. Approfondendo l'osservazione, ci accorgiamo che se strofiniamo con due panni di lana due oggetti fatti dello stesso materiale questi si respingono. Se strofiniamo con due panni di lana due oggetti fatti di materiali diversi, questi, a seconda dei materiali scelti, si possono attrarre oppure respingere.

A questo punto, possiamo cominciare ad arrivare a qualche prima conclusione. Diciamo che lo strofinio causa un'*elettrizzazione* dei materiali strofinati, e che questa elettrizzazione può essere di due tipi che distingueremo con i termini *positivo e negativo.* Se chiamiamo *carica elettrica* la quantità fisica (che poi dovremo opportunamente definire) che causa l'elettrizzazione, diremo che un corpo può acquistare una *carica positiva* oppure una *carica negativa.* In base alle osservazioni fatte prima, possiamo anche concludere che *cariche dello stesso segno si respingono*; infatti, abbiamo visto che due oggetti dello stesso materiale caricati per strofinio, che quindi ovviamente devono avere lo stesso segno di carica, si respingono. Deduciamo poi, invece, che *cariche di segno opposto si attraggono.*

Materiali isolanti e materiali conduttori

Altri fenomeni che possiamo osservare riguardano le caratteristiche dei materiali che vengono elettrizzati. Infatti, notiamo che in alcuni casi, una volta elettrizzato il corpo per strofinio, se questo corpo viene collegato in qualche modo a terra, perde l'elettrizzazione; mentre questo non accade per corpi costituiti da altri materiali. Interpretiamo questo fatto stabilendo che ci sono alcuni materiali, che definiamo *conduttori*, i quali permettono che le cariche al loro interno si muovano, e questo spiega la perdita di elettrizzazione per contatto attraverso il fatto che le cariche si trasferiscono dal corpo a terra (o anche su un altro corpo). Esempi di conduttori sono i metalli. Esistono invece altri materiali che (entro certi limiti) non permettono il moto delle cariche, e che prendono i nome di *isolanti o dielettrici*. Esempi di materiali isolanti sono il vetro e la gomma.

8.2 Elementi di Elettrostatica

L'elettrostatica è quella branca dell'Elettromagnetismo che studia la Fisica delle *cariche in equilibrio* e quindi *in quiete*. In questa prima parte, quindi, pur introducento quantità e concetti fisici che si utilizzano per situazioni generali, considereremo il caso in cui le cari che sono ferme.

Definizione quantitativa della carica elettrica attraverso misura

Abbiamo già visto che una grandezza fisica è completamente definita solo se si è in grado di effettuarne una misura quantitativa. Nel caso della carica elettrica, gli strumenti che effettuano la misura prendono il nome di *elettroscopi*. Illustriamone qui uno specifico che prende il nome di *elettroscopio a foglie*. Prima di procedere, comunque, è bene precisare che un tale strumento non è in grado di misurare una carica con grande precisione (le misure precise di carica in effetti sfruttano fenomeni dinamici). Tuttavia, dal punto di vista concettuale è sufficiente che "in principio" esista uno strumento che sia in grado di assegnare un valore numerico alla grandezza fisica.

Un elettroscopio a foglie è costituito da una sferetta conduttrice, alla cui parte inferiore è attaccata una sbarretta anchèssa conduttrice, alla cui parte finale sono attaccate due sottili sfoglie di materiale conduttore (tipicamente, oro).

la sbarretta conduttrice mette in comunicazione la sferetta con le sfoglie; queste ultime sono inserite in un'ampolla di vetro, il cui scopo è di proteggerle da disturbi meccanici esterni (come colpi di vento), e la sbarretta conduttrice alla quale sono attaccate fuoriesce in parte dall'ampolla, passando attraverso un tappo isolante, connettendosi alla sferetta conduttrice che si trova completamente all'esterno dell'ampolla. Riassumendo, abbiamo una sferetta conduttrice, attaccata nella parte inferiore ad una sbarretta conduttrice, che penetra poi attraverso un tappo isolante in un'ampolla di vetro, ed alla quale sono appese, completamente all'interno dell'ampolla, due sottilissime sfoglie conduttrici.

Inizialmente, le sfoglie sono disposte verticalmente, a causa della gravità, e sostanzialmente sono sovrapposte, formando un angolo nullo tra loro. Se si avvicina il corpo che contiene la carica da misurare alla sferetta esterna dell'elettroscopio, questa carica si trasferisce su questa sferetta; essendo il complesso sferetta + sbarretta + sfoglie tutto conduttore, la carica si trasferisce fino alle sfoglie, e rimane poi su di esse perchè non può muoversi verso l'esterno dove c'è il vuoto (o, equivalentemente, l'aria) che è isolante. Le sferette si caricano quindi entrambe con carica dello stesso segno; quindi si respingono, e formano un angolo che dipende dall'equilibrio tra la forza peso e la forza repulsiva tra le cariche. Ovviamente, più grande è la carica trasferita, più grande è l'angolo. È naturale quindi misurare la carica attraverso la misura dell'angolo che genera tra le sfogliette; stabilito arbitrariamente un angolo che descrive l'unità di misura della carica, tutte le cariche possono essere misurate in questa unità.

Il concetto di carica puntiforme

Nella sezione di Meccanica abbiamo usato il concetto di punto materiale, precisandone il significato. Nel caso dell'elettrostatica viene introdotto un concetto simile : quello di *carica puntiforme*. La carica puntiforme di norma è una carica concentrta su un oggetto di dimensioi trascurabili rispetto a quelle sulle quali vengono effettuate le osservazioni; tuttavia, nel caso della carica puntiforme è necessario qualche ulteriore requisito, legato al concetto di *simmetria*. Il concetto di simmetria riveste una fondamentale importanza in tutte le branche della fisica. Cerchiamo di capire in particolare quale simmetria interviene nel caso della carica puntiforme. Se una carica è concentrta in un punto, allora interviene la cosiddetta *simmetria sferica*; capiamo questo concetto introducendo un *osservatore virtuale*, il quale può osservare il sistema da un qualsisi punto dello spazio. Adesso, consideriamo, tra tutti i punti dello spazio, quelli che si trovano d una certa distanza fissata dal punto sul quale è concentrata la carica; ovviamente, questi punti formano una *sfera*, di raggio pari alla distanza che abbiamo fissato. Supponiamo di mettere l'osservatore in uno dei punti della sfera e di fargli osservare il sistema e lo spazio circostante; poi lo addormentiamo, in modo che non sia cosciente, e lo spostiamo su un altro punto della sfera. È evidente che, quando si sveglia non sarà in grado di capire se si trova nel vecchio punto o in un altro, perchè l'unico riferimento che ha è la distanza dalla carica che è rimasta la stessa. In conclusione, tutti i punti di una sfera che hanno come centro la carica puntiforme sono equivalenti tra loro per un osservatore (simmetria sferica) *e quindi dovranno essere equivalenti anche dal punto di vista delle grandezze fisiche* (come vedremo). Questo ragionamento ci dice che, per realizzare una carica puntiforme è importante anche *la forma del corpo di supporto*. È chiaro allora che i corpi carichi che più si avvicinano alla carica puntiforme sono i corpi di forma *sferica*, caricati uniformemente, perchè conservano ovviamente la simmetria sferica. Di fatto, vedremo che qualsiasi sfera carica uniformemente genera nei punti al suo esterno una situazione fisica identica a quella di una carica puntiforme.

8.3 La legge di Coulomb

Abbiamo visto che tra cariche diverse si genera attrazione o repulsione, il che significa che due cariche esercitano tra loro una *forza*. Come al solito, consideriamo due cariche puntiformi (realizzate, per esempio, attraverso due sferette cariche uniformemente, i cui raggi siano molto piccolo rispetto alla distanza tra i centri delle sferette.

La domanda ora è: qual'è la *legge* della forza che si esercita tra due cariche puntiformi poste ad una certa distanza traloro?; ina latre parole, come dipende questa forza dalle cariche, dalla loro distanza ed, eventualmente, da altri fattori?.

Introduciamo allora delle notazioni. Indichiamo con q_1 e q_2 le due cariche *nelle quali inglobiamo il segno* (cioè sia q_1 che q_2 possono essere sia numeri positivi che negativi). Indichiamo poi con r la distanza tra le due cariche. La prima cosa da domandarsi sarà: da quali quantità ragionevolmente potrà dipendere la forza tra le due cariche? Certamente dovrà dipendere da q_1, q_2 ed r, ma, in linea di principio, potrebbe dipendere da moltissime altre cose; tuttavia, non è difficile escludere la maggior parte di cause perchè assolutamente improbabili (per esempio, difficilmente dipenderà dalla nazionalità dello sperimentatore o dal suo sesso). L'unica cosa che sembra rilevante è il *mezzo* nel quale le cariche sono immerse; ci aspettiamo infatti risultati differenti se sono nel vuoto o nell'olio.

Limitando quindi in questo modo le nostre ipotesi *a priori*, vediamo come possiamo determinare in principio la legge. Innanzitutto, dobbiamo avere un modo di *misurare* la forza tra le cariche, riconducendo la misura a metodi meccanici. Si usa in questo caso la *bilancia di torsione*. Essa è costituita nel modo seguente: ad un filo attaccato ad un supporto orizzontale (per esempio il soffitto), viene attaccata al centro di una sbarretta isolante molto leggera, ed ad uno dei capi della sbarretta viene attaccata una delle cariche, mentre all'altro capo viene attaccato un contrappeso esattamente delo stesso peso del corpo (sferetta) su cui è concentrata la carica, in modo che si facciano equilibrio, la sbarretta rimanga orizzontale, e la forza peso non agisca. In questa situazione la sbarretta rsta ferma. A questo punto, la seconda carica viene fissata su un supporto (sbaretta verticale) isolante, in modo che le due cariche sia no alla stessa quota; il supporto è movibile in modo da poter variarea a piacimento la distanza tra le cariche. Ovviamente, quando la seconda carica sul supporto viene avvicinata alla prima, tra le due cariche si esercita una forza; la carica sulla sbaretta verticale non si può muovere, ma quella attaccata ad un capo della sbarretta che a suo volta è appesa al filo comincia a ruotare a causa della forza, e torce il filo. La rotazione termina quando l'azione di rotazione della sbarretta orizzontale viene equilibrata dalla resistenza alla rotazione del filo. Poichè è possibile risalire alla forza che ha portato il filo fino a quel livello di torsione, questa forza, per condizione di equilibrio, uguaglierà la forza tra le cariche, e quindi ne fornirà una misura.

Avendo ora la possibilità di misurare la firza tra le due cariche, possiamo adottare un metodo per scpoprire la legge di questa forza. Il metodo presuppone semplicemente di mantenere, volta a volta, costanti tutti i parametri tranne uno, di far variare quest'ultimo in modo controllato, e di misurare la forza per i vari valori. uesto permette di determinare la dipendenza funzionale tra la forza ed il parametr scelto. Facendo questo per tutti i parametri, e mettendo insieme i risultati, otterremo la legge della forza.

Procediamo:

Passo 1) Fissiamo il valore del modulo di q_2 e di r (per esempio, $|q_2| = 1, r = 1$, oppure altri valori purchè non vengano cambiati in questa fase), e facciamo l'esperimento sempre nello stesso mezzo (per esempio, il vuoto o, il che è praticamente lo stesso, l'aria). Facciamo invece variare $|q_1|$; per esempio, in certe unità di misura, carichiamo la prima sferetta con carica di modulo $|q_1| = 1$, e misuriamo il corrispondente valore numerico del modulo della forza che indicheremo con F_1; poi carichiamo la prima sferetta con carica $|q_1| = 2$, e misuriamo il corrispondente valore numerico del modulo della forza che indicheremo con F_2; carichiamo la prima sferetta con carica

$|q_1| = 3$, e misuriamo il corrispondente valore numerico del modulo della forza che indicheremo con F_3, e così via. Andiamo ora a calcolare i rapporti

$$F_2/F_1 \ , \ F_3/F_2 \ , \ F_3/F_1;$$

quello che troveremo (nel limite degli errori sperimentali), è che

$$F_2/F_1 = 2 \ , \ F_3/F_2 = 3/2 \ , \ F_3/F_1 = 3,$$

cioè che raddoppiando la carica si raddoppia la forza, triplicando si triplica ecc., e che quindi *il modulo della forza è direttamente proporzionale al modulo* $|q_1|$ *della prima delle due cariche.*

Se ora, invece, fissiamo il valore di $|q_1|$ e di r, facciamo l'esperimento sempre nello stesso mezzo (per esempio, il vuoto), ma facciamo invece variare $|q_2|$, otteniamo, come è prevedibile, un risultato simile: *il modulo della forza è direttamente proporzionale anche al modulo* $|q_2|$ *della seconda delle due cariche* q_2.

Se il modulo della forza deve essere direttamente proporzionale ai moduli di ciascuna carica, allora ne deduciamo che: *il modulo della forza è direttamente proporzionale al prodotto* $|q_1| \cdot |q_2|$ *delle due cariche.*

Adesso, manteniamo costanti le due cariche e rimaniamo nel vuoto, facendo variare invece la distanza r tra le due cariche: fissiamo quindi $r = 1\ m$ e misuriamo il valore $F_1^{'}$ del modulo della forza corrispondente, poi fissiamo $r = 2\ m$ e misuriamo il valore $F_2^{'}$ del modulo della forza corrispondente, e poi ancora fissiamo $r = 3\ m$ e misuriamo il valore $F_3^{'}$ del modulo della forza corrispondente, e così via. Andiamo ora a calcolare i rapporti

$$F_2^{'}/F_1^{'} \ , \ F_3^{'}/F_2^{'} \ , \ F_3^{'}/F_1^{'},$$

e quello che troveremo (nel limite degli errori sperimentali), è che

$$F_2^{'}/F_1^{'} = 1/4 \ , \ F_3^{'}/F_2^{'} = 4/9 \ , \ F_3^{'}/F_1^{'} = 1/9,$$

cioè che: *il modulo della forza tra due cariche è inversamente proporzionale al quadrato della distanza* r *tra le due cariche.*

Mettendo tutto assieme, abbiamo che: *il modulo della forza tra due cariche è direttamente proporzionale al rapporto tra il prodotto dei moduli delle cariche ed il quadrato della distanza tra le due cariche.*

In formula quindi abbiamo

$$F = K\,\frac{|q_1|\,|q_2|}{r^2}, \tag{208}$$

dove K è una costante di proporzionalità *che può dipendere solo dal mezzo nel quale sono immerse le cariche.*

Avendo determinato il modulo della forza, vediamo quali sono direzione e verso. Essendo la forza attrattiva o repulsiva, vediamo che: *la direzione della forza tra due cariche è data dalla congiungente le due cariche.*

Per poter introdurre il verso, dobbiamo specificare se stiamo osservando la forza che la *prima* carica q_1 esercita sulla *seconda* q_2, oppure se stiamo osservando la forza che la *seconda* carica q_2 esercita sulla *prima* q_1; è questione ovviamente di convenzione, ma naturalmente il risultato finale non deve cambiare. Supponiamo allora, per esempio, che stiamo osservando la forza che la *prima* carica q_1 esercita sulla *seconda* q_2; allora definiamo il vettore $\vec{r}$, che ha modulo pari alla distanza r tra le due cariche, direzione coincidente con la congiungente tra le due cariche, e *verso che va da q_1 a q_2*. Definiamo poi il vettore $\hat{r} \doteq \vec{r}/r$; $\hat{r}$ ha ovviamente direzione e verso coincidenti con quelli di $\vec{r}$ e modulo pari a 1 (infatti, $|\hat{r}| = |\vec{r}|/|r| = r/r = 1$). Diciamo che $\hat{r}$ è un *versore*, cioè un vettore di modulo unitario; esso descrive semplicemente la direzione ed il verso di $\vec{r}$. Teniamo poi conto che, come abbiamo visto, cariche di segno opposto si attraggono; questo significa che il verso della forza che q_1 esercita su q_2 deve andare da q_2 a q_1 (attrazione), e quindi deve essere *opposto* a quello del versore $\hat{r}$, cioè deve essere quello di $-\,\hat{r}$. Se le cariche sono invece dello stesso segno il verso della forza che q_1 esercita su q_2 deve andare da q_1 a q_2 (repulsione), e quindi deve essere proprio quello del versore $\hat{r}$ Allora, il vettore che descrive la forza che la carica q_1 esercita sulla carica q_2 posta a distanza r dalla prima segue la seguente legge

$$\vec{F} = K\,\frac{q_1\,q_2}{r^2}\,\hat{r}. \tag{209}$$

Questa relazione prende il nome di *Legge di Coulomb*. Si noti che in questa relazione abbiamo inserito non il modulo delle cariche, ma le cariche con i loro segni; vediamo allora che se le cariche hanno segno opposto (per esempio, $q_1 > 0$ e $q_2 < 0$, oppure $q_1 < 0$ e $q_2 > 0$) allora il prodotto ha segno negativo, e questo inverte il verso di $\hat{r}$ (cioè, dà una forza che va da q_2 a q_1) e quindi attrazione. Se invece le cariche hanno lo stesso segno (per esempio, $q_1 > 0$

e $q_2 > 0$, oppure $q_1 < 0$ e $q_2 < 0$) allora il prodotto ha segno positivo, e questo non inverte il verso di $\hat{r}$ (cioè, dà una forza che va da q_1 a q_2) e quindi repulsione. Dal punto di vista vettoriale, allora, la legge (209) dà perfettamente conto dell'esperienza. Ovviamente, essa fornisce anche il modulo giusto (Eq. (208)) perchè

$$|\vec{F}| = K\,\frac{|q_1|\;|q_2|}{r^2}\,|\hat{r}| = K\,\frac{|q_1|\;|q_2|}{r^2}.$$

Si noti che la legge di Coulomb ha una forma simile a quella di gravitazione universale.

Abbiamo visto che la costante di proporzionalità K dà conto semplicemente del mezzo nel quale sono immerse le cariche. Noi considereremo sempre come mezzo il vuoto. In realtà si preferisce ridefinire la costante K (per motivi che capiremo in parte in seguito) in termini di un'altra costante. Per il vuoto, si sceglie di scrivere

$$K = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0},$$

dove ϵ_0 prende il nome di costante dielettrica del vuoto.

La legge di Coulomb si riscrive allora come:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q_1\,q_2}{r^2}\,\hat{r}. \tag{210}$$

Importante è anche il valore numerico di ϵ_0; nel sistema MKS, nelle unità opportune, il suo valore è

$$\epsilon_0 \approx 8.859 \cdot 10^{-12}. \tag{211}$$

Si noti, allora, che $4\,\pi\,\epsilon_0 \approx 12.56 \cdot 8.859 \cdot 10^{-12} \cong 10^{-10}$, dove abbiamo preso solo l'ordine di grandezza. Allora $\frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \cong 10^{10}$, cioè la costante che compare nella forza di Coulomb ha un valore molto, molto grande. Questo è importante, perchè le sferette sulle quali sono concentrate le masse posseggono anche una massa, e quindi tra loro, oltre alla forza di Coulomb. si esercita anche l'attrazione gravitazionale con una forza il cui modulo è $F_G = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}$, dove G è la costante gravitazionale e $m_1\;m_2$ sono le masse. Ora, nel sistema MKS il valore numerico di G è, in ordine di grandezza $G \cong 10^{-10}$, quindi estremamente piccolo. Il rapporto tra la costante che compare nella legge di

Coulomb e la costante gravitazionale è quindi $\cong 10^{20}$ (cento miliardi di miliardi!). É chiaro quindi che possiamo trascurare l'attrazione gravitazionale rispetto all'interazione elettrostatica.

Unità di misura della carica: il Coulomb

L'unità di misura della carica la possiamo ricavare dalla legge di Coulomb. Definiamo la carica di 1 Coulomb (che indicheremo col simbolo C) come quella carica che attira o respinge un'altra carica di 1 Coulomb posta da essa a distanza di un metro con una forza pari a $1/(4\ \pi\ \epsilon_0)\ N$. Si noti quindi che tale forza vale circa $10^{10}\ N$, cioè che 1 Coulomb è un'unità di misura spropositata! Notiamo allora che due cariche che si attirano con una forza ragionevole (da 1 a 10 N) devono valere $10^{-5} - 10^{-4}\ N$. Saranno queste quindi le cariche che prenderemo in considerazione. Il sistema di unità di misura da adottare comprenderà ora anche il Coulomb, e lo chiameremo sistema MKSQ.

8.4 Il concetto di campo elettrico e il Teorema di Gauss

Abbiamo finora seguito la strada, simile a quella della meccanica, di considerare le forze. In realtà, la descrizione dell'elettromagnetismo non può prescindere dal concetto di *campo*. Questo fatto è del tutto evidente se si considerano cariche in movimento, cioè correnti. Noi qui ci limitiamo a considerare il caso di cariche in equilibrio, cioè ferme (elettrostatica). In questo caso, comunque, la descrizione tramite il *campo elettrico*, contrapposta a quella tramite forze, presenta molti vantaggi, anche se in principio le due descrizioni (solo in questo caso!) sono equivalenti.

Per comprendere ed introdurre il concetto di campo, bisogna pensare al comportamento di un *fluido*, ed alla possibile descrizione delle sue perturbazioni. Partiamo però inizialmente dalla legge di Coulomb, e dal connesso concetto di *azione a distanza*. Cosa ci dice infatti la legge di Coulomb? Ci dice:

1) che sono necessarie *due cariche* per ottenere un effetto fisico;

2) che questo effetto fisico si esprime attraverso una forza tra le due cariche *che agisce a distanza, senza mezzo intermedio, e istantaneamente, cioè con velocità infinita di propagazione dell'interazione.*

L'esempio dei fluidi

Immaginiamo invece ora di fare un esempio (anche se improprio e da non prendere alla lettera). Supponiamo di lanciare una pallina in una vasca d'acqua; quando la pallina colpisce l'acqua, e poi prosegue al suo interno, genera una perturbazione del fluido (onde ecc.) *che ne modificano lo stato.* Si deve sottolineare che *la modifica dello stato del fluido c'è comunque anche in assenza di un'altra pallina nel fluido che venga investita dalla perturbazione.* Tuttavia, se vengono lanciate *due* palline, allora queste, aon vengono direttamente a contattnche se non vengono direttamente a contatto, interagiscono tra loro attraverso la perturbazione del mezzo (l'accqua) che ciascuna causa. Questa interazione, però *non* è a distanza (perchè avviene attraverso la mediazione del fluido (interazione di contatto), e *non* è istantanea, perchè si propaga con la velocità *finita* di propagazione delle onde del fluido.

Adesso, anche se può apparirci strano, immaginiamo che il vuoto sia un "mezzo" attraverso il quale si propaga l'interazione elettrica! Ora, l'esempio delle palline gettate nell'acqua non è il più adatto, e ricorriamo ad un'altra similitudine. Supponiamo di avere un rubinetto dal quale esce l'acqua, ed immaginiamo che ci si solo questo rubinetto che butta fuori l'acqua in un ambiente enorme, praticamente infinito. Cosa farà l'acqua? Semplicemente, uscita dal rubinetto si diramerà in tutte le direzioni "a raggiera", e si allontanerà sempre più dal rubinetto. Adesso, più fore sarà la "spinta" del rubinetto, più rapidamente uscirà l'acqua; in linguaggio usuale diciamo che il *flusso* dell'acqua sarà maggiore. Inoltre, se buttiamo un colorante nell'acqua, vedremo formarsi delle "linee" (*linee di flusso*) che segiranno la direzione della velocità dell'acqua, e che, per quanto abbiamo detto prima, si allontaneranno sempre più dal rubinetto, cioè usciranno dal rubinetto e andranno "all'infinito".

Naturalmente, se lo stesso ambiente praticamente infinito è pieno d'acqua ed è presente solo uno scarico, allora l'acqua, sempre a raggiera, partirà dallinfinito e confluirà nello scarico, e lo stesso faranno le linee di forza. Inoltre, tanto più grande sarà lo scarico, tanto più rapidamente l'accqua vi confluirà ("il flusso sarà più grande").

In ogni caso, *il rubinetto e lo scarico modificano lo stato fisico dell'ambiente circostante.* Notiamo anche che in ogni punto noi possiamo andare a misurare la velocità dell'acqua, che è un *vettore*; diciamo allora che siamo in presenza di un *campo vettoriale*, che non è altro che la velocità del fluido, il cui valore in ogni punto possiamo misurare. Il rubinetto e lo scarico le chiameremo *sorgenti del campo di velocità del fluido*. Poichè il rubinetto fornisce acqua, mentre lo scarico l'assorbe, diremo che il rubinetto è una *sorgente positiva*, mentre lo scarico è una *sorgente negativa*.

Adesso, supponiamo di avere *due sorgenti* (due rubinetti, due scarichi, o un rubinetto e uno scarico). *È chiaro che il campo di velocità in presenza delle due sorgenti non sarà uguale a quello generato da una singiola sorgente*; infatti, se per esempio abbiamo un rubinetto e uno scarico, l'accqua che , con il solo rubinetto si allargava a raggiera ed andava all'infinito, ora devierà ed in parte finirà nello scarico. In corrispondenza, anche le linee di flusso saranno modificate.. Cerchiamo di ricordare questo fatto che ci servirà in seguito.

Ritorniamo ora al "flusso" di cui parlavamo prima; esso non è altro che il flusso del campo vettoriale della velocità del fluido. Ma possiamo darne una definizione matematica quantitativa?.Intuitivamente, abbiamo bisogno di una superficie. Infatti, supponiamo di considerare una superficie S all'interno del fluido; parlando in termini semplici, il flusso dell'acqua è la quantità di acqua che attraversa questa superficie (in una certa unità di tempo). Spesso, quando si tratta di fiumi si parla anche di *portata*. Ora, capiamo subito che il flusso dipenderà da quanto è il modulo della velocità (il flusso è più grande se il modulo della velocità è più grande) ed anche, in modo cruciale, da qual'è l'angolo tra la direzione della velocità e la superficie attraverso la quale il fluido deve passare. Infatti, se al limite la velocità del fluido è *parallela* alla superficie S. il fluido non la attraverserà, ed il flusso sarà nullo. Ci aspettiamo invece che se la velocità del fluido è *perpendicolare* alla superficie S, il flusso sarà massimo. Inoltre, più grande sarà l'area di S, più grande sarà il flusso. A questo punto abbiamo capito che:

1) il flusso aumenta col modulo della velocità del fluido;

2) il flusso aumenta con l'area di S;

3) il flusso dipende dall'angolo fra la velocità e la superficie; in particolare, esso è zero quando la velocità del fluido è parallela ad S, mentre è massimo quando la velocità del fluido è perpendicolare ad S.

Da tutto questo siamo in grado di definire il flusso della velocità attraverso la superficie S. Per farlo conviene però prima definire il *versore della superficie* S che indicheremo con $\hat{n}$: *il versore* $\hat{n}$ *della superficie* S *è un* *vettore di modulo* 1 *perpendicolare alla superficie*. Si noti che manca per ora la definizione del verso di $\hat{n}$, ma per ora non è essenziale (possiamo scegliere uno dei due possibili); poi riprenderemo questo discorso quando faremo il teorema di Gauss.

Definito $\hat{n}$, che ricordiamo essere perpendicolare alla superficie, notiamo che quando la velocità del fluido è parallela ad S, ed il flusso è nullo, allora essa è perpendicolare a $\hat{n}$ (cioè l'angolo con $\hat{n}$ è 90°); mentre, quando la velocità del fluido è perpendicolare ad S, ed il flusso è massimo, allora essa è parallelo a $\hat{n}$ (cioè l'angolo con $\hat{n}$ è 0°). Questo ci suggerisce che, indicato con θ l'angolo tra la velocità $\vec{v}$ del fluido sulla superfice ed il versore $\hat{n}$, il flusso debba contenere cos θ; infatti, per $\theta = 90°$ (velocità del fluido è parallela ad S) il coseno, e quindi il flusso, è nullo; quando invece per $\theta = 0°$ il coseno è massimo ($= 1$), ed il flusso è massimo. Dovendo poi il flusso aumentare sia con l'area di S che con il modulo di $\vec{v}$, la sua espressione sarà proporzionale al loro prodotto. In definitiva, indicato con $\Phi_S(\vec{v})$ il flusso della velocità attraverso S, abbiamo

$$\Phi_S(\vec{v}) \doteq |\vec{v}|.\ S\ \cos\ \theta \equiv \vec{v} \cdot \hat{n}\ S, \tag{212}$$

dove l'ultima espressione dà il risultato giusto perchè, essendo θ l'angolo tra $\vec{v}$ ed $\hat{n}$, ed essendo $|\hat{n}| = 1$, dalla definizione di prodotto scalare abbiamo $(\vec{v} \cdot \hat{n})\ S = (|\vec{v}|.\ |\hat{n}|.\ \cos\ \theta)\ S = |\vec{v}|.\ S\ \cos\ \theta$.

Ora dobbiamo risolvere un altro piccolo problema; infatti, nella nostra definizione di flusso, per poter parlare dello stesso valore della velocità in ogni punto di S, e per poter parlare, senza ditinzione tra i punti di S, di angolo tra $\vec{v}$ e la superficie (o, equivalentemente, tra $\vec{v}$ e $\hat{n}$), abbiamo implicitamente supposto che:

1) la superficie S è piana;

2) $\vec{v}$ è costante su tutti i punti della superficie.

(Si immagini un tratto dritto di fiume senza vortici o turbolenze, quindi con linee di flusso parallele, e velocità costante, che attraversa una superficie piana).

Naturalmente, questo è un caso molto particolare. Tuttavia, non è difficile dare una definizione di flusso anche nel caso generale. Supponiamo infatti di avere una superficie S di forma qualsiasi (una semisfera, una superficie ondulata, ecc.) ed un fluido con una velocità che può variare da punto a punto della superficie. Come facciamo?

Immaginiamo allora di dividere S in tante superfici molto piccole

$$\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_N;$$

qui, per molto piccole intendiamo dire che sono così piccole che la velocità del fluido su ognuna di esse è approssimativamente costante (naturalmente, la velocità cambierà valore se consideriamo un'altra di queste superfici molto piccole. Indichiamo allora con v_1 il valore approssimativamente costante che la velocità del fluido ha sui punti di ΔS_1, con v_2 il valore approssimativamente costante che la velocità del fluido ha sui punti di ΔS_2, e così via, fino a v_N che è il valore approssimativamente costante che la velocità del fluido ha sui punti di ΔS_N. Ora, essendo ciascuna superficie molto piccola, si può anche considerare approssimativamente piana. Ricadiamo quindi, per ognuna delle piccole superfici, nel caso precedente, con superficie piana e velocità costante. Indichiamo allora con $\hat{n}_1$ il versore normale a ΔS_1, con $\hat{n}_2$ il versore normale a ΔS_2, e così via, fino a $\hat{n}_N$ che è il versore normale a ΔS_N; indichiamo anche con θ_1 l'angolo tra la velocità $\vec{v}_1$ e $\hat{n}_1$, con θ_2 l'angolo tra la velocità $\vec{v}_2$ e $\hat{n}_2$, e così via, fino a θ_N che è l'angolo tra la velocità $\vec{v}_N$ e $\hat{n}_N$. Possiamo quindi definire il *flusso elementare* $\Delta\Phi_i$ attraverso la superficie elementare ΔS_i $(1 = 1, ..., N)$ come

$$\Delta\Phi_i \doteq |\vec{v}_i|.\ \Delta S_i\ \cos\ \theta_i \equiv \vec{v}_i \cdot \hat{n}_i\ \Delta S_i,\ 1 = 1, ..., N. \tag{213}$$

Ovviamente, il flusso totale $\Phi_S(\vec{v})$ del campo velocità attraverso la superficie S è dato dalla somma di tutti i flussi elementari

$$\Phi_S(\vec{v}) \doteq \sum_{i=1}^{N} \Delta\Phi_i \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \cdot \hat{n}_i\ \Delta S_i. \tag{214}$$

Naturalmente, più si scelgono piccole le superfici elementari e più il calcolo è accurato. Nel limite matematico nel quale tutte le superfici elementari diventano infinitesime, il calcolo diventa esatto, e la somma nell'equazione (214) diventa quello che prende il nome di *integrale di superficie*:

$$\Phi_S(\vec{v}) \doteq \int_S \vec{v} \cdot \hat{n}\ dS. \tag{215}$$

Il significato di questa relazione non è sostanzialmente dissimile da quello della (214): qui dS è la generica superficie elementare diventata infinitesima.

$\hat{n}$ è il versore perpendicolare a dS, $\vec{v}$ è il valore della velocità su dS, e $\int_S$ indica che si devono sommare tutti i contributi delle superfici infinitesime dS che compongono la superficie totale S.

Armati del concetto di flusso, andiamo ora a considerare particolari superfici, cioè le *superfici chiuse* (per esempio, una sfera). Le superfici chiuse hanno una peculiarità: di esse si può definire un *interno* ed un *esterno*. Riprendiamo allora una cosa che abbiamo lasciato in sospeso; nel definire il versore $\hat{n}$ normale ad una superficie, abbiamo detto che dei due possibili versi ne sceglievamo uno a piacere. Nel caso di una superficie chiusa scegliamo invece sempre la seguente convenzione: *il verso dei versori $\hat{n}$ perpendicolari nei vari punti della superficie chiusa deve puntare sempre verso l'esterno della superficie.* Per esempio, nel caso di una sfera, i versori perpendicolari alla superficie hanno sempre la direzione dei raggi (perchè ogni raggio è perpendicolare alla superficie): secondo la nostra convenzione, il loro verso deve essere quello che si allontana dal centro della sfera.

Perchè ci interessano tanto le superfici chiuse? La risposta è in quella che chiameremo una prima versione del Teorema di Gauss nel caso fluidi. Il concetto è molto semplice. Innaginiamo una superficie chiusa piazzata nella regione di spazio dove è presente il fluido che stiamo studiando. Consideriamo il caso in cui ci troviamo in presenza di due sorgenti, una positiva (un rubinetto) ed una negativa (uno scarico). L'immagine di una vasca da bagno renderà bene l'idea. Piazziamo idealmente la nostra superficie chiusa al centro della vasca: allora, è evidente che l'acqua prima entra e poi esce, e *il flusso totale sarà nullo*, poichè alla parte di flusso entrante (l'acqua che entra) bisognerà sottrarre quella uscente (l'acqua che esce) ed il bilancio totale sarà nullo.

Se però piazziamo idealmente la nostra superficie chiusa in modo che racchiuda il rubinetto (la sorgente positiva) l'acqua uscirà solo dalla superficie, ed il flusso sarà diverso da zero, e proporzionale alla potenza del rubinetto. Se piazziamo idealmente la nostra superficie chiusa in modo che racchiuda lo scarico (la sorgente negativa) l'acqua entrerà solo nella superficie, ed il flusso sarà diverso da zero (e di segno opposto a quello generato dal rubinetto), e proporzionale alla potenza dello scarico. Ovviamente, se piazziamo idealmente la nostra superficie chiusa in modo che racchiuda *sia* il rubinetto (la sorgente positiva) lo scarico (la sorgente negativa), il flusso sarà la somma algebrica dei flussi delle due sorgenti, e dipenderà dalle loro potenze. Naturalmente, questo discorso si può estendere ad un qualsiasi numero di sorgenti. Abbiamo visto quindi che il flusso attraverso una superficie chiusa dipende da tutte e sole le sorgenti *interne* alla superficie. È anche chiaro che, ai fini delll'entità del flusso *la forma della superficie chiusa è ininfluente*: conta solo quali sorgenti ci sono all'interno, e qual'è la loro potenza.

Ne possiamo concludere che: *il flusso di un fluido attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla somma algebrica delle potenze delle sole sorgenti racchiuse all'interno della superficie stessa.* Questa è una prima versione del Teorema di Gauss nel caso fluidi.

Un'ultima parola sul fatto che qua parliamo di flusso del campo velocità, mentre all'inizio parlavamo (come si fa di solito) di flusso della massa del fluido o "portata"; il fatto è che basta moltiplicare opportunamete tutte le quantità per la densità di massa del fluido per passare dal flusso di velocità alla portata.

La definizione di campo elettrico

Torniamo ora al caso di una carica elettrica puntiforme q. Vogliamo introdurre dei concetti, ed un corrispondente formalismo, del tipo di quelli usati nel caso dei fluidi. Allora, così come rubinetto e scarico erano le sorgenti (positiva e negativa) del campo di velocità del fluido, diremo che *le cariche elettriche positive e negative sono le sorgenti positive e negative di un campo vettoriale che chiameremo campo elettrico* $\vec{E}$. Per la precisione, trattando solo il caso statico, il campo $\vec{E}$ è quello che viene chiamato *campo elettrostatico*, ma per semplicità diremo semplicemente campo elettrico. Data una carica puntiforme Q, diremo che *il campo elettrico generato da* Q *è la modifica delle condizioni fisiche causata da questa carica in tutti i punti dello spazio circostante*. Il problema, però, è che a questa affermazione deve corrispondere una definizione operativa di $\vec{E}$, il che significa che, data la carica Q nel vuoto, dobbiamo fornire una prescrizione che ci permetta di misurare il campo $\vec{E}$ in ogni punto P dello spazio intorno a Q. Ora, quello che abbiamo a disposizione, e che possiamo misurare, è la forza di Coulomb (210) che si esercita tra *due* cariche puntiformi. Andiamo quindi a mettere nel punto P dello spazio, nel quale vogliamo misurare il campo $\vec{E}$ generato dalla carica originaria Q, una *carica di prova* q, e misuriamo la forza di Coulomb che Q

esercita su q; se il punto P è a distanza r da Q, la (210) ci dice che

$$\vec{F}_{Qq} = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q\,q}{r^2}\,\hat{r}, \tag{216}$$

dove il versore $\hat{r}$ ha verso che va da Q a q. Ricordiamoci però che il campo elettrico generato da Q, cioè la modifica dello spazio circostante, deve dipendere *solo* da Q; potremmo quindi definire il campo di Q come

$$\vec{E}_{Qq} \doteq \frac{\vec{F}_{Qq}}{q}.$$

Ma sappiamo anche dalla discussione sui fluidi che se mettiamo *due* sorgenti (in questo caso Q *e* q, il campo risultante *non è* quello di Q (per esempio, se cè solo Q ed è positivo (un "rubinetto"), il fluido si dispone a raggiera e le sue linee di flusso vanno tutte all'infinito; ma se aggiungiamo una carica di prova q negativa (uno "scarico") il campo di velocità verrà deformato, perchè molte linee di flusso, invece di dirigersi all'infinito, andranno a confluire in q, cioè nello "scarico"). Quindi, il campo elettrico così definito dipenderà ancora dalla carica di prova q e *non* sarà il campo di Q. Come risolviamo questo problema? Ci viene in mente che, man mano che la carica di prova q diventa più piccola, la deformazione ad essa dovuta del campo di Q diminuisce e, se q è "sufficientemente piccola", questa deformazione diventa trascurabile, ed il campo definito misurando la forza tra Q e q, e poi dividendola per q, diventa sostanzialmente il campo di Q. Allora, effettuiamo quello che abbiamo chiamato un "procedimento fisico di limite", seguendo, per esempio, un protocollo, che ora descriviamo, costituito da una sequenza di "passi" a ciascuno dei quali corrisponde una misura.

Passo 1) Partiamo da una prima carica di prova q scelta arbitrariamente e piazzata nel punto P a distanza r da Q, misuriamo la forza $\vec{F}_{Qq}$, e definiamo un primo campo elettrico, che dipenderà da q oltre che da Q, come

$$\vec{E}_q \doteq \frac{\vec{F}_{Qq}}{q},$$

dove con la notazione E_q abbiamo messo in evidenza il fatto che stiamo usando la carica di prova q;

Passo 2) Dimezziamo la carica di prova, passando a piazzare nello stesso punto P a distanza r da Q una carica di prova $q/2$, misuriamo la forza $\vec{F}_{Q(q/2)}$, e definiamo un secondo campo elettrico, che dipenderà da $q/2$ oltre che da Q, come

$$\vec{E}_{(q/2)} \doteq \frac{\vec{F}_{Q(q/2)}}{(q/2)};$$

ci aspettiamo ovviamente che $q/2$ perturbi meno di q il campo di Q;

Passo 3) Dimezziamo ancora la carica di prova, passando a piazzare nello stesso punto P a distanza r da Q una carica di prova $q/4$, misuriamo la forza $\vec{F}_{Q(q/4)}$, e definiamo un terzo campo elettrico, che dipenderà da $q/2$ oltre che da Q, come

$$\vec{E}_{(q/4)} \doteq \frac{\vec{F}_{Q(q/4)}}{(q/4)}.$$

Continuando il procedimento, la carica di prova diventerà $q/8, q/16, ..., q/(2^n)$, dove n è un intero che, in principio, può essere aumentato a piacimento; in corrispondenza, la carica di prova diventerà sempre più piccola, ed i campi $\vec{E}_q, \vec{E}_{(q/2)}, \vec{E}_{(q/4)}, \vec{E}_{(q/8)}, ..., \vec{E}_{(q/(2^n))}$ forniranno una misura del campo elettrico di Q sempre meglio approssimata. Allora, fissato un errore (per esempio sulla decima cifra decimale) quando dimezzando ulteriormente la carica dopo un certo n il campo elettrico non varia nei limiti di questo essrore, allora diciamo che abbiamo misurato, e quindi definito, il campo elettrico della sola carica Q (almeno nei limiti di questo errore). Si noti che, nel limite nel quale n diventa molto grande, la carica di prova "tende a zero"; allora il procedimento fisico che abbiamo descritto si riassume nella seguente definizione del campo elettrico generato da Q:

$$\vec{E} \doteq \text{"}\lim_{q \to 0}\text{"} \frac{\vec{F}_{Qq}}{q}, \tag{217}$$

dove le virgolette indicano che stiamo eseguendo un limite fisico nel senso precedentemente descritto, e non un limite matematico.

Adesso notiamo che questa definizione ci dà per il campo di Q in un punto

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}\,\hat{r}. \tag{218}$$

Si noti che questa formula, che fornisce il campo elettrico generato da una carica puntiforme, si ottiene dal rapporto tra la forza esercitata da Q su una carica di prova q, e la carica q stessa, *qualsiasi sia l valore di q*. Allora ci possiamo domandare: perchè abbiamo fatto tutto il procedimento precedente di "limite fisico"? La risposta è che la formula (218) non può ridursi ad un semplice procedimento matematico di rapporto tra due oggetti, ma, almeno in principio, deve essere verificata tramite *misura* (come si fa per definire qualsiasi randezza fisica); questo giustifica la discussione precedente.

Innanzitutto, analizziamo le dimensioni fisiche del campo elettrico (troveremo poi unità più convenienti quando introdurremo il potenziale elettrico):

$$[E] = [F/q] = [N/C].$$

Notiamo poi che il verso di $\vec{E}$ dipende dal *segno* della carica. Infatti, se Q è positiva, il verso è quello del versore $\hat{r}$ che, come sappiamo, va da Q al punto nel quale vogliamo calcolare $\vec{E}$, e quindi è *uscente* dalla carica. Se invece Q è negativa, il verso è quello opposto al versore $\hat{r}$, e quindi è *puntato verso la carica.*

Notiamo ancora che, essendo un campo elettrico un vettore, se abbiamo più cariche quntiformi $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, che generano campi $\vec{E}_1, \vec{E}_2, ..., \vec{E}_n$, ciascuno della forma (218), possiamo calcolare il campo *totale* generato dalle n cariche semplicemente sommando vettorialmente gli n campi

$$\vec{E}^n_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n \tag{219}$$

Quindi: *noto il campo generato da una carica puntiforme, è possibile calcolare il campo totale generato da una distribuzione qualsiasi di cariche.* Si noti che questo è vero anche per distribuzioni *continue* di carica (per esempio, distribuite su una superficie o in un volume. Basta infatti adottare il solito procedimento di dividere la superficie (o il volume) in tante superfici (volumi) elementari, in modo che la carica concentrata su una superficie (o su un volume), carica che ovviamente è anch'essa elementare (al limite, infinitesima) possa essere considerata puntiforme. Di ciascuna carica elementare si calcola il campo eletrrico secondo la (218), e poi tutti questi campi (ovviamente elementari) si sommano vettorialmente. Chiaramente, nel caso di distribuzioni continue di carica otterremo, al limite, il campo totale come un integrale (di superficie o di volume).

Avendo ora a disposizione l'espressione del campo elettrico possiamo passare a dimostrare il Teorema di Gauss nel caso elettrostatico. Ovviamente, partiamo dal campo (218) di una carica puntiforme.

Preliminarmente, però, ci conviene definire, analogamente al caso dei fluidi, le *linee di flusso* di $\vec{E}$: *una linea di flusso di un campo elettrico $\vec{E}$ è una linea che in ogni punto dello spazio è tangente al campo $\vec{E}$ in quel punto, ed è orientata nel verso di $\vec{E}$ in quel punto.* Questa definizione vale per un campo elettrico qualsiasi. Vediamo però ora come sono fatte le linee di forza del campo di una carica puntiforme; dalla (218) vediamo che questo campo è *radiale*, cioè la sua direzione è sempre quella dei raggi che si diramano in tutte le tre direzioni dal punto nel quale è Q: *quindi, le linee di flusso del campo elettrico di una carica puntiforme sono le semirette che hanno origine in Q e vanno all'infinito.* Il verso delle linee di forza è quello di $\vec{E}$; quindi, se la carica è positiva le semirette *escono* dalla carica, se la carica è negativa le semirette *entrano* nella carica. Questo rende, anche visivamente, evidente l'analogia con il "rubinetto" (carica positiva) e lo "scarico" (carica negativa) del fluido.

Tornando al problema del Teorema di Gauss nel caso elettrostatico, innazitutto, data una superficie S, possiamo definire il *flusso totale del campo elettrico $\vec{E}$ attraverso S*, $\Phi_S(\vec{E})$, in modo del tutto analogo al caso dei fluidi sostituendo il campo di velocità $\vec{v}$ con il campo $\vec{E}$, nella (214)

$$\Phi_S(\vec{E}) \doteq \sum_{i=1}^{N} \Delta\Phi_i \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \, \Delta S_i, \tag{220}$$

o nella (215)

$$\Phi_S(\vec{E}) \doteq \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS, \tag{221}$$

dove ora naturalmente il flusso elementare attraverso ΔS_i è $\Delta\Phi_i = \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \, \Delta S_i$, $\vec{E}_i$ denota il valore praticamente costante del campo elettrico sulla superficie elementare ΔS_i, $\hat{n}_i$ è il versore perpendicolare a ΔS_i.

Vediamo che le dimensioni del flusso di un campo elettrico sono quelle del campo moltiplicate per una superficie; nel sistema MKSQ abbiamo allora

$$[\Phi_S(\vec{E})] = [E \cdot S] = [N \cdot m^2 \cdot C^{-1}.$$

Per dimostrare il Teorema di Gauss, dobbiamo ora considerare una superficie *chiusa*, adottando sempre la convenzione che se la superficie è chiusa i versori delle superfici elementari che compaione nel flusso hanno un verso che punta verso l'esterno della superficie. Abbiamo anche capito, nel caso dei fluidi, perchè il flusso attraverso una superficie chiusa non deve dipendere dalla forma della superficie, ma solo dalla disposizione delle sorgenti. Quindi, possiamo dimostrare il Teorema di Gauss per il campo generato da una carica puntiforme Q usando una particolare superficie chiusa che ci faciliti il conto. Consideriamo quindi una sfera con il centro che coincide col punto nel quale è piazzata la carica Q, e di raggio generico r. Vediamo allora dall'espresione (218) che, essendo il campo diretto lungo i raggi, esso è, come i raggi, perpendicolare alla superficie sferica in ogni punto; inoltre, il suo modulo dipende solo da r ed, essendo ovviamente r costante su ogni punto della sfera (ne è il raggio), anche il modulo di $\vec{E}$ è costante in ogni punto della sfera. Consideriamo allora il flusso elementare del campo attraverso una superficie elementare della sfera ΔS_i:

$$\Delta\Phi_i = \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \, \Delta S_i = |\vec{E}| \ \cos \, \theta \, \Delta S_i$$

$$= |\vec{E}| \ \cos \, 0^\circ \, \Delta S_i = |\vec{E}| \, \Delta S_i \ , \qquad (222)$$

dove abbiamo usato il fatto che il modulo di $\vec{E}$ è costante (e quindi non dipende dalla superficie, cioè dall'indice i), la definizione di prodotto scalare tra due vettori, il fatto che $|\hat{n}_i| = 1$ per definizione, e il fatto che, essendo sia il campo che $\hat{n}_i$ perpendicolari a ΔS_i (che sta sulla sfera), tra loro sono paralleli, l'angolo che formano è quindi nullo, ed il coseno vale 1.

Adesso calcoliamo il flusso totale secondo la definizione (220), inserendo l'espressione (222) del flusso elementare ottenuto in questo caso:

$$\Phi_S(\vec{E}) \doteq \sum_{i=1}^{N} \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^{N} |\vec{E}| \, \Delta S_i = |\vec{E}| \ \sum_{i=1}^{N} \ \Delta S_i = |\vec{E}| \ S, \qquad (223)$$

dove $|\vec{E}|$ va fuori della somma perchè è costante, e la somma di tutte le superfici elementari della sfera è ovviamente la superficie totale S della sfera.

Ora, dalla (218) vediamo che

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4 \, \pi \, \epsilon_0} \, \frac{Q}{r^2},$$

e sappiamo che la superficie della sfera di raggio r è

$$S = 4\ \pi\ r^2.$$

Inserendo questi valori nella (223) abbiamo

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{Q}{r^2} \cdot 4\ \pi\ r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{224}$$

Quindi, poichè il flusso non dipende dalla forma della superficie (cosa di cui possiamo convincerci osservando che il numero di linee di flusso radiali che attraversa la sfera centrata in Q è lo stesso di quelle che attraversano una qualsiasi altra superficie chiusa che racchiude la carica), possiamo enunciare il Teorema di Gauss per una carica puntiforme:

Il flusso del campo elettrico generato da una carica puntiforme racchiusa da una superficie S è pari alla carica divisa per la costante dielettrica del vuoto ϵ_0.

In formula

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{225}$$

Ora, come ultimo passo, dobbiamo notare che, nel caso di più cariche puntiformi $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ racchiuse in una superficie S, il campo totale, dato dalla (219), ha flusso attraverso S dato, usando per comodità la dfinizione simbolica (221), da

$$\begin{aligned}
\Phi_S(\vec{E}) &= \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\ dS = \int_S [\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n] \cdot \hat{n}\ dS \\
&= \int_S \vec{E}_1 \cdot \hat{n}\ dS + \int_S \vec{E}_2 \cdot \hat{n}\ dS + ... + \int_S \vec{E}_n \cdot \hat{n}\ dS \\
&= \Phi_S(\vec{E}_1) + \Phi_S(\vec{E}_2) + ... + \Phi_S(\vec{E}_n) \\
&= \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0} + ... + \frac{Q_n}{\epsilon_0} \equiv \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{\epsilon_0}\ ,
\end{aligned} \tag{226}$$

dove abbiamo usato il fatto che l'integrale di una somma è uguale alla somma degli integrali, ed il Teorema di Gauss (225) per ognuna delle cariche puntiformi $Q_1, Q_2, ..., Q_n$. Siccome $\sum_{i=1}^n Q_i$ non è altro che la carica totale *interna* alla superficie, che indichiamo con Q_{tot}^{int}, e poi chè le cariche *esterne alla superficie* non contribuiscono al flusso (perchè le linee di forza prima entrano e poi escono dalla superficie e il bilancio è nullo), possiamo enunciare il Teorema di Gauss (valido anche nel caso di distribuzioni continue di carica) nella sua forma più generale:

Il flusso attraverso una superficie chiusa di un campo elettrico generato da una distribuzione di carica è uguale alla carica totale interna alla superficie divisa per la costante dielettrica del vuoto ϵ_0
cioè

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{tot}^{int}}{\epsilon_0}. \tag{227}$$

Per capire come funziona il Teorema di Gauss, vediamo questo esempio

Esercizio 8.1): Calcolare il flusso del campo elettrico dovuto a tre cariche puntiformi

$$Q_1 = 10^{-5}\ C\ ,\ Q_2 = -\ 2 \cdot 10^{-5}\ C\ ,\ Q_3 = 4 \cdot 10^{-5}\ C,$$

attraverso una superficie chiusa S che racchiude solo Q_2 e Q_3.
Soluzione: Le uniche cariche interne sono Q_2 e Q_3 (Q_1 quindi non contribuisce al flusso); la carica totale interna è quindi

$$Q_{tot}^{int} = Q_2 + Q_3 = (-\ 2 + 4) \cdot 10^{-5}\ C = 2 \cdot 10^{-5}\ C.$$

Il Flusso, secondo la (227), è quindi

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{\epsilon_0} \approx \frac{2 \cdot 10^{-5}}{8.859 \cdot 10^{-12}} \approx 2.25 \cdot 10^{-6}\ fracN\ m^2C.$$

Abbiamo finora considerato il solo il caso di una o più cariche puntiformi. Tuttavia, in generale le cariche, a livello macroscopico, sono distribuite in maniera "continua" nel volume occupato da un corpo (cariche di volume), o sulla superficie di un corpo (cariche di superficie). Anche in questo caso vale il teorema di Gauss nella forma (227), dove la carica totale interna può essere anche una carica, o parte di una carica, di volume o di superficie. Per poter tenere conto anche delle cariche distribuite in modo continuo, introduciamo i concetti di *densità di carica per unità di volume (o volumica) o densità di carica per unità di superficie (o superficiale).* Il caso più semplice si ha quando la carica è distribuita uniformemente nel volume o sulla superficie, cioè quando la sua densità è *costante* (nel senso che non dipende dalla particolare zona nel volume o sulla superficie che andiamo a considerare). In questo caso, le espressioni delle densità di carica sono molto semplici. Infatti, denotata con la lettera greca ρ (che si legge "ro") la densità di carica per unità di volume, e con la lettera greca σ (che si legge "sigma") a densità di carica per unità di superficie, in questo caso semplice abbiamo che

$$\rho \doteq \frac{Q_{tot}}{V} \;\; ; \;\; \sigma \doteq \frac{Q_{tot}}{S} \; , \tag{228}$$

dove Q_{tot} denota la carica totale concentrata nel corpo, e V ed S denotano il volume e la superficie del corpo, rispettivamente. Naturalmente, si possono ottenere densità di carica costanti solo se c'è una particolare simmetria (per esempio, se il corpo è di forma sferica). Analizziamo prima di tutto, come al solito, le dimensioni fisiche delle due densità:

$$[\rho] = [Q \cdot V^{-1}] = [Q \cdot l^{-3}] \;\; ; \;\; [\sigma] = [Q \cdot S^{-1}] = [Q \cdot l^{-2}] \; ; \tag{229}$$

Quindi, nel sistema MKSQ, ρ si misura in *Coulomb diviso metri cubi*, mentre σ si misura in *Coulomb diviso metri quadrati*. Vediamo poi che in questo caro semplice la carica totale concentrata su un qualsiasi volume V è data da

$$Q_{tot} = \rho \, V \; , \tag{230}$$

e quella concentrata su una qualsiasi superficie S è data da

$$Q_{tot} = \sigma \, S \; . \tag{231}$$

Adesso, che succede se le densità non sono costanti, ma dipendono da dove ci mettiamo nel volume o sulla superficie? In questo caso, dobbiamo ricorrere ad un metodo che abbiamo incontrato spesso nel corso, cioè quello di considerare il volume del corpo diviso in tanti volumetti elementari, o la sua superficie divisa in tante superfici elementari. Volume elementare significa qui che esso è così piccolo che la densità volumica di carica ρ si può considerare con buona approssimazione costante al suo interno; e, analogamente, superficie elementare significa che essa è così piccola che la densità superficiale di carica σ si può considerare con buona approssimazione costante sui suoi punti. Supponiamo allora di aver diviso il volume totale V in N "volumetti" ΔV_i, ciascuno dei quali contiene una piccola carica ΔQ_i $(i = 1, ..., N)$; e supponiamo di averlo fatto in modo tale che il valore, che indicheremo con ρ_i, della densità volumica di carica su ΔV_i risulti con buona approssimazione indipendente dal particolare punto in ΔV_i $(i = 1, ..., N)$. Allora, ricadiamo nel caso semplice precedente di densità volumica costante e possiamo scrivere

$$\rho_i \doteq \frac{\Delta Q_i}{\Delta V_i} \ . \tag{232}$$

Analogamente, nel caso di densità superficiale, supponiamo di di aver diviso la superficie totale S in N "piccole superfici" ΔS_i, ciascuno delle quali contiene una piccola carica ΔQ_i $(i = 1, ..., N)$; e supponiamo di averlo fatto in modo tale che il valore, che indicheremo con σ_i, della densità superficiale di carica su ΔS_i risulti con buona approssimazione indipendente dal particolare punto in ΔS_i $(i = 1, ..., N)$. Allora, ricadiamo nel caso semplice precedente di densità superficiale costante e possiamo scrivere

$$\sigma_i \doteq \frac{\Delta Q_i}{\Delta S_i} \ . \tag{233}$$

Ora, ricaviamo dalla definizione (232) la carica ΔQ_i contenuta nel volumetto ΔV_i:

$$\Delta Q_i = \rho_i \ \Delta V_i \ . \tag{234}$$

Questa è la carica elementare contenuta nel volumetto i-esimo tra gli N volumetti nei quali abbiamo diviso il volume totale V del corpo carico; ma allora, la carica totale Q_{tot} contenuta in questo corpo sarà data dalla somma di tutte queste cariche elementari, cioè da

$$Q_{tot} = \sum_{i=1,...,N} \Delta Q_i \equiv \sum_{i=1,...,N} \rho_i \ \Delta V_i \ , \tag{235}$$

dove abbiamo usato l'Eq (234).

Analogamente, nel caso di densità superficiale, ricaviamo dalla definizione (233) la carica ΔQ_i contenuta nella piccola superficie ΔS_i:

$$\Delta Q_i = \sigma_i \ \Delta V_i \ . \tag{236}$$

Usando ora questa relazione, e ripetendo il discorso fatto nel caso di densità volumica, denotata con Q_{tot} la carica totale concentrata sulla superficie del corpo carico, abbiamo

$$Q_{tot} = \sum_{i=1,...,N} \Delta Q_i \equiv \sum_{i=1,...,N} \sigma_i \ \Delta V_i \ . \tag{237}$$

Supponiamo di nuovo il caso semplice in cui la densità volumica o quella superficiale sono costanti su tutto il corpo; questo significa che non dipendono dal particolare volumetto ΔV_i o dalla particolare piccola superficoe ΔS_i o, in altre parole, non dipendono dall'indice i: $\rho_i \equiv \rho$ per ogni i, oppure $\sigma_i \equiv \sigma$ per ogni i. Allora dalle Eq. (235) e (237) ricaviamo:

$$Q_{tot} = \sum_{i=1,\ldots,N} \rho \, \Delta V_i = \rho \sum_{i=1,\ldots,N} \Delta V_i \equiv \rho \cdot V \ , \tag{238}$$

e

$$Q_{tot} = \sum_{i=1,\ldots,N} \sigma \, \Delta S_i = \sigma \sum_{i=1,\ldots,N} \Delta s_i \equiv \sigma \cdot S \ , \tag{239}$$

dove abbiamo tenuto conto che, sommando tutti i volumetti elementari o tutte le superfici elementari, si ottengono, rispettivamente, il volume e la superficie totali del corpo. Ora, dividendo la (238) per V e la (239) per S, riotteniamo le definizioni (228) per le due densità nel caso semplice, come deve essere.

Si noti anche che, come abbiamo visto in altri contesti, le espressioni ai secondi membri delle Eq. (235) e (237) nel limite in cui tutti i volumetti, o tutte le piccole superfici, "tendono a zero" prendono il nome di *integrale esteso al volume V della densità volumica ρ*, o di *integrale esteso alla superficie S della densità superficiale σ*; le equazioni si riscrivono allora simbolicamente:

$$Q_{tot} = \int_V \rho \, dV \ , \tag{240}$$

e

$$Q_{tot} = \int_S \sigma \, dS \ . \tag{241}$$

Comunque, il significato è il solito: il secondo membro della (235) approssima entro un errore arbitrariamente pre-fissato il secondo membro della (240) se i volumetti ΔV_i sono scelti abbastanza piccoli, e il secondo membro della (237) approssima entro un errore arbitrariamente pre-fissato il secondo membro della (241) se le superfici ΔS_i sono scelte abbastanza piccole. D'altra parte, è questo il metodo con cui un computer calcola un integrale.

Facciamo ora degli altri esercizi sul teorema di Gauss nel caso in cui abbiamo distribuzioni continue di carica.

Esercizio 8.2): Calcolare il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa qualsiasi che racchiude metà della superficie di un corpo sferico dotato

di densità superficiale di carica σ costante, il cui valore è $\sigma = 3 \cdot 10^{-5}\ C/m^2$. Il raggio R del corpo sferico vale $R = 10cm$. (Avvertenza: non confondere la superficie di Gauss, che può avere forma qualsiasi, con la metà della superficie del corpo sferico!)
Soluzione: Il teorema di Gauss (227) ci dice che conta solo la carica totale interna. Il dato che abbiamo è che solo metà della superficie del corpo sferico è interna alla superficie di Gauss; quindi, il flusso sarà determinato solo dalla carica concentrata nella metà sferica racchiusa. Sappiamo anche che la densità superficiale σ è costante; siamo quindi nel caso semplice data dalla seconda relazione nella (228), e la relazione (231) ci dice che la carica concentrata sulla metà del corpo sferico è data dal prodotto della densità σ per la superficie di metà della sfera di raggio R. Ora, la superficie della sfera di raggio R è $4\ \pi\ R^2$; la metà è quindi $2\ \pi\ R^2$. La carica totale interna alla superficie di Gauss, cioè quella di metà sfera, è allora

$$Q_{tot}^{int} = \sigma \cdot (2\ \pi\ R^2).$$

Per inserire i numeri dobbiamo prima trasformare tutto in MKSQ; quindi

$$R = 10\ cm = 10^{-1}\ m.$$

A questo punto abbiamo

$$Q_{tot}^{int} = 3 \cdot 10^{-5} \cdot (6.28 \cdot 10^{-2}) = 18.84 \cdot 10^{-7}\ C.$$

Il teorema di Gauss (227) ci dà allora

$$\Phi_S(\vec{E}) = (18.84 \cdot 10^{-7})/(8.859 \cdot 10^{-12}) \approx 2.12 \cdot 10^5\ (N \cdot m)/C.$$

Esercizio 8.3): Una superficie chiusa S racchiude completamente un corpo sferico di raggio $R = 20cm$, nel cui volume è presente una densità volumica di carica ρ costante. Sapendo che il flusso attraverso la superficie chiusa S del campo elettrico $\vec{E}$ generato dalla densità ρ vale

$$\Phi_S(\vec{E}) = 5 \cdot 10^5\ (N \cdot m)/C$$

calcolare il valore della densità ρ.

Soluzione: Poichè il corpo è completamente racchiuso in S, la carica interna ad S è *tutta* la carica del corpo. Il volume del corpo sferico di raggio R è $V = (4/3)\ \pi\ R^3$. Trasformiamo il raggio in metri

$$R = 20\ cm = 0.2\ m.$$

Essendo ρ costante, la carica totale è data dalla (230); abbiamo quindi che la carica del corpo, che coincide con la carica totale interna ad S è data da

$$Q_{tot}^{int} = \rho \cdot [(4/3)\ \pi\ R^3] \approx 3.3 \cdot 10^{-2}) \cdot \rho.$$

Il teorema di Gauss (227) ci dà

$$\Phi_S(\vec{E}) = (\approx 3.3 \cdot 10^{-2} \cdot \rho)/(8.859 \cdot 10^{-12}) \approx 3.7 \cdot 10^9,$$

da cui

$$\rho = (\Phi_S(\vec{E})/3.7) \cdot 10^{-9} = (5/3.7) \cdot 10^5 \cdot 10^{-9} \approx 1.35 \cdot 10^{-4} C/m^3.$$

Esercizio 8.4): Una superficie chiusa S racchiude completamente due corpi sferici di raggi $R_1 = 25cm$ e $R_2 = 50cm$. Nel volume del primo corpo è presente una densità volumica di carica ρ_1 costante, il cui valore è $\rho_1 = 4 \cdot 10^{-4} C/m^3$. Nel volume del secondo corpo è presente una densità volumica di carica ρ_2 costante, il cui valore è da determinare. Sapendo che il flusso totale $\Phi_S(\vec{E})$ attraverso S del campo generato dalle cariche dei due corpi vale $\Phi_S(\vec{E}) = 8 \cdot 10^5\ (Ncdotm)/C$, calcolare ρ_2.
Soluzione: Ripetendo il discorso di prima per ognuno dei due corpi sferici, abbiamo che le cariche totali Q_1 e Q_2 del primo e del secondo corpo sono, rispettivamente,

$$Q_1 = \rho_1 \cdot [(4/3)\ \pi\ R_1^3],$$

e

$$Q_2 = \rho_2 \cdot [(4/3)\ \pi\ R_2^3].$$

Conoscendo ρ_1 e R_1 possiamo calcolarci la carica Q_1 dopo aver trasformato in metri R_1

$$R_1 = 25\ cm = 0.25\ m,$$

$$Q_1 \approx (4 \cdot 10^{-4}) \cdot (6.5 \cdot 10^{-2}) = 2.6 \cdot 10^{-7}\ C.$$

Possiamo anche, dopo dopo aver trasformato in metri $R_{"}$, calcolare Q_2

$$R_1 = 50\ cm = 0.5\ m,$$

$$Q_2 \approx 5.2 \cdot 10^{-1} \cdot \rho_2\ C.$$

Essendo tutte e due i corpi completamente racchiusi da S, la carica totale interna sarà data dalla somma delle cariche dei due corpi

$$Q_{tot}^{int} = Q_1 + Q_2 = 2.6 \cdot 10^{-7} + 5.2 \cdot 10^{-1} \cdot \rho_2.$$

Il teorema di Gauss (227), inserendo questa relazione ed il valore del flusso, ci dà

$$8 \cdot 10^5 = (2.6 \cdot 10^{-7} + 5.2 \cdot 10^{-1} \cdot \rho_2)/(8.859 \cdot 10^{-12}),$$

da cui

$$8{\cdot}10^5 = (2.6{\cdot}10^{-7})/(8.859{\cdot}10^{-12}+(5.2{\cdot}10^{-1}{\cdot}\rho_2)/(8.859{\cdot}10^{-12} \approx 2.9{\cdot}10^4+5.8{\cdot}10^{10}{\cdot}\rho_2,$$

cioè

$$8 \cdot 10^5 \approx 2.9 \cdot 10^4 + 5.8 \cdot 10^{10} \cdot \rho_2.$$

Da questa relazione ricaviamo

$$5.8 \cdot 10^{10} \cdot \rho_2 = 8 \cdot 10^5 - 2.9 \cdot 10^4,$$

e quindi

$$\rho_2 = (8 \cdot 10^5 - 2.9 \cdot 10^4)/(5.8 \cdot 10^{10}).$$

Ci conviene scrivere $2.9 \cdot 10^4) = 0.29 \cdot 10^5)$, e quindi

$$\rho_2 = (8 \cdot 10^5 - 0.29 \cdot 10^5)/(5.8 \cdot 10^{10}) \approx 1.33 \cdot 10^{-5}\ C.$$

Conseguenze del Teorema di Gauss sulla distribuzione di carica nei conduttori in condizioni elettrostatiche

Vedremo ora che il Teorema di Gauss abbinato all'imposizione di condizioni elettrostatiche ha conseguenze importanti sulla distribuzione di carica nei conduttori. Dimostreremo infatti che:

In un conduttore in condizioni elettrostatiche le cariche si distribuiscono sulla del conduttore, mentre al suo interno non sono presenti.cariche.

Per dimnostrare questo assunto, consideriamo le conseguenze di tutto quanto supponiamo:

a) innanzitutto, stiamo considerando un conduttore, e quindi stiamo considerando un materiale nel quale le cariche *possono* muoversi;

b) però vogliamo anche che valgano le condizioni elettrostatiche, cioè imponiamo che le cariche nel conduttore *siano ferme*;

c) l'unico modo per soddisfare sia a) che b) è imporre che la forza che agisce sulle cariche sia *nulla*; infatti, se su una carica q all'interno del conduttore agisce una forza, sappiamo che per la legge di Newton e per il fatto che in un conduttore la carica può muoversi la carica effettivamente si sposterà, e le condizioni elettrostatiche saranno violate; d'altra parte, sappiamo anche che per esercitare una forza su una carica q dentro il conduttore è necessario avere un campo elettrico $\vec{E}$, così su q agirà la forza $\vec{F} = q\,\vec{E}$; se vogliamo che la forza sia nulla è necessario che *il campo elettrico nel conduttore sia nullo*: $\vec{E} = 0$ in qualsiasi punto *interno* al conduttore;

d) se immaginiamo *una qualsiasi superficie chiusa interna al conduttore*, il campo elettrico in ogni punto della superficie, che è un punto interno al conduttore, sarà nullo, e dunque sarà nullo anche il flusso del campo attraverso la superficie scelta; ma il teorema di Gauss (227) ci dice che se è nullo il flusso allora la carica totale interna alla superficie deve essere nulla anchèssa; poichè possiamo scegliere una qualsiasi superficie interna al conduttore, ne deriva che non ci sono cariche all'interno del conduttore;

e) dal discorso fatto risulta che le cariche, non potendo disporsi all'interno del conduttore, possono stare solo sulla superficie che delimita il conduttore.

L'assunto sarebbe dimostrato ma, in realtà rimane da dimostrare perchè le cariche sulla superficie del conduttore possono restare ferme; infatti, la presenza di cariche sulla superficie implica la presenza di un campo elettrico *non nullo* sui punti della superficie, campo che potrebbe far muovere le cariche e violare le condizioni elettrostatiche. Allora, la domanda che bisogna porsi è: quali condizioni deve soddisfare il campo elettrico sulla superficie affinchè le cariche non si muovano?

Per rispondere a questa domanda dobbiamo tenere presente che al di fuori del conduttore cè il vuoto (o l'aria, che è lo stesso) che è un *isolante*; quindi, le cariche non possono muoversi verso *l'esterno*, anche se cè un campo elettrico, poichè dovrebbero muoversi in un isolante. Tuttavia, il campo elettrico deve soddisfare una condizione: *deve essere perpendicolare alla superficie del conduttore in ogni punto*. Infatti, se non lo fosse, essendo un vettore si potrebbe scomporre in due componenti tra loro ortogonali: una rispetto alla perpendicolare alla superficie (che tenderebbe a spostarla nel vuoto, il che non è possibile), ed un'altra rispetto alla *tangente* alla superficie *che potrebbe far muovere le cariche nel conduttore lungo, appunto, la superficie del conduttore stesso.* Quindi, per non contraddire le condizioni elettrostatiche il campo elettrico deve avere solo la componente perpendicolare alla superficie in ogni punto.

Si noti che abbiamo scoperto che una distribuzione superficiale di carica si può ottenere soltanto usando un conduttore, mentre una distribuzione volumica di carica si può ottenere soltanto usando un isolante (naturalmente sempre se siamo in condizioni elettrostatiche).

Il Teorema di Gauss applicato a superfici chiuse "elementari"

In alcuni casi risulta utile e necessario applicare il Teorema di Gauss a superfici chiuse "elementari" ΔS, cioè superfici chiuse costruite con un numero finito di superfici aperte, ciascuna delle quali è abbastanza piccola da poter considerare il campo elettrico praticamente costante sui suoi punti. Tipicamente, si considerano "cilindretti", costituiti quindi da due basi ΔS_1 e ΔS_2, e da una superficie laterale ΔS_L; se ognuna di queste tre superfici è abbastanza piccola da poter considerare il campo elettrico praticamente costante sui suoi punti, allora, denominati $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_L$ i corrispondenti valori (vettoriali) del campo elettrico sui loro punti, ed $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$, $\hat{n}_L$ i versori delle tre superfici che puntano verso l'esterno dela superficie chiusa totale, vediamo che la definizione (220) ci dà per il flusso totale (anch'esso "elementare")

$\Delta\Phi_{\Delta S}$ l'espressione

$$\Delta\Phi_{\Delta S} \equiv \Delta\Phi_{\Delta S_1} + \Delta\Phi_{\Delta S_2} + \Delta\Phi_{\Delta S_L} = \vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 \, \Delta S_1 + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 \, \Delta S_2 + \vec{E}_L \cdot \hat{n}_L \, \Delta S_L \, . \tag{242}$$

Useremo più avanti questa espressione.

8.5 Il potenziale Elettrostatico

Spesso il campo elettrico, essendo un campo vettoriale, non è comodo da usare. È utile allora introdurre un *campo scalare* che prende il nome di *potenziale elettrostatico*. Per campo scalare si intende semplicemente una funzione del punto nello spazio (e quindi funzione delle tre coordinate x, y, z) che non possiede quindi direzione o verso.

In realtà, la possibilità di introdurre il potenziale è legata al fatto che si può dimostrare che la forza $\vec{E} = q\ \vec{E}$ generata su una carica q dal campo elettrostatico $\vec{E}$ è una *forza conservativa.* Non dimostreremo questo fatto. Tuttavia ricordiamo che una forza conservativa compie un lavoro tra due punti A e B che non dipende dal particolare percorso che congiunge i due punti, ma solo da A e B. Ricordiamo inoltre che questo permette di definire una differenza $U_A - U_B$ di energia potenziale tra i due punti, e che questa differenza rappresenta proprio il lavoro fatto dalla forza per spostare un corpo da A a B (cambiato di segno). Ora, se la forza è dovuta ad un campo elettrostatico, sposta le cariche. Allora il potenziale elettrostatico sarà l'energia potenziale (cambiata di segno) divisa per la carica q che viene spostata; quindi, la differenza di potenziale sarà la differenza di energia potenziale (cambiata di segno) divisa per la carica q che viene spostata: Equivalentemente, la differenza di potenziale sarà uguale al lavoro fatto dalla forza elettrostatica diviso per la carica q che viene spostata.

Comunque, qui preferiamo definire il potenziale come quella funzione "la cui derivata spaziale è connessa al campo elettrico".L'ultima frase va meglio definita. Consideriamo per semplicità il campo elettrico di una carica puntiforme dato dalla relazione (218), e scriviamone la sola intensità (senza la parte vettoriale):

$$E(r) = \frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{Q}{r^2}.$$

Ora vediamo che la funzione

$$f(r) = \frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{Q}{r} \tag{243}$$

soddisfa alla proprietà che

$$E(r) = -\frac{df(r)}{dr};$$

infatti, se derivo $f(r)$ rispetto a r e cambio di segno ho

$$-\frac{df(r)}{dr} = -\frac{d(\frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{Q}{r})}{dr} = -\frac{Q}{4\ \pi\ \epsilon_0}\frac{d(\frac{1}{r})}{dr}$$

$$= -\frac{Q}{4\ \pi\ \epsilon_0}\left[-\frac{1}{r^2}\right] = \frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{Q}{r^2} \equiv E(r).$$

D'altra parte, sappiamo che la derivata di una costante C è nulla: $dC/dr = 0$. Allora, abbiamo che $E(r)$ è anche dato da

$$E(r) = -\frac{d(f(r) + C)}{dr} = -\frac{df(r)}{dr} - \frac{dC}{dr} = -\frac{dV(r)}{dr}.$$

Se chiamiamo *potenziale elettrostatico di una carica puntiforme* la funzione

$$V(r) = f(r) + C \equiv \frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{Q}{r} + C \tag{244}$$

dove C è una *costante arbitraria*, vediamo che conoscere il potenziale equivale a conoscere il campo elettrostatico perchè basta fare una derivata.

Ora, peró vediamo come possiamo scegliere una particolare costante C che sia "comoda": se mandiamo r all'infinito, vediamo che la funzione $f(r)$ tende a zero. Abbiamo allora, dalla (244)

$$\lim_{r\to\infty} V(r) \equiv V(\infty) = C\ . \tag{245}$$

Quindi: *la costante arbitraria C che compare nel potenziale elettrostatico di una carica puntiforme rappresenta il valore del potenziale a distanza infinita dalla carica.* Ne segue che *se fissiamo a zero il potenziale elettrostatico a* *distanza infinita della carica abbiamo* $C = 0$. In questo caso il potenziale elettrostatico di una carica puntiforme è dato dalla funzione $f(r)$, cioè

$$V(r) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r}\,. \tag{246}$$

C'è però un problema. Infatti, qualsiasi quantità che sia definita a meno di una costante arbitraria *non può essere una quantità fisica*; infatti, non ne possiamo misurare il valore che dipende da una C arbitraria e quindi è arbitrario. Tuttavia, *una differenza di potenziale non dipende dalla costante arbitraria* C; infatti, consideriamo due punti P_1 e P_2 a distanze dalla carica r_1 ed r_2, rispettivamente. Allora il potenziale in P_1 sarà

$$V(r_1) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r_1} + C,$$

mentre il potenziale in P_2 sarà

$$V(r_2) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r_2} + C,$$

e la differenza di potenziale $V(r_2) - V(r_1)$ sarà chiaramente

$$V(r_2) - V(r_1) = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_2} - \frac{Q}{r_1}\right],$$

indipendente dalla costante arbitraria C. Quindi: *una differenza di potenziale è una quantità fisica misurabile.*

Da quanto accennato all'inizio, la differenza di potenziale tra i due punti P_1 e P_2 calcolata precedentemente, moltiplicata per la carica, rappresenta il lavoro fatto dalla forza elettrica dovuta $\vec{F} = q\,\vec{E}$ per spostare la carica dal primo al secondo punto.

Il potenziale, che abbiamo introdotto per una carica puntiforme, può essere definito per *qualsiasi* distribuzione di carica e, quindi, per qualsiasi campo elettrostatico: per esempio, per un campo dovuto a più cariche puntiformi, o dovuto a distribuzioni continue di carica associate a densità superficiali o volumiche. Diamo allora la definizione generale di potenziale associato ad un campo qualsiasi $\vec{E}$. Per fare questo, però, è necessario prima illustrare il concetto di *derivata parziale di una funzione.*

Data una funzione $f(x, y, z)$ delle tre variabili spaziali x, y, z, otteniamo *derivata parziale della funzione* f *rispetto a* x come *derivando* f *rispetto a* x

e trattando le altre due variabili y e z come costanti. Per far capire la cosa, consideriamo la funzione

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Eseguiamo la derivata parziale di g rispetto a x, che indichiamo con

$$\frac{\partial g}{\partial x};$$

dovendo considerare y e z come costanti, anche $y^2 + z^2$ sarà una costante, e quindi la sua derivata rispetto a x sarà nulla:

$$\frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial x} = 0.$$

Allora la la derivata parziale rispetto a x darà

$$\frac{\partial g}{\partial x} \equiv \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial (y^2 + z^2)}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + 0;$$

poichè la derivata parziale di x^2, che non dipende da y e da z, coincide ovviamente con la normale derivata di x^2, ed è quindi uguale a $2\,x$, abbiamo

$$\frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x} = 2\,x.$$

Adesso possiamo definire il collegamento tra un campo elettrostatico generico $\vec{E}(x, y, z)$ ed il potenziale $V(x, y, z)$ ad esso associato:

Le componenti lungo gli assi X, Y, Z del vettore campo elettrico $\vec{E}$ sono date, rispettivamente, dalla derivata parziale rispetto a x del potenziale cambiata di segno, dalla derivata parziale rispetto a y del potenziale cambiata di segno, dalla derivata parziale rispetto a z del potenziale cambiata di segno.

Quindi abbiamo

$$\vec{E} \equiv (E_x, E_y, E_z) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right), \qquad (247)$$

oppure, equivalentemente,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ , \tag{248}$$

$$\tag{249}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ , \tag{250}$$

$$\tag{251}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ . \tag{252}$$

Come ulteriore esempio, facciamo vedere che questa relazione, applicata al potenziale della carica puntiforme (246), dà le tre componenti del campo elettrico della stessa carica puntiforme. Per fare questo conto dobbiamo però calcolare prima l'espressione delle tre componenti del campo elettrico. Ricordiamo che l'espressione del campo elettrico della carica puntiforme è

$$\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}\,\hat{r};$$

per poter procedere al conto, però, dobbiamo prima ricordare l'espressione del versore $\hat{r}$ che è

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r},$$

dove r denota il modulo del vettore $\vec{r}$. Adesso, ricordando che le componenti di $\vec{r}$ lungo gli assi sono

$$\vec{r} \equiv (x, y, z),$$

abbiamo quindi che le tre componenti di $\hat{r}$ sono

$$\hat{r} \equiv \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right);$$

di conseguenza le tre componenti del campo sono

$$(*)\ \vec{E} \equiv \left(\frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r^3}\,x, \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r^3}\,y, \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{r^3}\,z\right).$$

Adesso, per procedere con la verifica della (252) dobbiamo scrivere esplicitamente il modulo di $\hat{r} = r$ in termini di x, y, z; ricordando che il modulo di un vettore è la radice quadrata delle sue componenti, abbiamo

$$(**)\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ora eseguiremo la derivata parziale rispetto a x del potenziale (246), e mostreremo che tale derivata, cambiata di segno, è uguale alla prima componente x del campo elettrico la cui espressione abbiamo calcolato nella equazione $*$ contenuta sopra. Per eseguire la derivata dobbiamo usare la regola di derivazione delle funzioni composte; infatti, il potenziale V è funzione di r, che a sua volta è funzione di x, y, z. Abbiamo

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}.$$

Calcoliamo la prima derivata:

$$()\ \frac{dV}{dr} = \frac{Q}{4\ \pi\ \epsilon_0} \frac{d(\frac{1}{r})}{dr}$$

$$= \frac{Q}{4\ \pi\ \epsilon_0} \left[\frac{-1}{r^2}\right] = -\frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

Calcoliamo poi la seconda derivata:

$$\frac{\partial r}{\partial x} \equiv \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x};$$

anche qui dobbiamo usare la regola di derivazione delle funzioni composte, perchè dobbiamo derivare la radice rispetto a tutto il suo argomento $x^2 + y^2 + z^2$, e poi eseguire la derivata parziale dell'argomento rispetto a x:

$$\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2\ x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ricordando che $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$, possiamo scrivere

$$()\ \frac{\partial r}{\partial x} \equiv \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{r}.$$

Moltiplicando tra loro le derivate e e cambiando poi il segno, si ottiene la componente x del campo (vedi Eq. $*$); le altre due componenti si ricavano nello stesso modo.

Si noti che la relazione (252) ci dice che un potenziale costante genera un campo elettrico nullo, perchè le derivate di una costante rispetto a qualsiasi coordinata è zero. Usando questa informazione abbiamo:

la presenza di un campo elettrico diverso da zero in una regione di spazio genera una differenza di potenziale diversa da zero tra due punti diversi della regione,

e

se il campo elettrico è nullo in una regione di spazio, in quella regione il potenziale è costante.

D'altra parte, questo fatto non ci meraviglia perchè la differenza di potenziale, come abbiamo accennato prima, non è altro che il lavoro fatto dalla forza elettrostatica diviso per la carica, e la forza diviso la carica dà il campo elettrico.

Concludiamo introducendo l'unità di misura del potenziale. Dalla relazione tra campo e potenziale vediamo che il potenziale è il rapporto tra un campo elettrico e una lunghezza, quindi $[V] = [E\ l^{-1}]$; allora, poichè il campo ha le dimensioni di forza diviso carica, abbiamo

$$[V] = [E\ l] = [F\ q^{-1}\ l]. \tag{253}$$

Nel sistema MKSQ abbiamo allora che il potenziale si può misurare in Newton diviso per il prodotto di un Coulomb per un metro. Tuttavia, si preferisce introdurre per il potenziale un'unità di misura apposita, chiamata *Volt* (che indicheremo con V). Per definire il Volt ricordiamo che abbiamo detto che la differenza di potenziale moltiplicata per la carica è uguale al lavoro fatto per spostare la carica; allora diamo la seguente definizione:

un Volt è la differenza di potenziale che moltiplicata per la carica di un Coulomb dà un lavoro pari ad un Joule.

In formula: $1V = 1C \cdot 1J$. Avendo definito il Volt, si preferisce poi esprimere in termini di questa quantità anche il campo elettrico. Le dimensioni del campo elettrico, come abbiamo visto sono quelle di potenziale diviso lunghezza, in MKSQ abbiamo che il campo si può misurare in Volt diviso metri (V/m). Da ora in poi adotteremo queste unità.

8.6 Capacità, condensatore

Capacità di un conduttore isolato

Consideriamo un conduttore isolato di forma qualsiasi. Abbiamo visto in precedenza che in un conduttore in condizioni elettrostatiche:
1) il campo elettrico nell'interno del conduttore è zero,

2) le cariche si dispongono sulla superficie,

3) il campo elettrico sulla superficie non è nullo, ma è perpendicolare alla superficie in ogni punto.

Dal punto 1), e dal fatto che abbiamo visto che un campo nullo corrisponde ad un potenziale costante, abbiamo:

in condizioni elettrostatiche all'interno di un conduttore il potenziale è costante, cioè il potenziale assume lo stesso valore in tutti i punti all'interno di un conduttore.

In realtà, anche sulla superficie del conduttore il potenziale deve essere costante; infatti, se il potenziale avesse due valori diversi in due punti della superficie del conduttore allora la differenza di potenziale, e quindi il campo elettrico non nullo tangente alla superficie, così creatasi farebbe muovere le cariche lungo la superficie del conduttore, contraddicendo le in condizioni elettrostatiche. D'altra parte, il potenziale non può essere diverso in un punto all'interno rispetto ad un punto sulla superficie; infatti, siccome i punti interni possono essere arbitrariamente vicini alla superficie, se il potenziale all'interno fosse diverso da quello sulla superficie allora, come funzione delle coordinate x, y, z, dovrebbe fare un brusco salto, cioè non potrebbe essere una funzione *continua.* Ma noi sappiamo che una funzione discontinua in un punto in quel punto non possiede derivata; quindi, il campo elettrico, che è definito tramite derivate del potenziale, non potrebbe essere definito in alcuni punti, il che non è possibile dal punto di vista fisico. A questo punto, poichè abbiamo concluso che sia all'interno del conduttore che sulla sua superficie il potenziale è costante, possiamo affermare che:

in condizioni elettrostatiche il potenziale assume lo stesso valore in tutti i punti di un conduttore.

Possiamo quindi parlare ora di *potenziale di un conduttore*, intendendo con questo il valore comune che il potenziale assume in tutti i punti del conduttore.

Adesso consideriamo un conduttore caricato con una carica totale Q, e che possiede un potenziale V. Ci domandiamo: che relazione cè tra la carica Q e il potenziale V? Dall'espressione (244) del potenziale della carica puntiforme vediamo che, almeno in questo caso, la carica e il potenziale sono *proporzionali*; si può però verificare che questo fatto *vale in generale, per qualsiasi distribuzione di carica.* Allora, anche per un conduttore Q e V sono proporzionali; quindi, il loro rapporto non potrà dipendere dai loro particolari valori, perchè se raddoppia la carica raddoppia anche il potenziale, se triplica la carica triplica anche il potenziale ecc., e quindi il rapporto non cambia. Sembra quindi naturale definire la *capacità* C di un conduttore proprio come il rapporto tra carica e potenziale

$$C \doteq \frac{Q}{V}. \tag{254}$$

Possiamo affermare che:

la capacità di un conduttore non dipende nè dalla carica nè dal potenziale del conduttore, ma solo dalla sua forma e dalle sue dimensioni.

L'unità di misura della capacità si ricava dalla sua definizione (254): $1C/1V$. Come al solito, si preferisce dare un nome apposito, *Farad* (simbolo: F), a questa unità; definiamo quindi il Farad come:

$$1\ F \doteq \frac{1\ C}{1\ V}, \tag{255}$$

Il problema ora è che abbiamo visto che il Coulomb è una carica troppo grande; e sappiamo che il Volt è invece una differenza di potenziale abbastanza piccola (infatti, la tensione in ogni casa è 220 V). Ci aspettiamo quindi che il rapporto tra queste due quantità sia *troppo grande*. Per verificare questo fatto, calcoliamo esplicitamente la capacitŝ di un conduttore *sferico* di raggio R. Sappiamo che la carica è distribuita sulla superficie che, in questo caso, è una sfera. Sappiamo anche che, per simmetria, la densità superficiale di carica σ sarà *costante*. Ancora, sappiamo che il valore del potenziale è lo stesso in ogni punto del potenziale; quindi, per calcolare il potenziale del conduttore ci conviene scegliere il punto più "conveniente", che è quello equidistante da tutti i punti della superficie, cioè il centro del conduttore sferica. Per calcolare il potenziale nel centro usiamo la solita tecnica: dividiamo la superficie della sfera in N "piccolissime" superfici ΔS_i $(i = 1, ..., N)$; su ogni superficie sarà concentrata una carica "elementare"

$$\Delta q_i = \sigma \, \Delta S_i$$

che può essere considerata puntiforme. Abbiamo quindi N cariche puntiformi $\Delta q_i \quad , \quad i = 1, ..., N$, e dobbiamo calcolare il potenziale generato da queste cariche nel centro del conduttore sferico. Poichè tutte le cariche Δq_i, stando sulla superficie, hanno la stessa distanza R dal centro della sfera, il potenziale V_i generato da ciascuna di esse è dato da

$$V_i = \frac{1}{4 \, \pi \, \epsilon_0} \, \frac{\Delta q_i}{R} = \frac{1}{4 \, \pi \, \epsilon_0} \, \frac{\sigma \Delta S_i}{R}.$$

Ovviamente, il potenziale totale generato dalle N cariche è la somma di tutti i potenziali V_i, e quindi

$$\begin{aligned} V = \sum_{i=1,\ldots,N} V_i &= \sum_{i=1,\ldots,N} \frac{1}{4 \, \pi \, \epsilon_0} \frac{\sigma \Delta S_i}{R} \\ &= \frac{1}{4 \, \pi \, \epsilon_0} \, \frac{\sigma}{R} \sum_{i=1,\ldots,N} \Delta S_i, \end{aligned}$$

dove abbiamo portato fuori dalla sommatoria le quantità costanti. Poichè, ovviamente, la somma $\sum_{i=1,\ldots,N} \Delta S_i$ di tutte le superfici elementari dà la superficie totale della sfera S $(= 4 \, \pi \, R^2)$, e il prodotto della densità di carica costante σ per la superficie totale S dà la carica totale Q, abbiamo

$$V = \frac{1}{4 \, \pi \, \epsilon_0} \, \frac{\sigma \, S}{R} = \frac{1}{4 \, \pi \, \epsilon_0} \, \frac{Q}{R}.$$

Adesso possiamo calcolare la capacità:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{Q}{R}} = 4\,\pi\,\epsilon_0\,R. \qquad (256)$$

Essendo il raggio l'unica caratteristica geometrica del conduttore sferico, la sua capacità non può che dipendere solo da R.

Per mostrare che il Farad è troppo grande, andiamo a calcolare quanto deve essere il raggio del conduttore per ottenere questa capacità; imponiamo quindi

$$4\,\pi\,\epsilon_0\,R = 1\,F,$$

e ricaviamo R mettendo anche i valori numerici di π e di ϵ_0:

$$R = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \approx 10^{10}\,m.$$

Quindi, per ottenere una sfera della capacità di un Farad, il raggio deve essere di dieci miliardi di metri, cioè dieci milioni di chilometri!. Allora, la capacità di un conduttore sferico "ragionevole" (con raggio che va dal centimetro al metro) dovrà essere da $10-12$ a $10-10$ volte più piccola del Farad. Si introducono quindi le seguenti capacità:

- il *picofarad* pF con valore $1\,pF = 10-12\,F$;

- il *nanofarad* nF con valore $1\,nF = 10-9\,F$;

- il *microfarad* μF con valore $1\,\mu F = 10-6\,F$.

Si noti che per arrivare ad un microfarad un conduttore sferico non va bene, perch'e dovrebbe avere un raggio di $10^{-4}\,m$ (un decimo di millimetro). Peró vedremo tra poco che possiamo costruire sistemi che permettono di ottenere capacità più elevate: i *condensatori*.

Il fenomeno dell'induzione elettrostatica

Supponiamo di avere due conduttori, e supponiamo che sul primo conduttore ci sia una carica positiva, mentre il secondo conduttore sia scarico. In realtà, il secondo conduttore apparirà scarico perchè le cariche microscopiche a livello atomico (elettroni, carica del nucleo) saranno "mischiate" in modo tale che a livello macroscopico la carica risulterà nulla. Supponiamo ora di avvicinare i due conduttori. Allora, la carica del primo conduttore eserciterà la forza di Coulomb sulle cariche microscopiche del secondo conduttore; avendo supposto positiva la carica del primo conduttore, essa attirerà le cariche negative (gli elettroni), e respingerà le cariche positive (quelle dei nuclei) del secondo conduttore. Poichè nei conduttori le cariche si possono spostare, le cariche negative si sposteranno verso il primo conduttore, e si fermeranno sulla superficie del secondo conduttore più vicina al primo conduttore. Le cariche positive dovrebbero spostarsi verso la parte più lontana dal primo conduttore; si può mostrare però che nei conduttori si spostano solo una parte delle cariche negative (elettroni di conduzione. Tuttavia, essendosi spostatialcuni elettroni dalla parte più lontana a quella più vicina, nella parte più lontana si crea un difetto di carica negativa, e quindi una carica positiva. In conclusione, avvicinando un conduttore carico positivamente ad un altro conduttore inizialmente scarico, quest'ultimo acquista una carica negativa sulla parte della sua superficie più vicina al primo conduttore, ed una carica positiva sulla parte della sua superficie più lontana dal primo conduttore

Se il primo conduttore (quello carico) ha invece una carica negativa, questa respingerà gli elettroni di conduzione del secondo conduttore verso la superficie più lontana; si creerà allora una carica negativa sulla superficie più lontana, e conseguentemente una carica positiva su quella più vicina.

Possiamo quindi affermare che:

avvicinando un conduttore carico ad un conduttore scarico, su quest'ultimo verrà a crearsi una carica di segno opposto a quella del primo conduttore sulla superficie più vicina a quest'ultimo, ed una carica dello stesso segno del primo conduttore sulla superficie più lontana.

Questo fenomeno prende il nome di *induzione elettrostatica*, e le due cariche sulle superfici del secondo conduttore prendono il nome di *cariche indotte*. Naturalmente, le due cariche indotte (positiva e negativa) sono uguali in modulo, perchè la loro somma deve essere nulla; infatti, essendo il conduttore scarico all'inizio, ed essendoci stata solo una semplice separazione delle cariche, anche dopo la carica totale deve rimanere nulla.

Ci si può domandare quanto valgono le cariche indotte; il problema è che il loro valore dipende dalla forma dei due conduttori e dalla loro disposizione relatia nello spazio. È quindi molto complicato, in generale, calcolare questo valore. Vedremo perà tra poco che in un caso particolare, ma importante, questo calcolo è possibile.

Strato e doppio strato

Consideriamo un conduttore che sia un parallelepipedo (una "lastra") che abbia come base un quadrato di lato L, e spessore pari a d. Supponiamo ora di caricare il conduttore; la carica si distribuirà allora sulle superfici di base quadrate di lato L, e sulle quattro superfici laterali che sono quadrati di base L e altezza d.

Supponiamo ora che sia soddisfatta la condizione

$$d << L,$$

cioè che lo spessore del conduttore sia sostanzialmente trascurabile rispetto al lato delle sue basi. Allora possiamo considerare il conduttore come una "sfoglia" o *strato*, di forma quadrata, di spessore nullo, e dotato di carica su entrambi i lati della sua superficie. La distibuzione di carica del conduttore genererà ovviamente un campo elettrico nei punti dello spazio ad esso circostanti. Ora noi ricorriamo ad un'altra approssimazione. Supponiamo, infatti, di considerare un punto P vicino al conduttore, che stia sulla retta perpendicolare al conduttore e passante per il centro del quadrato di base ("asse" del conduttore). Supponiamo poi anche che la distanza δ del punto P dal conduttore sia molto piccola rispetto al lato L del conduttore:

$$\delta << L.$$

Allora, possiamo approssimare il conduttore con un piano; praticamente, possiamo considerare L di lunghezza "infinita". Chiameremo questo sistema *strato piano* (carico). In realtà, questa approssimazione è ancora valida anche per punti dello spazio, sempre a distanza molto piccola, ma che non stiano proprio sull'asse, purchè però siano abbastanza lontani dal bordo del conduttore.

Se abbiamo uno strato piano, possiamo calcolare esattamente il campo elettrostatico generato dalla distribuzione di carica. Innanzitutto, lacarica è distribuita sulla superficie dello strato; quindi, avremo una densità superficiale di carica. D'altra parte, essendo lo strato infinito, per *simmetria* la densità di carica, che indicheremo con *sigma*, dovrà essere *costante*.

Adesso vediamo come la simmetria di strato piano infinito ci permetta di avere alcune indicazioni anche sul campo elettrico generato. Supponiamo che lo strato sia disposto in verticale. Poniamo un osservatore in un punto posto di fronte allo strato ad una certa "quota"; poi spostiamo, senza che se ne accorga, l'osservatore in un altro punto che stia dalla stessa parte dello strato del primo punto (per sempio a sinistra), sia alla stessa distanza dallo strato del primo punto, ma ad una "quota" diversa da quella del primo punto (cioè più in basso o più in alto). Poichè lo strato in tutte e due i punti si estende all'infinito in tutte le direzioni, e la densità di carica è costante, l'osservatore non è in grado di distinguere i due punti. Questo rimane vero anche se il secondo punto è spostato i una direzione qualsiasi (anche non in verticale) rispetto al secondo punto. Allora, anche la quantità fisica associata al sistema, cioè il campo elettrico, deve essere tale da non permettere di distinguere due qualsiasi punti. Sicuramente allora il modulo del campo deve essere lo stesso in qualsiasi punto. Inoltre, non è difficile capire che la direzione del campo deve essere *perpendicolare* allo strato in ogni punto. Infatti, dato un punto, dividiamo lo strato in tante superfici elementari uguali tra loro, e indichiamo il loro valore comune con ΔS. Le superfici uguali conterrano cariche elementari, praticamente puntiformi, il cui valore comune è dato da $\Delta q = \sigma \ \Delta S$. Allora il punto P è in presenza di tante cariche puntiformi uguali di valore Δq poste sullo strato. Supponiamo ora di chiamare Q la proiezione perpendicolare sullo strato di P, e di fissare una retta sullo strato che passi per Q; allora, per ogni carica puntiforme di valore Δq che stia su questa retta ad una certa distanza da Q esiste un'altra carica puntiforme dello stesso valore che sta sulla retta dalla parte opposta dalla prima carica rispetto a Q, ed alla stessa distanza della prima carica da Q. Si vede subito che la somma vettoriale dei due campi elementari generati dalle due cariche conserva solo la componente lungo la direzione perpendicolare allo strato perchè le componenti parallele allo strato dei caaampi delle due cariche sono uguali in modulo ma opposte in verso, e quindi si elidono. Poichè il campo totale è la somma di tutti i campi elementari, e poichè possiamo eseguire la somma per coppie di cariche del tipo appena considerato, sopravvive solo un campo perpendicolare allo strato.

Adesso facciamo un'altra considerazione. Consideriamo due punti, il primo posto a sinistra dello strato, il secondo posto a destra. È chiaro che i due punti vedono esattamente la stessa distribuzione di carica e, di conseguenza, il campo deve avere lo stesso modulo sui due punti, oltre ovviamente ad avere direzione perpendicolare allo strato.

In conclusione abbiamo che il modulo del campo deve essere uniforme, deve avere lo stesso valore a destra ed a sinistra dello strato, e che la direzione del campo deve essere perpendicolare allo strato. Ci rimane da discutere il verso.

IL verso del campo elettrico generato da una carica Q in un punto P si ottiene nel modo seguente. Supponiamo di mettere nel punto P una *carica di prova positiva* q; allora, il verso del campo elettrico generato dalla carica Q in P è uguale al verso della forza che Q esercita sulla carica di prova q. Quindi, se Q è positiva respinge q (che è anch'essa positiva), e quindi il verso del campo è quello che si allontana da Q; se Q è negativa attrae q, e quindi il verso del acmpo è quello che va verso Q.

Adesso torniamo allo strato e supponiamo, per fissare le idee, che la carica sullo strato sia positiva. Allora, se consideriamo un punto a sinistra dello strato, il verso del campo, secondo il nostro criterio, deve essere quello che si allontana dallo strato, e quindi la freccetta del campo punta verso *sinistra*. Se ora, invece, consideriamo un punto a destra dello strato, il verso del campo deve ancora essere quello che si allontana dallo strato e, quindi, la freccetta del campo punta verso *destra*. In conclusione, il verso del campo elettrico nei punti a destra dello strato deve essere *opposto* al verso del campo elettrico nei punti a destra dello strato.

Adesso, se la carica sullo strato è negativa, allora il verso del campo nei punti a sinistra dello strato dve essere quello che si avvicina allo strato, e quindi la freccetta del campo punta verso *destra*. IL verso del campo nei punti a destra dello strato deve ancora essere quello che si avvicina allo strato e, quindi, la freccetta del campo punta verso *sinistra*. Anche in questo caso i versi a destra e a sinistra dello strato devono essere opposti,

Ricapitolando, possiamo allora affermare che:

il campo elettrico generato da uno strato piano carico ed infinito ha lo stesso modulo costante in tutti i punti a destra e a sinistra dello strato, ha direzione perpendicolare allo strato in ogni punto, ed ha versi opposti a destra e a sinistra dello strato.

Adesso non ci rimane che calcolare il modulo del campo generato dallo strato. A questo scopo useremo il Teorema di Gauss applicato ad una superficie chiusa "elementare" di forma cilindrica vedi l'ultimo argomento della

Lezione 9). consideriamo allora una superficie chiusa elementare ΔS_c costituita da un cilindretto di basi ΔS_1 e ΔS_2, e da una superficie laterale ΔS_L. Scegliamo le basi *parallele allo strato*, e disposte una a sinistra dello strato (ΔS_1) e una a destra delo strato (ΔS_2). Essendo le superfici di base parallele allo strato, la superficie ΔS_L risulterà perpendicolare allo strato; essa poi "ritaglierà" sullo strato una superficie ΔS_σ *che avrà la stessa area delle due superfici di base.* Applichiamo il teorema di Gauss alla superficie del cilindretto, ottenendo

$$\Delta\Phi_\Delta S_c = \frac{\Delta q_{tot}}{\epsilon_0},$$

dove $\Delta\Phi_\Delta S_c$ indica il flusso totale (elementare) atttraverso la superficie ΔS_c del cilindretto, e $Deltaq_{tot}$ è la carica totale (elementare) racchiusa nel cilindretto. Calcoliamo innanzitutto $\Delta\Phi_\Delta S_c$; alla fine della Lezione 9 abbiamo visto che

$$\Delta\Phi_{\Delta c} = \vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 \, |\Delta S_1| + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 \, |\Delta S_2| + \vec{E}_L \cdot \hat{n}_L \, |\Delta S_L|,$$

dove $|\Delta S_1|, |\Delta S_2|, |\Delta S_L|$ indicano le aree delle tre superfici. Denotiamo ora con ΔA l'area comune delle tre superfici ΔS_1, ΔS_2 ($|\Delta S_1| = |\Delta S_2| = \Delta A$), ΔS_σ; dnotiamo poi con E il modulo del campo elettrico in un punto vicino allo strato, valore che abbiamo visto essere lo stesso sia a sinistra che a destra dello strato, e quindi sia sui punti di ΔS_1 che sui punti di ΔS_2: $|E_1| = |E_2| = E$. Adesso esaminiamo le direzioni ed i versi dei vettori $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$, e dei versori $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$ delle due basi. Supponiamo, per fissare le idee, che la densità di carica sullo strato sia positiva; abbiamo allora visto che il campo elettrico a sinistra dello strato (cioè $\vec{E}_1$) ha verso che punta a sinistra, mentre il campo elettrico a destra dello strato (cioè $\vec{E}_2$) ha verso che punta a destra. Ambedue i campi sono perpendicolari allo strato. D'altra parte i versori $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$, essendo perpendicolari alle basi che, a loro volta, sono parallele allo strato, risultano anch'essi perpendicolari allo strato; di conseguenza la loro direzione è parallela a quella di $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$. Per quanto riguarda i versi di $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$, secondo la nostra convenzione devono essere tali che i versori puntano verso l'esterno della superficie chiusa; quindi, $\hat{n}_1$ ha verso che punta a sinistra, ed $\hat{n}_2$ ha verso che punta a destra. Confrontando versi e direzioni dei vettori abbiamo allora la seguente situazione:

- il vettore $\vec{E}_1$ e il versore $\hat{n}_1$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso (puntano verso sinistra);

- il vettore $\vec{E}_2$ e il versore $\hat{n}_2$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso (puntano verso destra).

Abbiamo quindi

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 = |\vec{E}_1| \cdot |\hat{n}_1| \cdot \cos\ 0° = |\vec{E}_1| = E,$$

$$\vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 = |\vec{E}_2| \cdot |\hat{n}_2| \cdot \cos\ 0° = |\vec{E}_2| = E.$$

Ricordando poi che $|\Delta S_1| = |\Delta S_2| = \Delta A$, abbiamo che il flusso totale attraverso le due basi è

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1\ |\Delta S_1| + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2\ |\Delta S_2| = E \cdot \Delta A + E \cdot \Delta A = 2\ E \cdot \Delta A.$$

Riamne da calcolare il flusso $\vec{E}_L \cdot \hat{n}_L\ |\Delta S_L|$ attraverso la superficie laterale; ma abbiamo visto che la direzione del campo sia a destra che a sinistra è perpendicolare allo strato, e quindi è *parallela* alla superficie S_L (essendo quest'ultima anch'essa perpendicolare allo strato. Quindi, il flusso attraverso la superficie laterale del campo è *nullo*:

$$\vec{E}_L \cdot \hat{n}_L\ |\Delta S_L| = 0.$$

Il flusso totale è allora

$$\Delta\Phi_{\Delta c} = 2\ E \cdot \Delta A.$$

Adesso calcoliamo la carica totale interna Δq_{tot}. Poichè la carica è concentrata sulla superficie dello strato, la carica interna al cilindro è quella che sta sulla superficie ΔS_σ ritagliata dal cilindretto sulla superficie dello strato; tale carica ovviamente vale (ricordando che anche l'area di ΔS_σ é uguale a ΔA)

$$\Delta q_{tot} = \sigma \cdot |\Delta S_\sigma| = \sigma \cdot \Delta A.$$

A questo punto possiamo uguagliare i due membri del teorema di Gauss:

$$2\ E \cdot \Delta = \sigma \cdot \Delta A,$$

cioè, dividendo ambedue i membri per ΔA,

$$2\ E = \sigma.$$

Da questa relazione otteniamo che il modulo del campo elettrico dello strato (sia a sinistra che a destra) vale

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{257}$$

Esercizio 8.5): Calcolare il modulo del campo elettrostatico di uno strato piano di densità superficiale di carica $\sigma = 2 \cdot 10^{-6}\ C\ m^{-2}$.
Soluzione: Il modulo del campo è

$$E = \frac{\sigma}{2\ \epsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8.859 \cdot 10^{-12}}\ V/m \approx 0.11 \cdot 10^6\ V/m.$$

Esercizio 8.6): Calcolare la densità superficiale di carica di uno strato piano che genera un campo elettrostatico di modulo $E = 0.5 \cdot 10^5\ V/m$.
Soluzione: Ricavando la sensità abbiamo

$$\sigma = 2 \cdot \epsilon_0 \cdot E = 2 \cdot 8.859 \cdot 10^{-12} \cdot 0.5 \cdot 10^5 = 8.859 \cdot 10^{-7}\ C\ m^{-2}.$$

Esercizio 8.7): Una lastra di lato $L = 1\ m$ e dello spessore $d = 0.3\ mm$ è caricato con una carica totale $Q = 4 \cdot 10^{-5}\ C$. Calcolare il modulo del campo elettrostatico generato dalla lastra sul suo asse a distanza $\delta = 2\ mm$.
Soluzione: Lo spessore d della lastra è trascurabile rispetto al lato, quindi la lastra si può approsimare con una sfoglia di spessore nullo. Inoltre, la distanza δ soddisfa la condizione $\delta << L$; quindi la sfoglia si può approsimare con uno strato piano (infinito). Per calcolare il campo dobbiamo prima calcolare la densità superficiale di carica dello strato. La superficie della lastra è

$$S = L^2 = 1\ m^2;$$

allora

$$\sigma = \frac{Q}{S} = 4 \cdot 10^{-5}\ C/m^2.$$

Il modulo del campo elettrostatico è

$$E = \frac{\sigma}{2\ \epsilon_0} = \frac{4 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 8.859 \cdot 10^{-12}}\ V/m \approx 0.45 \cdot 10^7\ V/m.$$

Adesso passiamo a considerare due conduttori quadrati di lato L e di spessore trascurabile d; supponiamo che i due conduttori siano tra loro paralleli e indichiamo con δ la distanza costante tra loro.

Supponiamo, per fissare le idee che il primo conduttore sia posto a destra del secondo conduttore, e supponiamo di caricare positivamente il primo conduttore; allora esso, per il fenomeno dell'induzione elettrostatica, indurrà sul secondo conduttore una carica negativa nella parte ad esso più vicina (la base dellla seconda lastra conduttrice che affaccia verso il primo conduttore), ed una carica positiva nella parte ad esso più lontana (la base dellla seconda lastra conduttrice più lontana dal primo conduttore). È possibile inoltre fare in modo che la carica positiva che si trova sulla faccia esterna del secondo conduttore (quello sul quale la carica è stata indotta) venga eliminata scaricandola con un filo conduttore; analogamente può essere scaricata la carica sulla faccia esterna del primo conduttore. Le cariche rimaste sono quindi positiva per il primo conduttore e negativa per il secondo conduttore.

Adesso supponiamo che sia soddisfatta la condizione

$$\delta << L;$$

allora sicuramente ogni punto che si trova tra i due conduttori ha distanza da ambedue minore di delta, e quindi possiamo approssimare i due conduttori con due strati piani infiniti tra loro paralleli. Sappiamo che ognuno di questi strati ha densità superficiale di carica costante; uno (quello inducente) ha densità di carica positiva, l'altro (quello che subisce l'induzione) ha densità di carica negativa. D'altra parte, essendo gli strati infiniti e tra loro paralleli, *per simmetria le due densità di carica devono essere uguali in modulo, e opposte in segno.* Quindi, se indichiamo con σ la densità di carica dello strato caricato positivamente, $-\sigma$ è la densità di carica dello strato caricato negativamente. In questo caso diciamo che abbiamo realizzato una condizione di *induzione totale.*

Questo dispositivo realizza il dispositivo che prende il nome di *condensatore piano*.

Adesso, per i nostri scopi, dobbiamo calcolare il campo elettrostatico generato dal doppio strato piano. Si noti che i due strati piani paralleli dividono lo spazio in tre zone: due zone esterne (una a sinistra del secondo strato, una a destra del primo strato) che chiameremo *zona 1* e *zona 3*, ed una zona interna compresa tra i due strati che chiameremo *zona 2*. Sappiamo, dalla discussione sul singolo strato che ambedue gli strati generano in ogni punto un campo elettrico costante, con lo stesso modulo per tutti e due, modulo pari al modulo dela carica diviso la costante dielettrica del vuoto ($E = \sigma/(2\ \epsilon_0)$). Il verso del campo, però dipende dal segno della densit'a di carica. Il campo totale in ogni punto è uguale alla somma vettoriale dei due campi; quindi, se in un punto i due campi hanno verso concorde, poichè il modulo di ognuno dei due è pari a E, il camo totale sarà uguale a $2\ E = 2 \cdot [\sigma/(2\ \epsilon_0)] = \sigma/\epsilon_0$. Se invece i due campi hanno verso opposto il campo totale sarà $E - E = 0$, cioè nullo.

Adesso esaminiamo i versi dei due campi nelle tre regioni. Un punto della regione 1 sta a sisnistra rispetto ad ambedue gli strati. Abbiamo già visto che lo strato caricato positivamente genera nei punti alla sua sinistra un campo la cui "freccetta" punta verso *sinistra*, prechè la carica positiva dello strato tende a respingere e quindi ad *allontanare verso sinistra* una carica di prova positiva posta alla sua sinistra. Lo strato negativo, invece, tende ad attrarre e quindi ad *avvicinare* una carica positiva di prova posta nel punto: se questa carica di prova è posta in un punto a sinistra dello strato, per farla avvicinare allo strato il campo elettrico deve avere la "freccetta" rivolta verso *destra*. Ne concludiamo che nella regione 1 i due campi generati dagli strato ahnno tra loro verso *opposto*: quindi, il campo totale nella regione 1 è *nullo*. Con un ragionamento simile si può mostrare che anche nell'altra regione esterna 3 il campo è nullo. Vediamo invece cosa succede nella regione interna 2 tra i due strati. Un punto nella regione 2 sarà a sinistra del primo strato (caricato positivamente), e a destra del secondo strato (caricato negativamente). Nei punti a sinistro dello strato positivo, come abbiamo visto, la freccetta del campo da questo generato punta verso sinistra; nei punti a destra dello strato negativo la carica negativa attira la carica di prova positiva verso sinistra, e quindi il campo generato dallo strato negativo avrà anch'esso la freccetta che punta verso sinistra. Quindi, nella zona due i due campi generati dai due strati hanno verso concorde, e quindi il campo totale avrà modulo dato, come detto prima, da

$$E_{ds} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \ . \tag{258}$$

Inoltre, sappiamo che la direzione di questo campo, come quello dei due campi che lo compongono, è perpendicolare alle superfici degli strati; il verso è quello che va dallo strato positivo allo strato negativo.

Riassumendo, possiamo affermare:

un doppio strato genera al suo interno un campo elettrico uniforme, diretto perpendicolarmente agli strati, con verso che va dallo strato positivo allo strato negativo, e di modulo pari a σ/ϵ_0. Nelle regioni ad esso esterne un doppio strato genera un campo elettrico nullo.

Il condensatore piano

Abbiamo già detto che il doppio strato realizza un *condensatore piano*; di fatto quindi un condensatore piano si realizza con due lastre quadrate di spessore trascurabile, poste a distanza molto piccola rispetto alla lunghezza del lato delle lastre, e che si trovano in una condizione di induzione totale.

Ma qual'è l'utilità di un condensatore? La risposta a questa domanda è che un condensatore è un dispositivo in grado di aumentare di molto la capacità di immagazzinare carica rispetto ad un conduttore isolato. Il concetto è che nella definizione di capacità il potenziale del conduttore compare al denominatore; quindi, se si riesce ad estendere la definizione di capacità sostituendo nel denominatore il potenziale del singolo conduttore con qualche quantità più *piccola*, la capacità aumenta. Nel condensatore, avendo a disposizione due conduttori con carica opposta invece di un solo conduttore, possiamo sostituire il potenziale del singolo conduttore con la *differenza di potenziale tra i due conduttori* che sicuramente è più piccola contenendo una sottrazione.

Definiamo allora la capacità di un condensatore:

la capacità C di un condensatore è pari alla carica totale Q concentrata sullo strato positivo divisa per la differenza di potenziale $\Delta V = V_1 - V_2$ tra i punti dello strato carico negativamente e quelli dello strato carico positivamente.

In formula

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \ . \tag{259}$$

Nella definizione V_1 denota il potenziale dello strato negativo, e V_2 denota il potenziale dello strato positivo. Si noti anche, prima di procedere ulteriormente, che le cariche totali sui due strati sono il prodotto del modulo densità superficiale di carica per la superficie delle piastre; essendo le densità di carica uguali in modulo, ed essendo uguali le superfici delle due piastre, le due cariche totali sugli strati sono uguali in modulo. La carica totale sullo strato positivo rappresenta allora questo modulo.

Avendo a disposizione la definizione (259) di capacità di un condensatore, vogliamo ora calcolarla per un condensatore piano. Innanzitutto, dobbiamo calcolare la differenza di potenziale ΔV. Essendo il campo elettrico costante tra i due strati, questo conto è semplice. Infatti, innanzitutto la direzione del campo è costante (perpendicolare alle piastre); quindi, se scegliamo un sistema di riferimento con l'asse X coincidente con questa direzione, il campo avrà solo la componente E_x (le altre componenti saranno nulle). Scegliamo poi l'origine dell'asse X sullo strato caricato negativamente (quello che sta a sinistra). Allora vediamo che la coordinata lungo X del secondo strato sarà pari alla distanza δ tra gli strati. Adesso ricorriamo alla relazione (252) che lega campo e potenziale. Naturalmente, essendo diversa da zero, a causa dela nostra scelta di riferimento, solo E_x, ci serve solo la prima delle tre relazioni che riscriviamo scambiando i membri, e scambiandone il segno

$$(*)\ \frac{dV}{dx} = -E_x.$$

Qui abbiamo sostituito la derivata parziale con quella totale perchè sopravvive solo la variabile x.

Il campo è costante; quindi, a parte il segno, il problema è quello di trovare una funzione la cui derivata prima sia costante. Ma abbiamo già visto, nell'ambito della cinematica, che *la funzione che ha derivata costante rispetto ad una variabile è un polinomio del primo ordine rispetto alla variabile*. Infatti, se consideriamo $P_1(x) = K\ x + K^{'}$ (dove K e $K^{'}$ sono due costanti) abbiamo

$$\frac{dP_1(x)}{dx} = K + 0 = K,$$

cioè la derivata prima di P_1 è la costante K. Quindi $f(x) = P_1(x) = K\ x + K^{'}$ (con $K^{'}$ arbitraria) è la soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{df(x)}{dx} = K.$$

Notiamo che l'Eq.(*) è proprio di questa forma, con $f(x) = V(x)$ e $K = -E_x$; allora la soluzione della (*) è

$$(**)\ V(x) = -E_x\, x + K^{'}$$

con $K^{'}$ costante arbitraria.

Adesso noi sappiamo che E_x coincide proprio col campo all'interno dello strato. Il modulo di questo campo è σ/ϵ_0; il suo verso va dallo strato positivo a quello negativo, e quindi *da destra verso sinistra.* Ma il nostro asse X è orientato dallo strato negativo a quello positivo, e quindi *da sinistra verso destra.* Il verso del campo è quindi *opposto* a quello dell'asse X; allora, il campo avrà sgno negativo e sarà dato da

$$E_x = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

sostituendo questo valore nella (**), otteniamo per il potenziale la soluzione

$$(***)\ V(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, x + K^{'}.$$

Noi però dobbiamo calcolare la differenza di potenziale tra i due strati; nella differenza, come già sappiamo, la costante arbitraria $K^{'}$ scompare. Inoltre, poichè il potenziale dipende linearmente da x, l'incremento ΔV del potenziale dipende linearmente dall'incremento Δx di x:

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, \Delta x.$$

Nel nostro caso Δx è l'incremento di x quando ci si sposta dallo strato negativo a quello positivo, cioè nient'altro che la distanza δ tra i due strati:

$$\Delta x = \delta.$$

Allora la differenza di potenziale ΔV vale

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, \delta.$$

Adesso procediamo a calcolare la capacità (259). La carica totale Q è uguale alla densità di carica σ moltiplicata per la superficie S delle piastre (che ovviamente è approssimata con un piano infinito solo per il calcolo del campo):

$$Q = \sigma\ S.$$

Sostituendo questa espressione e quella della differenza di potenziale nell'Eq. (259) otteniamo infine la capacità del condensatore piano:

$$C = \frac{\sigma\ S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0}\ \delta} = \sigma\ S \cdot \frac{\epsilon_0}{\sigma\ \delta} = \epsilon_0\ \frac{S}{\delta}\ . \tag{260}$$

Qui si vedono due cose. La prima è che la capacità del condensatore, dipende solo, come deve essere, dalle caratteristiche geometriche del condensatore (superficie delle piastre e distanza tra loro), e dal mezzo tra le piastre (costante dielettricadel vuoto). La seconda è che costruendo le piastre con superficie grande e distanza piccola la capacità può essere sensibilmente più grande di quella di un condensatore isolato.

Facciamo un esempio numerico. Supponiamo di costruire un condensatore con piastre di lato $L = 20\ cm$, e distanza $\delta = 1\ mm$. Trasformiamo tutto in metri: $L = 2 \cdot 10^{-1}\ m$, $\delta = 10^{-3}\ m$. Calcoliamo la superficie delle piastre: $S = 4 \cdot 10^{-2}\ m^2$. Adesso, ricordando che $\epsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12}$, abbiamo

$$C = 8.859 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-2}}{10^{-3}}\ F \approx 35.4 \cdot 10^{-9}\ F \equiv 35.4\ nF.$$

In realtà, come si vede, il condensatore piano con dentro il vuoto non migliora di molto la capacità rispetto al conduttore isolato. Supponiamo però di inserire tra le piastre un isolante diverso dal vuoto. è chiaro che quello che deve cambiare nella (260) deve essere la costante dielettrica che tiene conto del mezzo. Infatti, un isolante generico è caratterizzato da una costante dielettrica ϵ che è sempre *più grande* di quella del vuoto:

$$\epsilon > \epsilon_0.$$

Se inseriamo un isolante di costante dielettrica ϵ nel condensatore piano la capacità diventa

$$C = \epsilon\ \frac{S}{\delta}\ . \tag{261}$$

Per alcuni isolanti, poi, la costante ϵ può essere *molto* più grande di quella del vuoto, e questo aumenta sensibilmente la capacità. Inoltre, se si usa un materiale isolante lo spessore δ può essere notevolmente diminuito (perchè, a diiferenza del vuoto, un materiale impedisce comunque alle piastre di venire a contatto). Addirittura, si possono usare come mezzo isolante delle vernici che possono essere spalmate sulle piastre, e permettono spessori piccolissimi. Con questi metodi si può aumentare la capacità fino all'ordine dei microfarad.

Esercizio 8.8): Calcolare la costante dielettrica ϵ di un mezzo isolante posto tra le piastre di un condensatore piano, sapendo che piastre del condensatore hanno area $S = 4 \cdot 10^{-2}\ m^2$, la distanza tra le piastre è $\delta = 0.4\ mm$, e la capacità è $C = 0.6 \mu F$.
Soluzione: Dalla (261) abbiamo

$$\epsilon = C \cdot \frac{\delta}{S} = 6 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-2}}\ C/(N\ m^2) = 6 \cdot 10^{-9}\ C/(N\ m^2).$$

8.7 Definizione di corrente elettrica e alcuni circuiti elettrici

La corrente elettrica.

Finora abbiamo studiato sistemi nei quali le cariche rimenevano in quiete (sistemi elettrostatici). Ora vogliamo studiare alcuni sistemi nei quali le cariche si mettono in moto. Al fenomeno delle cariche in movimento si usa dare il nome di *corrente elettrica*. Tuttavia, noi sappiamo che in fisica ogni quantità deve essere debitamente definita. Inoltre, noi vogliamo formulare una *legge fisica* che, come sempre, colleghi una quantità ("causa") ad un'altra quantità che della prima costituisce l'"effetto". Ora, noi sappiamo che le cariche possono muoversi solo nei conduttori, e solo se soggette ad un *campo elettrico* diverso da zero o, equivalentemente, se soggette ad una *differenza di potenziale* diversa da zero; noi preferiamo usare quest'ultima invece del campo elettrico.

Quindi: *la differenza di potenziale è la causa del moto delle cariche.*

Dobbiamo ora definire l'effetto del moto delle cariche, e naturalmente questo effetto deve esere definito sulla scala macroscopica e non su quella microscopica. Questo effetto prenderà il nome di *intensità di corrente*, e lo definiremo come sempre in stretta analogia coi fluidi.

L'intensità di corrente *va definita in riferimento ad una specifica superficie prefissata S*. Infatti, l'intensità di corrente si definisce nel modo seguente:

data una superficie S all'interno di un conduttore, l'intensità di corrente attraverso S si ottiene misurando la quantità di carica Δq che attraversa S in un intervallo di tempo Δt "arbitrariamente piccolo" , e dividendo poi la carica Δq per il tempo Δt.

Si noti l'analogia con la portata di un fluido. Naturalmente, la specificazione "arbitrariamente piccolo" va intesa come il solito limite *fisico* per Δt che "tende a zero". Quindi abbiamo, indicando con i_S l'intensità di corrente attraverso S, che

$$i_S \doteq \text{"}\lim_{\Delta t \to 0}\text{"} \frac{\Delta q}{\Delta t}|_S \equiv \frac{dq}{dt}|_S \; . \tag{262}$$

Qui abbiamo indicato con il simbolo " $\lim_{\Delta t \to 0}$ " che il limite, dal punto di vista della misura, è un limite fisico; abbiamo indicato con il simbolo "$|_S$" che l'incremento di carica va calcolato attraverso S; e abbiamo usato il fatto che il limite (matematico) del rapposto incrementale dà la derivata.

Vediamo, come sempre quali sono le dimensioni fisiche dell'intensità di corrente:

$$[i_S] = [q\ t^{-1}],$$

e in MKSQ si misura quindi in Coulomb diviso secondi. Come al solito, anche in questo caso si preferisce definire un'unità di misura specifica: l'*Ampere* (simbolo: A), definito come

$$1A \doteq \frac{1C}{1s}.$$

Un Ampere è un'intensità di corrente ragionevole ma già piuttosto elevata dal punto di vista della sicurezza.

Per poter stabilire la legge che connette la causa con l'effetto, dobbiamo però specificare le condizioni geometriche e fisiche nelle quali ci mettiamo; infatti, a diverse condizioni corrisponderanno leggi diverse.

Fili e circuiti elettrici.

La forma dei conduttori nei quali si può generare corrente è, ovviamente, arbitraria. Però noi possiamo scegliere di costruire conduttori della forma che più ci conviene. I conduttori più diffusi sono quelli *filiformi* o *fili elettrici*.

Un filo elettrico è costituito da un conduttore di forma cilindrica, con sezione di raggio molto piccolo rispetto alla lunghezza del cilindro.

Poichè una differenza di potenziale posta ai capi del filo genera moto di cariche, nel filo viene a crearsi un'intensità di corrente. È possibile mostrare che in queste condizioni il moto delle cariche avviene parallelamente all'asse del filo, e l'intensità di corrente *non* dipende dalla particolare sezione del filo (si pensi per analogia ad un fluido spinto da un pistone in un tubo cilindrico). Possiamo quindi togliere il suffisso S all'intensità di corrente, e scivere semplicemente i; scriveremo anche

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{263}$$

senza suffissi.

Cominceremo, nel seguito, a considerare un tratto di filo; tuttavia, per poter effettivamente far circolare corrente permanentemente è necessario utilizzare un *circuito elettrico*. Un circuito elettrico, nei casi più semplici, è un circuito chiuso costituito da un filo elettrico nel quale vengono inseriti degli *elementi elettrici* e che, appunto, si richiude su se stesso. Anche quando considereremo un semplice tratto di filo, lo penseremo inserito in un circuito.

La legge di Ohm.

Adesso andremo a scrivere la legge che regola la circolazione di corrente. Abbiamo visto che la *causa* del movimento dele cariche è la differenza di potenziale, e che l'*effetto* è l'intensità di corrente. La legge che le connette è molto semplice: le due quantità sono proporzionali.

Consideriamo un tratto di filo elettrico cha va dal punto A al punto B, e supponimo che ai capi del filo sia posta una differenza di potenziale costante

$$\Delta V = V_B - V_A,$$

dove V_A denota il potenziale in A e V_B denota il potenziale in B. La differenza di potenziale genera una intensità di corrente costante i; la legge che connette ΔV e i prende il nome di *legge di Ohm*, e prende la forma:

$$\Delta V = R\,i\,. \tag{264}$$

Vediamo quindi che la differenza di potenziale è proporzionale all'intensità di corrente; la costante di proporzionalità R prende il nome di *resistenza elettrica* o, semplicemente, resistenza. La resistenza, come dice il nome, rappresenta l'"attrito" del mezzo che si oppone alla conduzione elettrica; essa dipende ovviamente solo dal conduttore, ed in particolare dal tipo di materiale da cui è costituito e dalle sue dimensioni geometriche. Vediamone le dimensioni fisiche:

$$[R] = [V \cdot i^{-1}].$$

Nel sistema MKSQ le dimensioni di una resistenza sono quelle di Volt su Ampere; come al solito, si preferisce definire un'unità di misura apposita che prende il nome di *Ohm* (simbolo Ω):

$$1\;\Omega = \frac{1\;V}{1\;A}.$$

Abbiamo detto che la resistenza dipende dalle cratteristiche del conduttore; per un conduttore cilindrico, che è quello che stiamo considerando, si ha che *la resistenza di un conduttore cilindrico di lunghezza l e sezione S è direttamente proporzionale a l e inversamente proporzionale a S.* Questa, che è nota come *seconda legge di Ohm*, si scrive:

$$R = \rho\;\frac{l}{S}. \tag{265}$$

La costante di proporzionalità ρ dipende solo dal materiale di cui è costituito il conduttore, e prende il nome di *resistività*; essa ci dice se un conduttore è meglio di un altro perchè una più bassa resistività comporta una maggiore capacità di far circolare corrente e quindi un miglior conduttore (per esempio il rame ha bassa resistività ed è un ottimo conduttore, spesso usato per fili elettrici).

Come notazione finale, osserviamo che la relazione (264) continua a valere qualsiasi sia il modo con cui si è instaurata la differenza di potenziale, ed anche se questa dipende dal tempo; in quest'ultimo caso anche l'intensità di corrente dipenderà dal tempo. Potremo scrivere quindi la it legge di Ohm generalizzata:

$$\Delta V(t) = R\;i(t)\;. \tag{266}$$

Esercizio 8.9): Calcolare l'intensità di corrente che attraversa una resistenza $R = 300\ \Omega$ se viene applicta una differenza di potenziale $\Delta V = 220\ V$.
Soluzione: Abbiamo

$$i = \frac{V}{R} = \frac{220}{400}\ A = 0.55\ A.$$

Resistenze in serie

Supponiamo ora di avere due resistenze R_1 e R_2. R_1 è la resistenza di un tratto di conduttore posto tra i punti A e B, mentre R_2 è la resistenza di un tratto di conduttore posto tra i punti B e C; in questo caso si dice che le due resistenze sono *in serie*. Naturalmente, siccome i due tratti AB e BC costituiscono un *unico* conduttore, in AB (e quindi in R_1) e in BC (e quindi in R_2) fluisce la *stessa* corrente che indichiamo con i. Ci domaniamo: quanto deve valere una resistenza R, che chiameremo *resistenza equivalente*, che, posta tra i punti A e C in sostituzione delle prime due, produce la stessa intensità di corrente del primo dispositivo? Per trovare R abbiamo a disposizione la legge di Ohm (264); la scriviamo per il tratto AB con la resistenza R_1, per il tratto BC con la resistenza R_2, e per per il tratto AC con la resistenza R. Definiamo $\Delta V_{AB} \doteq V_B - V_A$, $\Delta V_{BC} \doteq V_C - V_B$ e $\Delta V_{AC} \doteq V_C - V_A$; abbiamo allora:

$$a)\ \Delta V_{AB} = R_1\, i,$$

$$b)\ \Delta V_{BC} = R_2\, i,$$

$$c)\ \Delta V_{AC} = R\, i.$$

Si noti che la terza relazione costituisce la *definizione* della resistenza equivalente R. Poichè $\Delta V_{AB} + \Delta V_{BC} \equiv V_B - V_A + V_C - V_B = V_C - V_A \equiv DeltaV_{AC}$, sommando le relazioni a) e b) abbiamo

$$\Delta V_{AC} = (R_1 + R_2)\, i;$$

questa relazione e la relazione c) hanno lo stesso primo membro, e quindi possiamo uguagliare i secondi membri ottenendo

$$(R_1 + R_2)\, i = R\, i,$$

cioè

$$R = R_1 + R_2 \ , \tag{267}$$

Quindi: *la resistenza equivalente di due resistenze in serie è la somma delle resistenze.* Questo argomento, ovviamente, si può estendere ad un numero qualsiasi di resistenze in serie: *la resistenza equivalente di un qualsiasi numero di resistenze in serie è la somma delle resistenze.*

Primo principio di Kirchhoff

Per introdurre il primo principio di Kirchhoff, definiamo innanzitutto il concetto di *nodo*. Si consideri un circuito comunque complesso, costituito da tanti fili che si allacciano in alcuni punti. Definiamo *nodo* all'interno del circuito *un punto del circuito nel quale confluiscono almeno tre fili (detti anche rami).* Il caso più semplice è quello di un filo percorso da corrente i che si dirama in un certo punto (nodo) A in due correnti i_1, i_2 (per le figure vedere un qualsiasi libro di Fisica). Le correnti potranno entrare oppure uscire da un nodo; diamo allora, convenzionalmente, un segno positivo alle correnti che entrano, ed un segno negativo a quelle che escono. Per esempio, se in un nodo entra una corrente di 1 A, la conteremo come $+1$ A, e se esce una corrente di 2 A la conteremo come -2 A. Indichiamo ora con $i_1, i_2, \ldots, i_n$ le intensità delle correnti che entrano o escono da uno stesso nodo. Il primo principio di Kirchhoff afferma che: *la somma algebrica di tutte le correnti che fanno capo ad un nodo è nulla.* Con il termine "somma algebrica" indichiamo il fatto che, nel sommare, diamo alle correnti un segno positivo o negativo secondo la convenzione stabilita in precedenza. Consideriamo come esempio il caso più semplice descritto prima (un filo percorso da corrente i che si dirama in un certo punto (nodo) A in due correnti i_1, i_2); allora, la corrente i entrante la prendiamo col segno più , mentre le due correnti i_1, i_2 uscenti le prendiamo col segno meno. Il primo principio di Kirchhoff diventa quindi in questo caso

$$i - i_1 - i_2 = 0,$$

ovvero

$$i = i_1 + i_2,$$

(la corrente totale che entra è uguale alla corrente totale che esce).

Altro esempio: se nel nodo entrano le correnti i_1, i_2, e escono le correnti i_3, i_4, i_5, abbiamo

$$i_1 + i_2 - i_3 - i_4 - i_5 = 0,$$

ovvero

$$i_1 + i_2 = i_3 + i_4 + i_5.$$

E così via.

Resistenze in parallelo

Supponiamo ora di avere un pezzo di circuito nel quale una corrente i si dirama nel nodo A in due correnti tra loro parallele i_1, i_2, che poi si ricongiungono in un secondo nodo B, dopo il quale esce di unuovo un unico ramo con corrente i. Supponiamo poi che nei due rami paralleli tra A e B siano poste due resistenze R_1 (nel ramo in cui fluisce i_1) e R_2 (nel ramo in cui fluisce i_2). Le due resistenze sono dette *resistenze in parallelo.* È subito chiaro un fatto importante: *essendo le due resistenze in parallelo poste tra gli stessi due punti A e B (i nodi), ai loro capi c'è la stessa differenza di potenziale $V_B - V_A$).*

Ora ci poniamo il seguente problema: *qual'è la resistenza equivalente alle due resistenze in parallelo?*, ovvero, in termini più precisi: *se sostituisco i due rami tra A e B percorsi da i_1 e i_2 con un unico ramo tra A e B percorso dalla corrente i, qual'è la resistenza R_{eq} che devo inserire in questo ramo in modo da ottenere la stessa differenza di potenziale $V_B - V_A$?.* Questa domanda ci dice che la definizione delle resistenza equivalente è quella resistenza R_{eq} tale che

$$V_B - V_A = R_{eq}\, i. \tag{268}$$

Per trovare l'espressione di R_{eq} in termini di R_1, R_2, uso il primo principio di Kirchhoff e la legge di Ohm. Il primo principio di Kirchhoff, applicato al nodo A mi dà

$$i = i_1 + i_2\ . \tag{269}$$

(Si noti che se applico il principio al nodo B ottengo la stessa relazione). La legge di Ohm, applicata alle due resistenze R_1, R_2 mi dà

$$V_B - V_A = R_1\, i_1, \tag{270}$$

e

$$V_B - V_A = R_2\, i_2. \tag{271}$$

Queste due equazioni, ricavando le correnti, le posso riscrivere come

$$i_1 = \frac{V_B - V_A}{R_1}, \tag{272}$$

e

$$i_2 = \frac{V_B - V_A}{R_2}. \tag{273}$$

Sostituendo le due espressioni (272) e (273) nella relazione (269), ottengo

$$i = (V_B - V_A)\,\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{274}$$

Usando la definizione (268),che, vedo che questa equazione mi dà

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \tag{275}$$

cioè

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \equiv \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}. \tag{276}$$

Osservazione: se prendo due resistenze uguali $R_1 = R_2 = R$ e le metto in serie, ottengo una resistenza equivalente $2\,R$ che è il doppio di ciascuna delle resistenze originarie; se invece prendo due resistenze uguali $R_1 = R_2 = R$ e le metto in parallelo, ottengo una resistenza equivalente $R/2$ che è la metà di ciascuna delle resistenze originarie.

Esercizio 8.10):

Si supponga che in un circuito siano presenti tre resistenze $R = 200\ \Omega$, $R_1 = 300\ \Omega$, $R_2 = 600\ \Omega$. La resistenza R è posta tra i punti A e B, mentre le resistenze R_1 ed R_2 sono poste tra loro in parallelo tra i punti B e C. Calcolare la resistenza equivalente alle tre resistenze.
Soluzione: Conviene prima calcolare la resistenza $R_{eq}^{(1,2)}$ equivalente alle resistenze in parallelo (vedi formula (276)):

$$R_{eq}^{(1,2)} = \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2} = \frac{18 \times 10^4}{9 \times 10^2} = 200\ \Omega.$$

La resistenza $R_{eq}^{(1,2)}$ è posta ovviamente tra i punti B e C, ed è quindi in serie con la resistenza R. Allora, la resistenza equivalente $R_{eq}^{(1,2,3)}$ alle tre resistenze è:

$$R_{eq}^{(1,2,3)} = R + R_{eq}^{(1,2)} = 400\ \Omega.$$

Circuiti e forza elettromotrice

Adesso affrontiamo il seguente problema: come facciamo a generare e poi mantenere stabilmente una corrente?

La risposta è che dobbiamo costruire un circuito *chiuso*, e poi inserire nel circuito un dispositivo che fornisca energia per far muovere stabilmente le cariche e quindi generare corrente stabile. Qualsiasi dispositivo di questo tipo prende il nome di *generatore*. Il più semplice circuito è costituito dunque da un conduttore di forma chiusa nel quale viene inserito un generatore; il circuito quindi possiede due elementi, il generatore e la resistenza del conduttore. Per far circolare corrente il generatore deve fornire una differenza di potenziale, che chiameremo *forza elettromotrice o tensione* e indicheremo con f. In realtà, il generatore possiede anch'esso una resistenza, che chiamremo resistenza interna e denoteremo con r. Inserire un generatore in un circuito significherà quindi inserire una differenza di potenziale f (la forza elettromotrice) ed una resistenza r; questa sarà in serie con la resistenza R del circuito, e quindi la resistenza totale sarà $R+r$. Allora possiamo scrivere la legge di Ohm (264) con f al posto di ΔV_{AB} e $R+r$ al posto di R:

$$f = (R+r)\, i\ . \tag{277}$$

La corrente sarà quindi un po' più piccola di quella che avremmo ottenuto con la forza elettromotrice e la resistenza R; ne deduciamo che: *più bassa è la sua resistenza interna, migliore è il gneratore.*

Esempi di generatori sono: le pile, le centrali idroelettriche, le centrali termoelettriche ecc. Questi dispositivi trasformano in energia elettrica altri tipi di energia (energia chimica per le pile, energia gravitazionale per le centrali idroelettriche, energia termica per le centrali termoelettriche ecc.)

Una cosa interessante da osservare è che, poichè per muovere le cariche è necessario compiere lavoro, e le forze conservative compiono lavoro nullo lungo un circuito chiuso (come il nostro circuito elettrico) *le forze associate ad un generatore sono forze non conservative.*

Esercizio 8.11): Calcolare la resistenza interna r di un generatore, dotato di forza elettromotrice $f = 100\ V$, sapendo che se lo chiudiamo su una resistenza $R = 200\ \Omega$ genera un'intensità di corrente $i = 0.48\ A$.
Soluzione: Dall'Eq. (277) abbiamo

$$r\, i = f - R\, i,$$

da cui

$$r = \frac{f - R\, i}{i} = \frac{100 - 200 \cdot 0.48}{0.48} = \frac{4}{0.48}\ \Omega \approx 8\ \Omega.$$

I principi di Kirchhoff

Finora abbiamo considerato il più semplice dei circuiti, cioè quello nel quale sono presenti solo un generatore di forza elettromotrice ed una resistenza (o più resistenze in serie che equivalgono ad un'unica resistenza pari alla somma). Tuttavia, i circuiti che si possono costruire possono avere una struttura ben più complicata. Possono infatti contenere (come vedremo) altri elementi oltre alle resistenze; e comunque possono presentare più di un cammino chiuso. Pensiamo infatti ad un circuito che sia costituito da due rettangoli che abbiano un lato in comune, e nei quali siano inseriti più generatori di forza elettromotrice e più resistenze. Come facciamo a "risolvere il circuito"? Con la frase "risolvere il circuito" riassumiamo il seguente problema: "assegnati i valori delle forze elettromotrici e delle resistenze, calcolare i valori delle intensità di corrente". Si noti che abbiamo parlato di più intensità di corrente, e fra poco si capirà il perchè. Torniamo al nostro esempio di circuitocostituito da due triangoli con un lato in comune. Chiamiamo A, B, C, D i vertici del triangolo superiore incontrati percorrendo il triangolo in verso *antiorario*; questo significa che A è il vertice in basso a sinistra, B il vertice in basso a destra, C il vertice in alto a destra, D il vertice in alto a sinistra. Indichiamo poi con A, B, E, F i vertici del triangolo inferiore incontrati percorrendo il triangolo in verso *orario*; questo significa che per questo triangolo A è il vertice in alto a sinistra, B è il vertice in alto a destra, E è il vertice in basso a destra e F è il vertice in basso a sinistra. Il lato AB è quindi comune al triangolo superiore (di cui costituisce il lato orizzontale in basso) ed al triangolo inferiore (di cui costituisce il lato orizzontale in alto).

Il Circuito RC

Consideriamo ora un circuito nel quale sia inserito un condensatore di capacità C e che abbia un interruttore; per definizione di capacità ($C = q/\Delta V$), la differenza di potenziale ai capi del condensatore è

$$\Delta V = \frac{q}{C}.$$

quando si chiude l'interruttore questa differenza di potenziale sarà posta ai capi della resistenza R del filo conduttore, e quindi comincerà a passare corrente (circuito RC). Vediamo però che in questo caso tensione e corrente dipenderanno dal tempo; vediamo infatti cosa succede. quando chiudiamo il circuito cominciano a muoversi le cariche; si sa che quelle che si muovono sono le cariche negative (gli elettroni). Allora, parte delle cariche che stanno sulla piastra negativa del condensatore si mettono in moto, passano per la resistenza del circuito e si portano sulla piastra positiva dove neutralizzano una quantità equivalente di carica positiva; quindi le cariche sulle piastre *diminuiscono.* Il processo si ripete, c'è un'altra diminuzione e così via, Quindi *la carica sulle piastre del condensatore dipende dal tempo (e decresce), e di conseguenza dipende dal tempo anche la differenza di potenziale.* Scriveremo allora

$$\Delta V(t) = \frac{q(t)}{C}.$$

Anche la corrente dipendrà, ovviamente, dal tempo; ci aspettiamo che sia *massima* all'istante iniziale (quando chiudiamo l'interruttore) e vada a zero (come la carica) per grandi tempi. Prima di procedere col conto analitico cerchiamo di ricavare la soluzione di questo problema semplicemente attraverso ragionamento fisico. Innanzitutto, ci aspettiamo che la carica o la corrente vadano a zero in un certo tempo caratteristico τ; ma per avere una scala di tempo (o di lunghezza o altro) caratteristica è noto che la funzione che descrive la quantità che varia (va a zero) in tale tempo caratteristico deve essere, a parte una costante, un *esponenziale* nel tempo con esponente negativo. D'altra parte, l'argomento dell'esponenziale deve essere adimensionale, come sappiamo, e quindi non potrà essere semplicemente il tempo t, ma il tempo t diviso un altro tempo che, ovviamente, dovrà essere il tempo caratteristico τ. Ci aspettiamo quindi che

$$q(t) = K\ e^{-t/\tau} \ \ ; \ \ i(t) = K'\ e^{-t/\tau},$$

dove K, K' sono due costanti opportune. Vediamo che appena $t >> \tau$ l'esponenziale è praticamente nullo. Ma qual'è il tempo caratteristico τ di un circuito RC? Possiamo capirlo facendo un'analisi dimensionale; dobbiamo infatti esaminare quali quantità abbiamo a disposizione, e qual'è la loro combinazione che ha le dimensioni di un tempo. Le quantità abbiamo a disposizione sono ovviamente R e C. Le loro dimensioni sono

$$[R] = [V \cdot i^{-1}] \equiv [V \cdot q^{-1} \cdot t]$$

e

$$[C] = [q \cdot V^{-1}].$$

Vediamo che moltiplicando R per C abbiamo

$$[RC] = [V \cdot q^{-1} \cdot t] \cdot q \cdot V^{-1}] = t,$$

cioè proprio le dimensioni di un tempo. Quindi, il tempo caratteristico, a parte costanti numeriche, deve essere proprio RC.

Adesso procediamo a fare il conto analitico. Scriviamo la legge di Ohm generalizzata (266) con al primo membro la differenza di potenziale del condensatore:

$$-\frac{q(t)}{C} = R\, i(t)\ , \tag{278}$$

dove il segno meno tiene conto del fatto che la corrente viene generata *spese* della diminuzione della differenza di potenziale. Sostituiamo nell'equazione la definizione di intensità di corrente $i(t) = dq(t)/dt$:

$$-\frac{q(t)}{C} = R\,\frac{dq(t)}{dt}\ ; \tag{279}$$

adesso dividiamo i due membri per R e ricaviamo $dq(t)/dt$ ottenendo:

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{q(t)}{RC}\ . \tag{280}$$

abbiamo quindi un'equazione differenziale del primo ordine che si risollve facilmente; infatti, la soluzione deve essere una funzione del tempo la cui derivata, a parte la costante $-1/(RC)$, deve dare la funzione stessa, e sappiamo che questa funzione. a parte una costante, è l'esponenziale, con esponente dato dal tempo moltiplicato la costante $-1/(RC)$. Abbiamo quindi

$$q(t) = K\ e^{-t/RC}\ . \tag{281}$$

$\tau = RC$ è quindi proprio il tempo caratteristico del sistema. Adesso poniamo nell'Eq, (281) $t = 0$ in ambedue i membri, ottenendo:

$$q(0) = K;$$

come potevamo aspettarci, la costante è data dalla condizione iniziale, e la soluzione completa per la carica è

$$q(t) = q(0)\ e^{-t/RC}\ . \tag{282}$$

Possiamo ora anche ricavare l'intensità di corrente eseguendo la derivata di questa funzione (secondo la definizione

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{q(0)}{RC}\ e^{-t/RC}\ , \tag{283}$$

dove il egno meno esprime sempre il fatto che la corrente è a spese della differenza di potenziale.

A volte è utile riscrivere le soluzioni (282) e (283) in forma diversa. Dividiamo infatti ambedue i membri della (282) per $q(0)$ ottenendo

$$\frac{q(t)}{q(0)} = e^{-t/RC};$$

ora prendiamo il logaritmo naturale (cioè in base e) di ambedue i membri, e poichè il logritmo naturale di un esponenziale dà l'esponente, abbiamo

$$\ln\left[\frac{q(t)}{q(0)}\right] = -\frac{t}{RC}\ . \tag{284}$$

Possiamo ottenere un'equazione analoga partendo dalla (283). Innanzitutto però prendiamo il modulo di ambedue i membri ottenendo

$$|i(t)| = \frac{q(0)}{RC}\ e^{-t/RC}\ . \tag{285}$$

Poi dividiamo ambedue i membri per $q(0)/RC$:

$$\frac{RC}{q(0)} \, |i(t)| = e^{-t/RC} \; ; \tag{286}$$

ora prendiamo il logaritmo naturale di ambedue i membri e otteniamo

$$\ln \left[\frac{RC}{q(0)} \, |i(t)| \right] = -\frac{t}{RC} \; . \tag{287}$$

Esercizio 8.11): In un circuito RC la resistenza vale $R = 150 \; \Omega$. Sapendo che la carica si riduce a $q(0) \; e^{-1}$ dopo $3 \cdot 10^{-4} \; s$, calcolare la capacità.
Soluzione: il tempo di $3 \cdot 10^{-4} \; s$ è proprio il tempo caratteristico $\tau = RC$; infatti, se poniamo $t = \tau$ nell'Eq. (282) abbiamo

$$q(t) = q(0) \; e^{-\tau/RC} = q(0) \; e^{-RC/RC} = q(0) \; e^{-1}.$$

Allora $\tau = RC = 3 \cdot 10^{-4} \; s$ e

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{150} \; F = 2 \; \mu F.$$

Esercizio 8.12): In un circuito RC dopo $10^{-3} \; s$ la carica vale $0.6 \cdot 10^{-6} \; C$, mentre la carica iniziale vale $q(0) = 2 \cdot 10^{-6} \; s$. Calcolare la resistenza sapendo che la capacità vale $0.4 \; \mu F$.
Soluzione: Ci conviene usare l'Eq. (284); inserendo in questa equazione $t = 10^{-3} \; s$, $q(t) = 0.6 \cdot 10^{-6} \; C$, $q(0) = 2 \cdot 10^{-6} \; s$ e $C = 4 \cdot 10^{-7} \; F$ abbiamo

$$\ln \left[\frac{0.6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6})} \right] = -\frac{10^{-3}}{4 \cdot 10^{-7} \cdot R},$$

cioè

$$-1.2 = -\frac{0.25 \cdot 10^{4}}{R},$$

e quindi

$$R = \frac{0.25 \cdot 10^{4}}{1.2} \; \Omega = 3000 \; \Omega.$$

Esercizio 8.12): In un circuito RC il modulo della corrente iniziale vale $4 \cdot 10^{-3}\ A$. Sapendo che dopo il tempo caratteristico $\tau = RC$ la carica vale $q(\tau) = 0.15 \cdot 10^{-6}\ C$, calcolare il tempo caratteristico.
Soluzione: Abbiamo gi'a visto che dopo il tempo caratteristico $\tau = RC$ la carica è diventata

$$q(\tau) = q(0) \cdot e^{-1};$$

allora abbiamo

$$q(0) = q(\tau) \cdot e \approx 0.4 \cdot 10^{-6}\ C.$$

Poichè il modulo della corrente iniziale (vedi Eq. (286)) è $|i(0)| = \frac{q(0)}{RC} \equiv \frac{q(0)}{\tau}$, abbiamo

$$4 \cdot 10^{-3} = \frac{0.4 \cdot 10^{-6}}{\tau},$$

e quindi

$$\tau = \frac{0.4 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-3}} = \cdot 10^{-4}\ s.$$

9 Cenni sul campo magnetico

È ben noto che se si avvicina una calamita a degli oggetti di ferro, questi ultimi verranno da essa attirati. La calamita esercita un'azione sul ferro e quindi, analogamente alle cariche elettriche, genera un qualche tipo di campo nello spazio ad essa circostante. Chiameremo questo campo *campo magnetico*. Tuttavia, esiste una differenza sostanziale tra il campo magnetico, generato dalla calamita, e il campo elettrico, generato dalle cariche elettriche. Infatti, se si avvicina l'estremità di una calamita a quella di un'altra calamita, si potrà riscontrare che tra di esse si genera una forza, che può essere attrattiva o repulsiva. Se inizialmente la forza era attrattiva, si vede che, girando una delle calamita in modo da scambiare le estremità, la forza diventa repulsiva o, viceversa, se era repulsiva diventa attrattiva. La calamita possiede, quindi, due *polarità*, ed è come se fossero presenti alle due estremità due cariche di segno opposto. Il problema è che *queste cariche non si possono separare.* Infatti, se tagliamo a metà la calamita, la situazione non cambia, e la calamita dimezzata presenterà ancora due polarità. Ne deduciamo che: *non esistono cariche magnetiche isolate (altrimenti denominate monopoli magnetici.* Questo fatto ha, come prime conseguenza che, poichè le linee di forza in presenza di coppie di cariche di segno opposto non possono che andare da una carica all'altra, e viceversa, se riusciamo a definire (lo faremo tra poco) il campo magnetico come campo vettoriale, l'analogo del teorema di Gauss per questo campo si enuncwerà nel modo seguente: *il flusso attraverso una superficie chiusa del campo magnetico è sempre nullo.* D'altra parte, se abbiamo che le cariche magnetiche sono sempre presenti in coppie di modulo uguale e di segno opposto, in ogni superficie chiusa la loro somma sarà, appunto, sempre nulla.

Finora abbiamo parlato di calamite. Tuttavia, esiste un altro modo di generare un campo magnetico: infatti, *una corrente elettrica genera un campo magnetico.* Per verificare questo fatto, basterà avvicinare un filo percorso da corrente a oggetti di ferro, e si potrà verificare che esso eserciterà su questi oggetti un'azione simile a quella di una calamita.

Ma si può fare ancora un'osservazione che sarà molto utile per definire il campo magnetico: *un campo magnetico esercita una forza su un filo percorso da corrente.* Per verificarlo, basta avvicinare al filo percorso da corrente una calamita, oppure un altro filo percorso da corrente.

Definizione di campo magnetico

La forza che un campo magnetico esercita su una corrente ci permette di definirlo. Consideriamo infatti un tratto rettilineo di filo di lunghezza l, percorso da una corrente i, e posto in presenza, per esempio di una calamita. Sul filo sarà riscontrabile e misurabile una forza. Dovendo stabilire la *legge della forza*, procediamo come al solito: misuriamo diversi valori della forza quando facciamo variare, a turno, solo una delle quantità dalla quale essa può dipendere. Questi parametri, fissato il *mezzo* nel quale operiamo (il vuoto o, equivalentemente, l'aria), sono: l'intensità di corrente i, la lunghezza del filo l, e l'angolo θ tra la direzione congiungente i poli della calamita e la direzione della corrente. Eseguendo diverse misure nelle quali teniamo fissi l e *theta* e facciamo variare i, verifichiamo che la forza sul filo è direttamente proporzionale all'intensità di corrente. Eseguendo poi diverse misure nelle

quali teniamo fissi i e *theta* e facciamo variare l, verifichiamo che la forza sul filo è direttamente proporzionale alla lunghezza l Infine, Eseguendo diverse misure nelle quali teniamo fisse i e l e facciamo variare θ, verifichiamo che la forza sul filo è direttamente proporzionale *al seno dell'angolo* θ. In conclusione, indicata con F l'intensità della forza, abbiamo che F è proporzionale al prodotto $i\, l\, \sin\, \theta$.
Ora, *la costante di proporzionalità, che possiamo misurare, la definiamo come l'intensità* B_0 *del campo magnetico* (il pedice 0 indica il campo nel vuoto). Abbiamo quindi

$$F = i\, B_0\, l\, \sin\, \theta.$$

Ci manca ancora di definire la direzione e il verso del vettore campo magnetico; ma l'espressione sopra scritta del modulo della forza ci suggerisce che quest'ultima, come vettore, sia data da un prodotto vettoriale. definito quindi il vettore $\vec{l}$ come quello che ha modulo pari alla lunghezza l del tratto di filo, e direzione e verso coincidenti con quelli della corrente, scriveremo:

$$\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B}_0, \tag{288}$$

dove il simbbolo "$\wedge$" indica appunto il prodotto vettoriale (vedi definizione all'inizio delle lezioni. La legge (288) definisce allora completamente il vettore campo magnetico in modulo, direzione e verso.

L'unità di misura del campo magnetico nel sistema MKSQ è il *Tesla* (simbolo: T). In realtà, il Tesla è un campo magnetico molto elevato, e spesso si usa il *Gauss* (simbolo: G), che è legato al Tesla dalla relazione

$$1\, T = 10^4 G.$$

Per dare un'idea degli ordini di grandezza, basterà dire che il campo magnetico terrestre è dell'ordine i mezzo Gauss.

Campi magnetici uniformi: il solenoide

Abbiamo visto che il condensatore piano è il dispositivo che permette di generare un campo elettrico uniforme al suo interno, ed un campo elettrico nullo al suo esterno. È possibile trovare un dispositivo che generi invece un campo magnetico con le stesse caratteristiche? Tale dispositivo è il *solenoide*. Esso consiste di un filo conduttore avvolto strettamente a formare una bobina cilindrica, e percorso da corrente. In pratica, è come se l'avvolgimento consistesse di spire circolari uguali e parallele tra loro percorse da corrente. Se r indica il raggio delle spire, ed L la lunghezza dell'avvolgimento cilindrico, ci mettiamo nella condizione

$$r << L.$$

In queste condizioni, possiamo considerare a tutti gli effetti il solenoide come "infinito" se non prendiamo in considerazione i punti troppo vicini ai margini, e, per simmetria, il campo magnetico generato dalla corrente sarà con buona approssimazione uniforme all'interno del solenoide, e nullo all'esterno. Sempre per simmetria, il campo interno avrà direzione parallela all'asse del solenoide (cioè perpendicolare alla superficie delle spire9, e verso che dipenderà dal verso della corrente. Si può verificare che il modulo di tale campo magnetico è direttamente proporzionale alla intensità di corrente i che circola nelle spire. Inoltre, se N è il numero totale di spire, definiamo la *densità lineare di spire*

$$n = \frac{N}{L}.$$

Allora, si può verificare che il modulo del campo magnetico interno è proporzionale anche a n. Avremo quindi che il modulo del campo magnetico è

$$B_0 = \mu_0 \; i \; n \; , \tag{289}$$

dove μ_0 indica la costante di proporzionalità quando nel solenoide c'è vuoto (o aria). La costante μ_0 si può misurare e, nel sistema MKSQ, assume il valore numerico

$$\mu_0 = 12.56 \times 10^{-7}. \tag{290}$$

La forza di Lorentz

Poichè la corrente è costituita da cariche in movimento, e poichè un campo magnetico esercita una forza su una corrente, se ne deduce che un campo magnetico esercita una forza anche su una singola carica in movimento. Tale forza è nota come *forza di Lorentz*. Una singola carica elementare, in particolare un elettrone, può essere "sparato" nel vuoto prima riscaldando un filamento metallico, il che fornisce abbastanza energia agli elettroni (di conduzione) presenti nel metallo da farli fuoruscire (vincendo la barriera di potenziale che normalmente li tiene confinati nel metallo), e poi accelerandoli attraverso un campo elettrico (o, equivalentemente, una differenza di potenziale). La carica acquista quindi una velocità $\vec{v}$, e può essere sottoposta ad un campo magnetico $\vec{B}_0$. Si può allora verificare che il campo magnetico esercita sulla carica una forza che, se indichiamo con q il valore della carica, vale

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}_0\,. \tag{291}$$

Si può far vedere che, sotto l'azione di questa forza, la carica, sottoposta ad un campo magnetico uniforme, percorre una spirale a passo costante. Noi però qui consideriamo il caso semplice nel quale la velocità iniziale $\vec{v}_0$ della carica è perpendicolare al campo magnetico. In questo caso, si può mostrare che l'elettrone compie una traiettoria circolare nel piano perpendicolare al campo magnetico, con moto circolare uniforme in cui il modulo della velocità rimane uguale a $|\vec{v}_0| \equiv v_0$. In questo caso, possiamo calcolare il raggio di questa traiettoria tramite la legge di Newton. Infatti, poichè la velocità rimane sempre perpendicolare al campo (quindi, sin $\theta \equiv$ sin $90° = 1$, dalla Eq. (291) abbiamo

$$|\vec{F}| = |q|\ |\vec{v}|\ |\vec{B}_0| \equiv |q|\ v_0\ B_0,$$

dove abbiamo messo $|q|$ perchè la carica può essere negativa (come nel caso degli elettroni). Indicata ora con m la massa della carica, e considerato che nel moto circolare uniforme l'accelerazione è quella centripeta a_c e vale

$$a_c = \frac{v_0^2}{r},$$

dove r è il raggio della traiettoria circolare, dalla legge di Newton

$$F = m\ a_c$$

otteniamo

$$|q|\ v_0\ B_0 = m\ \frac{v_0^2}{r},$$

da cui ricaviamo il raggio della traiettoria

$$r = \frac{m\ v_0}{|q|\ B_0}. \tag{292}$$

Esercizio 8.13): Calcolare il campo magnetico all'interno di un solenoide contenente aria, con $N = 1000$ spire, lungo $L = 10\ cm$, e nelle cui spire circola la corrente di $i = 1\ A$.
Soluzione: Innanzitutto, trasformiamo in MKSQ la lunghezza L:

$$L = 0.1\ m.$$

Poi abbiamo

$$n = \frac{1000}{0.1} = 10^4\ m^{-1}.$$

Dall'Eq. (289) abbiamo

$$B_0 = \mu_0\ i\ n = 12.56 \times 10^{-7} \times 1 \times 10^4 = 12.56 \times 10^{-3}\ T = 125.6\ G.$$

Esercizio 8.14): Un elettrone, la cui carica è circa $-e = -10^{-19}C$ e la cui massa è circa $10^{-30}Kg$, viene sparato nel vuoto ad una velocità di circa $10^7\ m/s$, in presenza di un campo magnetico di $100\ G$. Se la velocità dell'elettrone è perpendicolare a quella del campo magnetico, calcolare il raggio della traiettoria circolare.
Soluzione: Innanzitutto

$$100\ G = 10^{-2}\ T.$$

Dalla formula (292) otteniamo allora

$$r = \frac{10^{-30} \times 10^7}{10^{-19} \times 10^{-2}} = 10^{-2}\ m.$$

Testi e soluzioni di prove scritte

Scritti del 5/2/2007

PROVA DI INFORMATICA APPLICATA

Esercizio 1 (4 punti)

Si faccia l'analisi dimensionale dei due membri delle seguenti uguaglianze, e si dica quali sono dimensionalmente corrette e quali no:

$$1)\ m\, v^3\, t = L\ ;\ 2)\ F\, T\, v = L;$$

$$3)\ a\, l^{-1}\, \omega^{-1} = \omega^{'};\ 4)\ m\, R\, \omega^2 = F;$$

dove:
- nella 1) m è una massa, v una velocità, t un tempo, e L un lavoro;
- nella 2) F è una forza, T un periodo, v una velocità, e L un lavoro;
- nella 3) a è un'accelerazione, l una lunghezza, ω e $\omega^{'}$ velocità angolari;
- nella 4) m è una massa, R un raggio, ω una velocità angolare, F una forza.

Esercizio 2 (4 punti)

Un corpo di massa $m = 2\ Kg$ si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione costante a; se il corpo dopo 5 secondi ha percorso 100 metri, calcolare la forza che lo fa muovere.

Esercizio 3 (6 punti)

Un corpo compie un moto rettilineo uniformemente *decelerato* con accelerazione $a = -4\ m\ s^{-2}$, e partendo con una velocità iniziale $v(0)$ diversa da zero. Calcolare:

a) quanto vale $v(0)$ se il corpo si ferma dopo 4 secondi;

b) quanto spazio ha percorso il corpo in quei 4 secondi.

Esercizio 4 (6 punti)

Un corpo scende senza attrito lungo un piano inclinato di un angolo α, e di lunghezza $l = 40\ m$. Calcolare, usando la conservazione dell'energia meccanica, quanto vale l'angolo di inclinazione α se il corpo, partendo da fermo, alla fine del piano inclinato ha acquistato una velocità di $20\ m\ s^{-1}$.

Esercizio 5 (12 punti)

Un corpo scende senza attrito lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha = 60°$, e di base $l = 30\ m$ (nelle nostre notazioni, il piano inclinato è rappresentato da un triangolo rettangolo ABC, in cui i due cateti sono AB (l'altezza) e BC (la base), e l'ipotenusa AC è la lunghezza del piano inclinato). Calcolare, usando la conservazione dell'energia meccanica,:

a) qual'è la velocità del corpo alla fine del piano inclinato se parte da fermo;

b) qual'è la velocità del corpo alla fine del piano inclinato se parte con una velocità iniziale di $4\ m/s$;

c) qual'è la velocità del corpo quando ha percorso un quarto della lunghezza del piano inclinato se parte da fermo.

Esercizio 6 (7 punti)

Una molla di costante elastica $k = 8N/m$ è attaccata ad un corpo di massa $m = 2\ Kg$. All'istante iniziale la molla passa per il suo punto di equilibrio con una velocità $v(0)$. Calcolare quanto vale $v(0)$ se il corpo dopo un tempo $t = \pi/4\ s$ dall'istante iniziale ha percorso 1 metro. Calcolare la velocità del corpo dopo un tempo $t = (\pi/6)\ s$ (si ricordi che $\pi = 180°$).

Esercizio 7 (10 punti)

Un proiettile viene sparato con una velocità di modulo $v_0 = 20\ m\ s^{-1}$, e con una inclinazione di θ gradi rispetto al suolo. Sapendo che il proiettile raggiunge l'altezza massima in corrispondenza di un'ascissa $x_m = 10\ m$, calcolare l'angolo θ; calcolare poi l'altezza massima raggiunta dal proiettile lungo la sua traiettoria.

Esercizio 8 (6 punti)

Si considerino cinque cariche puntiformi q_1, q_2, q_3, q_4, q_5. I valori delle prime tre cariche sono $q_1 = 3 \cdot 10^{-5}\ C$, $q_2 = 4 \cdot 10^{-5}\ C$, e $q_3 = -5 \cdot 10^{-5}\ C$. Sapendo che il flusso del campo elettrico, generato dalle cariche attraverso una superficie chiusa S *che ha al suo interno solo le prime quattro cariche*, vale

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{\epsilon_0},$$

(dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto), calcolare la carica q_4.

Esercizio 9 (10 punti)

Un corpo scivola con attrito lungo un piano inclinato di 60°. Se l'altezza del piano inclinato è $h = 15\ m$, il coefficiente di attrito dinamico vale $c_d = 0.3$, ed il corpo parte con una velocità iniziale di 2 metri al secondo dalla cima del piano inclinato, calcolare la velocità del corpo alla fine del piano inclinato.

PROVA DI INFORMATICA
(REGOLA CON LA QUALE VIENE ASSEGNATO IL VOTO:

1) L'esame non è superato se su ciascuna delle due parti (MECCANICA E ELETTROMAGNETISMO) lo studente non ottiene almeno 9 punti,
2) se V_1 è il punteggio complessivo degli esercizi di MECCANICA e V_2 è il punteggio complessivo degli esercizi di ELETTROMAGNETISMO, il voto finale sarà:

$$V = \frac{2}{3}\, V_1 + \frac{1}{3}\, V_2.$$

Esempio pratico: $V_1 = 24\ V_2 = 12; V = 20.$)

MECCANICA

Esercizio 1 (4 punti)

Si faccia l'analisi dimensionale dei due membri delle seguenti uguaglianze, e si dica quali sono dimensionalmente corrette e quali no:

$$1)\ m\ v^3\ t = L\ ;\ 2)\ F\ T\ v = L;$$

$$3)\ a\ l^{-1}\ \omega^{-1} = \omega^{'};\ 4)\ 4\ \pi\ \epsilon_0\ V\ l = Q;$$

dove:
- nella 1) m è una massa, v una velocità, t un tempo, e L un lavoro;
- nella 2) F è una forza, T un periodo, v una velocità, e L un lavoro;
- nella 3) a è un'accelerazione, l una lunghezza, ω e $\omega^{'}$ velocità angolari;
- nella 4) ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto, V è un potenziale elettrostatico, l è una lunghezza, e Q è una carica elettrica.

Esercizio 2 (4 punti)

Un corpo di massa $m = 2\ Kg$ si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione costante a; se il corpo dopo 5 secondi ha percorso 100 metri, calcolare la forza che lo fa muovere.

Esercizio 3 (8 punti)

Un corpo scende senza attrito lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha = 60°$, e di base $l = 30\ m$ (nelle nostre notazioni, il piano inclinato è rappresentato da un triangolo rettangolo ABC, in cui i due cateti sono AB (l'altezza) e BC (la base), e l'ipotenusa AC è la lunghezza del piano inclinato). Calcolare, usando la conservazione dell'energia meccanica,:

a) qual'è la velocità del corpo alla fine del piano inclinato se parte da fermo;

b) qual'è la velocità del corpo alla fine del piano inclinato se parte con una velocità iniziale di 4 m/s;

Esercizio 4 (7 punti)

Una molla di costante elastica $k = 8N/m$ è attaccata ad un corpo di massa $m = 2\ Kg$. All'istante iniziale la molla passa per il suo punto di equilibrio con una velocità $v(0)$. Calcolare quanto vale $v(0)$ se il corpo dopo un tempo $t = \pi/4\ s$ dall'istante iniziale ha percorso 1 metro. Calcolare la velocità del corpo dopo un tempo $t = (\pi/6)\ s$ (si ricordi che $\pi = 180°$).

Esercizio 5 (5 punti)

Un proiettile viene sparato con una velocità di modulo $v_0 = 20\ m\ s^{-1}$, e con una inclinazione di 30 gradi rispetto al suolo. Calcolare l'altezza massima raggiunta dal proiettile lungo la sua traiettoria.

Esercizio 6 (10 punti)

Un corpo scivola con attrito lungo un piano inclinato di 60°. Se l'altezza del piano inclinato è $h = 15\ m$, il coefficiente di attrito dinamico vale $c_d = 0.3$, ed il corpo parte con una velocità iniziale di 2 metri al secondo dalla cima del piano inclinato, calcolare la velocità del corpo alla fine del piano inclinato.

Esercizio 7 (4 punti)

Calcolare il baricentro di quattro masse poste ai quattro vertici di un quadrato di lato pari ad 1 metro. Le masse sono disposte nel modo seguente: la massa $m_1 = 2\ Kg$ è posta nel vertice P_1 in basso a sinistra del quadrato; la massa $m_2 = 3\ Kg$ è posta nel vertice P_2 in alto a sinistra del quadrato; la massa $m_3 = 1\ Kg$ è posta nel vertice P_3 in alto a destra del quadrato; la massa $m_4 = 5\ Kg$ è posta nel vertice P_4 in basso a destra del quadrato.

ELETTROMAGNETISMO

Esercizio 8 (6 punti)

Si considerino cinque cariche puntiformi $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 5$. I valori delle prime tre cariche sono $q_1 = 3 \cdot 10^{-5}\ C$, $q_2 = 4 \cdot 10^{-5}\ C$, e $q_3 = -5 \cdot 10^{-5}\ C$. Sapendo che il flusso del campo elettrico, generato dalle cariche attraverso una superficie chiusa S *che ha al suo interno solo le prime quattro cariche*, vale

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{\epsilon_0},$$

(dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto), calcolare la carica q_4.

Esercizio 9 (8 punti)

In un circuito elettrico sono inseriti una resistenza $R = 400\ \Omega$, ed una forza elettromotrice $f = 200\ Volt$ che possiede una resitenza interna r. Sapendo che l'intensità di corrente generata nel circuito è $i = 0.48\ A$, calcolare la resitenza interna r.

Esercizio 10 (8 punti)

In un circuito RC la resistenza vale $R = 200\ \Omega$. Sapendo che la carica si riduce a $q(0)\ e^{-1}$ dopo $4 \cdot 10^{-4}\ s$, calcolare la capacità.

Esercizio 11 (12 punti)

In un circuito RC dopo $2 \cdot 10^{-3}\ s$ la carica vale $0.4 \cdot 10^{-6}\ C$, mentre la carica iniziale vale $q(0) = 3 \cdot 10^{-6}\ s$. Calcolare la resistenza sapendo che la capacità vale $0.6\ \mu F$.

Esercizio 12 (12 punti)

In un circuito RC il modulo della corrente iniziale vale $2 \cdot 10^{-3}\ A$. Sapendo che dopo il tempo caratteristico $\tau = RC$ la carica vale $q(\tau) = 0.1 \cdot 10^{-6}\ C$, calcolare il tempo caratteristico.

PROVA DEL SECONDO MODULO (COMPLEMENTI DI FISICA) PER GLI STUDENTI DI INFORMATICA APPLICATA

Esercizio 1 (4 punti)

Calcolare il baricentro di quattro masse poste ai quattro vertici di un quadrato di lato pari ad 1 metro. Le masse sono disposte nel modo seguente: la massa $m_1 = 2\ Kg$ è posta nel vertice P_1 in basso a sinistra del quadrato; la massa $m_2 = 3\ Kg$ è posta nel vertice P_2 in alto a sinistra del quadrato; la massa $m_3 = 1\ Kg$ è posta nel vertice P_3 in alto a destra del quadrato; la massa $m_4 = 5\ Kg$ è posta nel vertice P_4 in basso a destra del quadrato.

Esercizio 2 (4 punti)

Calcolare il baricentro di tre masse poste ai vertici di un triangolo rettangolo i cui due cateti sono uguali e di lunghezza 2 metri. di lato pari ad 1 metro. Le masse sono disposte nel modo seguente: la massa $m_1 = 5\ Kg$ è posta nel vertice P_1 in basso a sinistra del triangolo (corrispondente all'angolo di 90°); la massa $m_2 = 2\ Kg$ è posta nel vertice P_2 in basso a destra del triangolo; la massa $m_3 = 3\ Kg$ è posta nel vertice P_3 in alto a sinistra del triangolo.

Esercizio 3 (6 punti)

Si considerino cinque cariche puntiformi q_1, q_2, q_3, q_4, q_5. I valori delle prime tre cariche sono $q_1 = 3 \cdot 10^{-5}\ C$, $q_2 = 4 \cdot 10^{-5}\ C$, e $q_3 = -5 \cdot 10^{-5}\ C$. Sapendo che il flusso del campo elettrico, generato dalle cariche attraverso una superficie chiusa S *che ha al suo interno solo le prime quattro cariche*, vale

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{\epsilon_0},$$

(dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto), calcolare la carica q_4.

Esercizio 4 (8 punti)

In un circuito elettrico sono inseriti una resistenza $R = 400\ \Omega$, ed una forza elettromotrice $f = 200\ Volt$ che possiede una resitenza interna r. Sapendo che l'intensità di corrente generata nel circuito è $i = 0.48\ A$, calcolare la resitenza interna r.

Esercizio 5 (8 punti)

In un circuito RC la resistenza vale $R = 200\ \Omega$. Sapendo che la carica si riduce a $q(0)\ e^{-1}$ dopo $4 \cdot 10^{-4}\ s$, calcolare la capacità.

Esercizio 6 (12 punti)

In un circuito RC dopo $2 \cdot 10^{-3}\ s$ la carica vale $0.4 \cdot 10^{-6}\ C$, mentre la carica iniziale vale $q(0) = 3 \cdot 10^{-6}\ s$. Calcolare la resistenza sapendo che la capacità vale $0.6\ \mu F$.

Esercizio 7 (12 punti)

: In un circuito RC il modulo della corrente iniziale vale $2 \cdot 10^{-3}\ A$. Sapendo che dopo il tempo caratteristico $\tau = RC$ la carica vale $q(\tau) = 0.1 \cdot 10^{-6}\ C$, calcolare il tempo caratteristico.

Soluzioni scritti del 5/02/07

Soluzioni INFORMATICA APPLICATA

Esercizio 1

$$1)\ [m\ v^3\ t] = [m\ l^3\ t^{-3}\ t] = [m\ l^3\ t^{-2}],$$

$$[L] = [F\ l] = [m\ a\ l] = [m\ l\ t^{-2}\ l] = [m\ l^2\ t^{-2}],$$

NO

$$2)\ [F\ T\ v] = [F\ t\ l\ t^{-1}] = [F\ l] = [L],$$

SI

$$3)\ [a\ l^{-1}\ \omega^{-1}] = [l\ t^{-2}\ l^{-1}\ t^{-1^{-1}}] = [t^{-2}\ t] = [t^{-1}],$$

$$[\omega^{'}] = [t^{-1}],$$

SI

$$4)\ [m\ R\ \omega^2] = [m\ l\ t^{-2}] = [m\ a] = [F]$$

SI

Esercizio 2

$$x(5) \equiv 100\ m = \frac{1}{2}\ a\ (5^2)\ m = 12.5 \cdot a,$$

$$a = 8\ m\ s^{-2},$$

$$F = m\ a = 16\ N.$$

Esercizio 3

$$a)\ 0 = v(4) = v(0) + a\,t = v(0) - 4 \cdot 4 = v(0) - 16,$$

$$v(0) = 16\ m\ s^{-1}.$$

$$b)\ x(4) = 16 \cdot 4 - \frac{1}{2}\,4\,(4^2)\ m = (64 - 32)\ m = 32\ m.$$

Esercizio 4

$$h = l\ \sin\ \alpha = 40\ \sin\ \alpha$$

$$m\ g\ h \equiv m \cdot 40 \cdot 10 \cdot \sin\ \alpha = m \cdot 400 \cdot \sin\ \alpha,$$

$$m \cdot 400 \cdot \sin\ \alpha = \frac{1}{2}\,m \cdot 400,$$

$$\sin\ \alpha = \frac{200}{400} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha = 30^\circ.$$

Esercizio 5

$$a)\ h = l\ \tan\ \alpha = 30 \cdot \tan\ 60^\circ = 30 \cdot \sqrt{3},$$

$$m \cdot 300 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}\,m\,v^2,$$

$$v = \sqrt{600 \cdot \sqrt{3}} \approx 32.23\ m\ s^{-1}.$$

$$b)\ m \cdot 300 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2}\ m\ 4^2 = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$v = \sqrt{600 \cdot \sqrt{3} + 8} \approx 32.36\ m\ s^{-1}.$$

$$c)\ L = 30/\cos\ \alpha = 60\ m,$$

$$m \cdot \frac{1}{4} \cdot 300 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}\ m\ (v^{'})^2,$$

$$v^{'} = \sqrt{150 \cdot \sqrt{3}} \approx\ 16.10 m\ s^{-1}.$$

Esercizio 6

$$\omega = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2\ s^{-1},$$

$$x(t) = \frac{v(0)}{2} \sin\ (2\ t),$$

$$1 = \frac{v(0)}{2}\ \sin\ (2\ \frac{\pi}{4}) = \frac{v(0)}{2},$$

$$v(0) = 2\ m\ s^{-1},$$

$$v(t) \doteq \frac{dx(t)}{dt} = \frac{v(0)}{2} \cdot 2 \cdot \sin\ (2\ t) = v(0) \cdot \sin\ (2\ t),$$

$$v(\frac{\pi}{6}) = 2 \cdot \sin\ (2\ \frac{\pi}{6}) = 2 \cdot \sin\ (\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}\ m\ s^{-1} \approx 1.73\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 7

$$y(x) = (\tan\ \theta)\ x - \frac{1}{2}\ g \frac{x^2}{(v_0\ \cos\ \theta)^2},$$

$$0 = y^{'}(10) = (\tan\ \theta) - \frac{100}{400\ (\cos\ \theta)^2},$$

$$\frac{\sin\ \theta}{\cos\ \theta} - \frac{1}{4\ (\cos\ \theta)^2} = 0,$$

$$\sin\ \theta = \frac{1}{4\ \cos\ \theta},$$

$$\sin^2\ \theta = \frac{1}{16\ \cos^2\ \theta},$$

$$1 - \cos^2\ \theta = \frac{1}{16\ \cos^2\ \theta},$$

$$(1 - \cos^2\ \theta)\ \cos^2\ \theta = \frac{1}{16}$$

$$16\ \cos^4 \theta - 16\ \cos^2\ \theta + 1 = 0,$$

$$\cos^2\ \theta = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{16};$$

a questo punto considero concluso l'esercizio perch la successiva analisi per discriminare tra le diverse soluzioni è eccessivamente complessa.

Esercizio 8

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}[q_1 + q_2 + q_3 + q - 4]$$

$$\frac{6 \cdot 10^{-5}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}[3 \cdot 10^{-5} + 4 \cdot 10^{-5} - -5 \cdot 10^{-5} + q_4] = \frac{1}{\epsilon_0}[2 \cdot 10^{-5} + q_4],$$

$$q_4 = 4\ C.$$

Esercizio 9

$$L + \frac{1}{2}\ m\ v_0^2 - L_a = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$L = m\ g\ h\ \ ;\ \ L_a = c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha)\ l = c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha)\ \frac{h}{\sin\ \alpha} = c_d\ m\ g\ h\ \cot\ \alpha,$$

$$(m\ g\ h)\ (1 - c_d\ \cot\ \alpha) + \frac{1}{2}\ m\ v_0^2 = \frac{1}{2}\ m\ v2,$$

$$300\ (1 - 0.3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}) + 4 = v_0^2,$$

$$v_0^2 \approx 252\ m^2\ s^{-2},$$

$$v_0 \approx \sqrt{252}\ m\ s^{-1} \approx 15.87\ m\ s^{-1}.$$

Soluzioni INFORMATICA

Esercizio 1

$$1)\ [m\ v^3\ t] = [m\ l^3\ t^{-3}\ t] = [m\ l^3\ t^{-2}],$$

$$[L] = [F\ l] = [m\ a\ l] = [m\ l\ t^{-2}\ l] = [m\ l^2\ t^{-2}],$$

NO

$$2)\ [F\ T\ v] = [F\ t\ l\ t^{-1}] = [F\ l] = [L],$$

SI

$$3)\ [a\ l^{-1}\ \omega^{-1}] = [l\ t^{-2}\ l^{-1}\ t^{-1^{-1}}] = [t^{-2}\ t] = [t^{-1}],$$

$$[\omega^{'}] = [t^{-1}],$$

SI

$$4)\ [V] = [E\ l] = [\frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{q}{r^2}\ l] = [\frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{q}{l^2}\ l] = [\frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{q}{l}]$$

$$[4\ \pi\ \epsilon_0\ V\ l] = [4\ \pi\ \epsilon_0\ \frac{1}{4\ \pi\ \epsilon_0}\ \frac{q}{l}\ l] = [q].$$

SI

Esercizio 2

$$x(5) \equiv 100\ m = \frac{1}{2}\ a\ (5^2)\ m = 12.5 \cdot a,$$

$$a = 8\ m\ s^{-2},$$

$$F = m\ a = 16\ N.$$

Esercizio 3

$$a)\ h = l\ \tan\ \alpha = 30 \cdot \tan\ 60° = 30 \cdot \sqrt{3},$$

$$m \cdot 300 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$v = \sqrt{600 \cdot \sqrt{3}} \approx 32.23\ m\ s^{-1}.$$

$$b)\ m \cdot 300 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2}\ m\ 4^2 = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$v = \sqrt{600 \cdot \sqrt{3} + 8} \approx 32.36\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 4

$$\omega = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2\ s^{-1},$$

$$x(t) = \frac{v(0)}{2} \sin\,(2\ t),$$

$$1 = \frac{v(0)}{2}\ \sin\,(2\ \frac{\pi}{4}) = \frac{v(0)}{2},$$

$$v(0) = 2\ m\ s^{-1},$$

$$v(t) \doteq \frac{dx(t)}{dt} = \frac{v(0)}{2} \cdot 2 \cdot \sin\,(2\ t) = v(0) \cdot \sin\,(2\ t),$$

$$v(\frac{\pi}{6}) = 2 \cdot \sin\,(2\ \frac{\pi}{6}) = 2 \cdot \sin\,(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}\ m\ s^{-1} \approx 1.73\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 5

Conservazione dell'energia lungo l'asse Y:

$$\frac{1}{2}\ m\ (v_y)^2 = m\ g\ y_m,$$

$$y_m = \frac{(v_y)^2}{2\ g},$$

$$v_y = v_0\ \sin\ 30^\circ = 10\ m\ s^{-1},$$

$$y_m = \frac{100}{20} = 5\ m;$$

oppure si può risolvere scrivendo la traiettoria $y(x)$ imponendo $y^{'}(x_m) = 0$, e sostituendo il valore di x_m trovato nella traiettoria si ricava l'altezza massima

$$y_m = y(x_m).$$

Esercizio 6

$$L + \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 - L_a = \frac{1}{2}\, m\, v2,$$

$$L = m\ g\ h \ \ ; \ \ L_a = c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha)\ l = c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha)\ \frac{h}{\sin\ \alpha} = c_d\ m\ g\ h\ \cot\ \alpha,$$

$$(m\ g\ h)\ (1 - c_d\ \cot\ \alpha) + \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 = \frac{1}{2}\, m\, v2,$$

$$300\ (1 - 0.3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}) + 4 = v_0^2,$$

$$v_0^2 \approx 252\ m^2\ s^{-2},$$

$$v_0 \approx \sqrt{252}\ m\ s^{-1} \approx 15.87\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 7

Scelgo un sistema di riferimento con origine nel punto P_1 (massa m_1), con l'asse X coincidente com la retta che comprende P_1 e $P-4$, e con l'asse Y coincidente com la retta che comprende P_1 e $P-2$. Allora le coordinate dei punti saranno:

$$P_1 \equiv (0,0) \ \ ; \ \ P_2 \equiv (0,1);$$

$$P_3 \equiv (1,1) \ \ ; \ \ P_4 \equiv (1,0).$$

La massa totale è:

$$m_{tot} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 11\ Kg.$$

Le coordinate X e Y del baricentro sono:

$$x_B = \frac{6}{11},$$

$$y_B = \frac{4}{11}.$$

Esercizio 8

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}[q_1 + q_2 + q_3 + q_4]$$

$$\frac{6 \cdot 10^{-5}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}[3 \cdot 10^{-5} + 4 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-5} + q_4] = \frac{1}{\epsilon_0}[2 \cdot 10^{-5} + q_4],$$

$$q_4 = 4\ C.$$

Esercizio 9

$$f = (R + r)\ i,$$

$$r = \frac{f - R\ i}{i},$$

$$r = \frac{200 - 400 \cdot 0.48}{0.48} \approx 16.66\ \Omega.$$

Esercizio 10

$$\tau \equiv R\ C = 4 \cdot 10^{-4}\ s,$$

$$C = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{200} = 2\ \mu F.$$

Esercizio 11

$$\ln\left[\frac{0.4 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}}\right] = -\frac{2 \cdot 10^{-3}}{0.6 \cdot 10^{-6} \cdot R},$$

$$-2.01 = -\frac{2 \cdot 1.666 \cdot 10^{3}}{R},$$

$$R \approx 1666\Omega.$$

Esercizio 12

$$q(\tau) = q(0) \cdot e^{-1};$$

allora abbiamo

$$q(0) = q(\tau) \cdot e = 0.1 \cdot 10^{-6} \cdot e \approx 0.271 \cdot 10^{-6}\ C.$$

Poichè il modulo della corrente iniziale è $|i(0)| = \frac{q(0)}{RC} \equiv \frac{q(0)}{\tau}$, abbiamo

$$2 \cdot 10^{-3} = \frac{0.271 \cdot 10^{-6}}{\tau},$$

e quindi

$$\tau \approx \frac{0.271 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} \approx \cdot 1.35 \cdot 10^{-4}\ s.$$

Soluzioni SECONDO MODULO INFORMATICA APPLICATA

Esercizio 1

Scelgo un sistema di riferimento con origine nel punto P_1 (massa m_1), con l'asse X coincidente com la retta che comprende P_1 e P_4, e con l'asse Y coincidente com la retta che comprende P_1 e $P - 2$. Allora le coordinate dei punti saranno:

$$P_1 \equiv (0,0)\ \ ;\ \ P_2 \equiv (0,1);$$

$$P_3 \equiv (1,1)\ \ ;\ \ P_4 \equiv (1,0).$$

La massa totale è:

$$m_{tot} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 11\ Kg.$$

Le coordinate X e Y del baricentro sono:

$$x_B = \frac{6}{11},$$

$$y_B = \frac{4}{11}.$$

Esercizio 2

Scelgo un sistema di riferimento con origine nel punto P_1 (massa m_1), con l'asse X coincidente com la retta che comprende P_1 e P_2, e con l'asse Y coincidente com la retta che comprende P_1 e P_3. Allora le coordinate dei punti saranno:

$$P_1 \equiv (0,0) \;\; ; \;\; P_2 \equiv (2,0) \;\; ; \;\; P_3 \equiv (0,2);$$

La massa totale è:

$$m_{tot} = m_1 + m_2 + m_3 = 10 \; Kg.$$

Le coordinate X e Y del baricentro sono:

$$x_B = \frac{2}{5},$$

$$y_B = \frac{3}{5}.$$

Esercizio 3

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}[q_1 + q_2 + q_3 + q_4]$$

$$\frac{6 \cdot 10^{-5}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}[3 \cdot 10^{-5} + 4 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-5} + q_4] = \frac{1}{\epsilon_0}[2 \cdot 10^{-5} + q_4],$$

$$q_4 = 4 \; C.$$

Esercizio 4

$$f = (R + r)\, i,$$

$$r = \frac{f - R\, i}{i},$$

$$r = \frac{200 - 400 \cdot 0.48}{0.48} \approx 16.66\ \Omega.$$

Esercizio 5

$$\tau \equiv R\, C = 4 \cdot 10^{-4}\ s,$$

$$C = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{200} = 2\ \mu F.$$

Esercizio 6

$$\ln \left[\frac{0.4 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}} \right] = -\frac{2 \cdot 10^{-3}}{0.6 \cdot 10^{-6} \cdot R},$$

$$-2.01 = -\frac{2 \cdot 1.666 \cdot 10^{3}}{R},$$

$$R \approx 1666\Omega.$$

Esercizio 7

$$q(\tau) = q(0) \cdot e^{-1};$$

allora abbiamo

$$q(0) = q(\tau) \cdot e = 0.1 \cdot 10^{-6} \cdot e \approx 0.271 \cdot 10^{-6}\ C.$$

Poichè il modulo della corrente iniziale è $|i(0)| = \frac{q(0)}{RC} \equiv \frac{q(0)}{\tau}$, abbiamo

$$2 \cdot 10^{-3} = \frac{0.271 \cdot 10^{-6}}{\tau},$$

e quindi

$$\tau \approx \frac{0.271 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} \approx \cdot 1.35 \cdot 10^{-4}\ s.$$

Scritti del 22/2/2007

PROVA DI INFORMATICA APPLICATA

Esercizio 1 (4 punti)

Si faccia l'analisi dimensionale dei due membri delle seguenti uguaglianze, e si dica quali sono dimensionalmente corrette e quali no:

$$1) F\ m\ v\ T = p^2\ ;\ 2)\ a^2\ t^2 = v^2;$$

$$3)\ m\ R\ \omega^{-1}\ v = L;\ 4)\ m\ v\ \omega = F;$$

dove:
- nella 1) F è una forza, m una massa, v una velocità, T un periodo, e p un momento (pari al prodotto di massa per velocità);
- nella 2) a è un'accelerazione, t un tempo, e v una velocità;
- nella 3) m è una massa, R un raggio, ω una velocità angolare, v una velocità, e L un lavoro;
- nella 4) m è una massa, v una velocità, ω una velocità angolare, e F una forza.

Esercizio 2 (4 punti)

Un corpo di massa $m = 3\ Kg$ si muove, partendo da fermo, di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione costante a; se il corpo dopo 10 secondi ha acquistato una velocità di 30 metri al secondo, calcolare:

a) il modulo della forza che lo fa muovere,

b) lo spazio percorso nei 10 secondi.

Esercizio 3 (6 punti)

Un corpo compie un moto rettilineo uniformemente *decelerato* e, partendo con una velocità iniziale $v(0) = 20$ metri al secondo, si ferma dopo 100 metri. Calcolare:

a) quanto vale la decelerazione (accelerazione negativa);

b) quanto spazio ha percorso il corpo nei primi 5 secondi.

Esercizio 4 (6 punti)

Un corpo scende senza attrito lungo un piano inclinato la cui base b e la cui altezza h misurano ambedue 20 metri: $b = h = 20\ m$ (nelle nostre notazioni, il piano inclinato è rappresentato da un triangolo rettangolo ABC, in cui i due cateti sono AB (l'altezza) e BC (la base), e l'ipotenusa AC è la lunghezza del piano inclinato). Calcolare, usando la conservazione dell'energia meccanica, quanto vale la velocità del corpo quando ha percorso metà della lunghezza l del piano inclinato.

Esercizio 5 (12 punti)

Un corpo scende senza attrito lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha = 30°$. Sapendo che dopo aver percorso metà della lunghezza del piano inclinato il corpo ha accquistato una velocità di 10 metri al secondo, calcolare, usando la conservazione dell'energia meccanica,:

a) l'altezza del piano inclinato;

b) la velocità del corpo alla fine del piano inclinato se parte da fermo;

c) la velocità del corpo alla fine del piano inclinato se parte con una velocità iniziale di 5 m/s.

Esercizio 6 (7 punti)

Una molla di costante elastica $k = 16N/m$ è attaccata ad un corpo di massa $m = 4\ Kg$. All'istante iniziale la molla si trova a distanza di 3 m dal punto di equilibrio, ed ha velocità nulla. Calcolare:

a) a che distanza dal punto di equilibrio si troverà il corpo dopo un tempo $t = 1\ s$;

b) quanto vale la velocità del corpo quando passa per il punto di equilibrio.

Esercizio 7 (10 punti)

Un proiettile viene sparato con una velocità di modulo v_0, e con una inclinazione di 30 gradi rispetto al suolo. Sapendo che il proiettile raggiunge il punto di impatto col suolo a distanza di 100 metri dall'origine, calcolare v_0.

Esercizio 8 (6 punti)

Si considerino tre cariche puntiformi q_1, q_2, q_3, i cui valori sono $q_1 = 5 \cdot 10^{-5}\ C$, $q_2 = -2 \cdot 10^{-5}\ C$, e $q_3 = 4 \cdot 10^{-5}\ C$. Calcolare il flusso del campo elettrico generato dalle cariche attraverso una superficie chiusa S *che ha al suo interno solo le prime due cariche.*

Esercizio 9 (10 punti)

Un corpo scivola con attrito lungo un piano inclinato di 30°. Se la base del piano inclinato è $b = 20\ m$, il coefficiente di attrito dinamico vale $c_d = 0.3$, ed il corpo parte con una velocità iniziale di 4 metri al secondo dalla cima del piano inclinato, calcolare la velocità del corpo a metà del piano inclinato.

PROVA DI INFORMATICA
(*REGOLA CON LA QUALE VIENE ASSEGNATO IL VOTO:*

1) L'esame non è superato se su ciascuna delle due parti (MECCANICA E ELETTROMAGNETISMO) lo studente non ottiene almeno 9 *punti,*
2) se V_1 *è il punteggio complessivo degli esercizi di MECCANICA e* V_2 *è il punteggio complessivo degli esercizi di ELETTROMAGNETISMO, il voto finale sarà:*

$$V = \frac{2}{3}\,V_1 + \frac{1}{3}\,V_2.$$

Esempio pratico: $V_1 = 24\ V_2 = 12; V = 20.$)

MECCANICA

Esercizio 1 (4 punti)

Si faccia l'analisi dimensionale dei due membri delle seguenti uguaglianze, e si dica quali sono dimensionalmente corrette e quali no:

$$1) F\ m\ v\ T = p^2\ ;\ 2)\ a^2\ t^2 = v^2;$$

$$3)\ m\ R\,\omega^{-1}\ v = L;\ 4)\ m\ v\ \omega = F;$$

dove:
- nella 1) F è una forza, m una massa, v una velocità, T un periodo, e p un momento (pari al prodotto di massa per velocità);
- nella 2) a è un'accelerazione, t un tempo, e v una velocità;
- nella 3) m è una massa, R un raggio, ω una velocità angolare, v una velocità, e L un lavoro;
- nella 4) m è una massa, v una velocità, ω una velocità angolare, e F una forza.

Esercizio 2 (4 punti)

Un corpo di massa $m = 3\ Kg$ si muove, partendo da fermo, di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione costante a; se il corpo dopo 10 secondi ha acquistato una velocità di 30 metri al secondo, calcolare:

a) il modulo della forza che lo fa muovere,

b) lo spazio percorso nei 10 secondi.

Esercizio 3 (8 punti)

Un corpo scende senza attrito lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha = 30°$. Sapendo che dopo aver percorso metà della lunghezza del piano inclinato il corpo ha accquistato una velocità di 10 metri al secondo, calcolare, usando la conservazione dell'energia meccanica,:

a) l'altezza del piano inclinato;

b) la velocità del corpo alla fine del piano inclinato se parte da fermo.

Esercizio 4 (7 punti)

Una molla di costante elastica $k = 16 N/m$ è attaccata ad un corpo di massa $m = 4\ Kg$. All'istante iniziale la molla si trova a distanza di 3 m dal punto di equilibrio, ed ha velocità nulla. Calcolare:

a) a che distanza dal punto di equilibrio si troverà il corpo dopo un tempo $t = 1\ s$;

b) quanto vale la velocità del corpo quando passa per il punto di equilibrio.

Esercizio 5 (5 punti)

Un proiettile viene sparato con una velocità di modulo $v_0 = 30\ m\ s^{-1}$, e con una inclinazione di 45 gradi rispetto al suolo. Calcolare la distanza dall'origine del punto di impatto col suolo.

Esercizio 6 (10 punti)

Un corpo scivola con attrito lungo un piano inclinato di 30°. Se la base del piano inclinato è $b = 20\ m$, il coefficiente di attrito dinamico vale $c_d = 0.3$, ed il corpo parte con una velocità iniziale di 4 metri al secondo dalla cima del piano inclinato, calcolare la velocità del corpo a metà del piano inclinato.

Esercizio 7 (4 punti)

Quattro masse sono poste ai quattro vertici di un quadrato di lato pari a 2 metri, e disposte nel modo seguente: la massa $m_1 = 3\ Kg$ è posta nel vertice P_1 in basso a sinistra del quadrato; la massa $m_2 = 1\ Kg$ è posta nel vertice P_2 in alto a sinistra del quadrato; la massa $m_3 = 3\ Kg$ è posta nel vertice P_3 in alto a destra del quadrato; la massa $m_4 = 4\ Kg$ è posta nel vertice P_4 in basso a destra del quadrato. Infine, una quinta massa che vale $m_5 = 6\ Kg$ è posta all'incrocio delle diagonali del quadrato. Calcolare il baricentro.

ELETTROMAGNETISMO

Esercizio 8 (6 punti)

Si considerino tre cariche puntiformi q_1, q_2, q_3, i cui valori sono $q_1 = 5 \cdot 10^{-5}\ C$, $q_2 = -2 \cdot 10^{-5}\ C$, e $q_3 = 4 \cdot 10^{-5}\ C$. Calcolare il flusso del campo elettrico generato dalle cariche attraverso una superficie chiusa S *che ha al suo interno solo le prime due cariche.*

Esercizio 9 (8 punti)

Un circuito elettrico contiene una forza elettromotrice $f = 300\ Volt$, la cui resistenza interna r vale $10\ \Omega$, e due resistenze poste in serie $R_1 = 300\ \Omega$ e $R_2 = 500\ \Omega$. Calcolare la differenza tra l'intensità di corrente che si avrebbe in assenza di resistenza interna e quella che si ha in presenza della resistenza interna di $10\ \Omega$.

Esercizio 10 (8 punti)

In un circuito RC la capacità vale $C = 3\ \mu F$ e la resistenza $R = 500\ \Omega$. Calcolare quanto vale la carica dopo il tempo caratteristico τ se la carica iniziale vale $q(0) = 6 \cdot 10^{-5}\ C$.

Esercizio 11 (12 punti)

In un circuito RC la carica iniziale vale $q(0) = 4 \cdot 10^{-5}\ C$, e la resistenza vale $R = 300\ \Omega$. Calcolare quanto deve valere la capacità C affinchè la carica diventi un decimo di quella iniziale dopo un tempo di $8 \cdot 10^{-4}\ s$.

Esercizio 12 (12 punti)

In un circuito RC la resistenza vale $R = 400\ \Omega$, e la capacità vale $C = 4\ \mu F$; inoltre, dopo un tempo $t = 10^{-3}$ secondi la carica vale $2 \cdot 10^{-5}\ C$. Calcolare quanto vale il modulo dell'intensità di corrente dopo un tempo $t = 6 \cdot 10^{-4}$ secondi.

PROVA DEL SECONDO MODULO (COMPLEMENTI DI FISICA) PER GLI STUDENTI DI INFORMATICA APPLICATA

Esercizio 1 (4 punti)

Quattro masse sono poste ai quattro vertici di un quadrato di lato pari a 2 metri, e disposte nel modo seguente: la massa $m_1 = 3\ Kg$ è posta nel vertice P_1 in basso a sinistra del quadrato; la massa $m_2 = 1\ Kg$ è posta nel vertice P_2 in alto a sinistra del quadrato; la massa $m_3 = 3\ Kg$ è posta nel vertice P_3 in alto a destra del quadrato; la massa $m_4 = 4\ Kg$ è posta nel vertice P_4 in basso a destra del quadrato. Infine, una quinta massa che vale $m_5 = 6\ Kg$ è posta all'incrocio delle diagonali del quadrato. Calcolare il baricentro.

Esercizio 2 (4 punti)

Calcolare il baricentro di tre masse poste su tre dei quattro vertici di un quadrato di lato pari a 3 metri. Le masse sono disposte nel modo seguente: la massa $m_1 = 3\ Kg$ è posta nel vertice P_1 in basso a sinistra del quadrato; la massa $m_2 = 8\ Kg$ è posta nel vertice P_2 in alto a destra del quadrato; la massa $m_3 = 1\ Kg$ è posta nel vertice P_3 in alto a sinistra del quadrato.

Esercizio 3 (6 punti)

Si considerino tre cariche puntiformi q_1, q_2, q_3, i cui valori sono $q_1 = 5 \cdot 10^{-5}\ C$, $q_2 = -2 \cdot 10^{-5}\ C$, e $q_3 = 4 \cdot 10^{-5}\ C$. Calcolare il flusso del campo elettrico generato dalle cariche attraverso una superficie chiusa S *che ha al suo interno solo le prime due cariche.*

Esercizio 4 (8 punti)

Un circuito elettrico contiene una forza elettromotrice $f = 300\ Volt$, la cui resistenza interna r vale 10 Ω, e due resistenze poste in serie $R_1 = 300\ \Omega$ e $R_2 = 500\ \Omega$. Calcolare la differenza tra l'intensità di corrente che si avrebbe in assenza di resistenza interna e quella che si ha in presenza della resistenza interna di 10 Ω.

Esercizio 5 (8 punti)

In un circuito RC la capacità vale $C = 3\ \mu F$ e la resistenza $R = 500\ \Omega$. Calcolare quanto vale la carica dopo il tempo caratteristico τ se la carica iniziale vale a $q(0) = 6 \cdot 10^{-5}\ C$.

Esercizio 6 (12 punti)

In un circuito RC la carica iniziale vale $q(0) = 4 \cdot 10^{-5}\ C$, e la resistenza vale $R = 300\ \Omega$. Calcolare quanto deve valere la capacità C affinchè la carica diventi un decimo di quella iniziale dopo un tempo di $8 \cdot 10^{-4}\ s$.

Esercizio 7 (12 punti)

In un circuito RC la resistenza vale $R = 400\ \Omega$, e la capacità vale $C = 4\ \mu F$; inoltre, dopo un tempo $t = 10^{-3}$ secondi la carica vale $2 \cdot 10^{-5}\ C$. Calcolare quanto vale il modulo dell'intensità di corrente dopo un tempo $t = 6 \cdot 10^{-4}$ secondi.

Soluzioni scritti del 22 febbraio 2007

Soluzioni INFORMATICA APPLICATA

Esercizio 1

$$1)\ [F\ m\ v\ T] = [m\ a\ m\ \ l\ t^{-1}\ t] = [m^2\ l\ \ l] = [m^2\ l^2],$$

$$[p^2] = [m^2\ v^2],$$

NO

$$2)\ [a^2\ t^2] = [(at)^2] = [v^2],$$

SI

$$3)\ [m\ R\ \omega^{-1}\ v] = [m\ l\ t\ l\ t^{-1}] = [m\ l^2],$$

$$[L] = [m\ a\ l] = [m\ l\ t^{-2}\ l] = [m\ l^2\ t^{-2}],$$

NO

$$4)\ [m\ v\ \omega] = [m\ l\ t^{-1}\ t^{-1}] = [m\ l\ t^{-2}] = [m\ a] = [F],$$

SI

Esercizio 2

$$a)\ v = a\ t,$$

$$a = v/t = 30/10\ m\ s^{-2} = 3\ m\ s^{-2},$$

$$F = m\,a = 3 \cdot 3\ N = 9\ N.$$

$$b)\ x(10) = \frac{1}{2}\,a\,t^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (10)^2 = 150\ m.$$

Esercizio 3

$$a)\ \frac{1}{2}\,m\,(20)^2 = m\,|a| \cdot 100,$$

$$|a| = 2\ m\ s^{-2},$$

$$a = -2\ m\ s^{-2}.$$

$$b)\ x(5) = 20 \cdot 5 - \frac{1}{2}\,2\,(5^2)\ m = 75\ m.$$

Esercizio 4

$$\tan\ \alpha = h/b = 1,$$

$$\alpha = 45°,$$

$$m\,g\,(h/2) = \frac{1}{2}\,m\,v^2,$$

$$10 \cdot 10 = \frac{1}{2}\,v^2,$$

$$v = \sqrt{200} \approx 14.14\ m\ s^{-1}.$$

Nota: in realtà non è necessario calcolare α perchè, qualsiasi sia il suo valore, a met lunghezza del piano inclinato corrisponde comunque metà altezza (che era data).

Esercizio 5

$$a)\ m\ g\ (h/2) = \frac{1}{2}\ m\ (10)^2,$$

$$h = \frac{100}{g} \cdot 100 \approx 10\ m.$$

$$b)\ m\ g\ h = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$v = \sqrt{200} \approx 14.14\ m\ s^{-1}.$$

$$c)\ m\ g\ h = \frac{1}{2}\ m\ v^2 - \frac{1}{2}\ m\ {v_0}^2,$$

$$v' = \sqrt{200 + 25} = 15 m\ s^{-1}.$$

Esercizio 6

$$\omega = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2\ s^{-1},$$

$$x(t) = 3\ \cos\ (2\ t),$$

$$a)\ x(1) = 3\ \cos\ (2) = 3\ \cos\ \left(2 \cdot \frac{180}{\pi}\right) \approx 3\ \cos\ (114.6°) \approx -1.24\ m.$$

$$0 = x(\tau) \equiv 3\ \cos\ (2\ \tau),$$

$$\tau = \pi/4,$$

$$v(t) \doteq \frac{dx(t)}{dt} = -3 \cdot 2 \cdot \sin\ (2\ t) = -6 \cdot \sin\ (2\ t),$$

$$v(\pi/4) = -6 \cdot \sin\ (2 \cdot \pi/4) = -6\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 7

$$y(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\, x - \frac{10}{3} \cdot \frac{x^2}{{v_0}^2},$$

$$0 = y(x) \equiv x\, [\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{10}{3} \cdot \frac{x}{{v_0}^2}],$$

$$\sqrt{3} - 10 \cdot \frac{100}{{v_0}^2} = 0,$$

$$v = \sqrt{\frac{1000}{\sqrt{3}}} \approx 24\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 8

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}[q_1 + q_2] \approx \frac{3 \cdot 10^{-5}}{8.859 \cdot 10^{-12}} \approx 3.38 \cdot 10^6\ V \cdot m.$$

Esercizio 9

$$h = b \cdot \tan\ \alpha = 20 \cdot \tan\ 30^\circ = 20 \cdot (\sqrt{3}/3) \approx 11.54\ m,$$

$$l = b/(\cos\alpha) = 20/(\frac{\sqrt{3}}{2}) \approx 23.12\ m,$$

$$L + \frac{1}{2}\ m\ v_0^2 - L_a = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$L = m\ g\ (h/2),$$

$$L_a = c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha)\ (l/2) = c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha)\ \frac{h}{2\ \sin\ \alpha} = \frac{1}{2} c_d\ m\ g\ h\ \cot\ \alpha,$$

$$(m\ g\ (h/2))\ (1 - c_d\ \cot\ \alpha) + \frac{1}{2}\ m\ v_0^2 = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$115.4\ (1 - 0.3 \cdot \sqrt{3}) + 16 = v^2,$$

$$v \approx \sqrt{71.43}\ m\ s^{-1} \approx 8.45\ m\ s^{-1}.$$

Soluzioni INFORMATICA

Esercizio 1

$$1)\ [F\ m\ v\ T] = [m\ a\ m\ \ l\ t^{-1}\ t] = [m^2\ l\ \ l] = [m^2\ l^2],$$

$$[p^2] = [m^2\ v^2],$$

NO

$$2)\ [a^2\ t^2] = [(at)^2] = [v^2],$$

SI

$$3)\ [m\ R\ \omega^{-1}\ v] = [m\ l\ t\ l\ t^{-1}] = [m\ l^2],$$

$$[L] = [m\ a\ l] = [m\ l\ t^{-2}\ l] = [m\ l^2\ t^{-2}],$$

NO

$$4)\ [m\ v\ \omega] = [m\ l\ t^{-1}\ t^{-1}] = [m\ l\ t^{-2}] = [m\ a] = [F],$$

SI

Esercizio 2

$$a)\ v = a\,t,$$

$$a = v/t = 30/10\ m\ s^{-2} = 3\ m\ s^{-2},$$

$$F = m\,a = 3 \cdot 3\ N = 9\ N.$$

$$b)\ x(10) = \frac{1}{2}\,a\,t^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (10)^2 = 150\ m.$$

Esercizio 3

$$a)\ m\,g\,(h/2) = \frac{1}{2}\,m\,(10)^2,$$

$$h = \frac{100}{g} \cdot 100 \approx 10\ m.$$

$$b)\ m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2,$$

$$v = \sqrt{200} \approx 14.14\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 4

$$\omega = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2\ s^{-1},$$

$$x(t) = 3\ \cos\,(2\,t),$$

$$a)\ x(1) = 3\ \cos\,(2) = 3\ \cos\,\left(2 \cdot \frac{180}{\pi}\right) \approx 3\ \cos\,(114.6^\circ) \approx -1.24\ m.$$

$$0 = x(\tau) \equiv 3\ \cos\,(2\ \tau),$$

$$\tau = \pi/4,$$

$$v(t) \doteq \frac{dx(t)}{dt} = -3 \cdot 2 \cdot \sin\,(2\ t) = -6 \cdot \sin\,(2\ t),$$

$$v(\pi/4) = -6 \cdot \sin\,(2 \cdot \pi/4) = -6\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 5

$$y(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\ x - \frac{10}{3} \cdot \frac{x^2}{{v_0}^2},$$

$$0 = y(x) \equiv x\ [\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{10}{3} \cdot \frac{x}{{v_0}^2}],$$

$$\sqrt{3} - 10 \cdot \frac{100}{{v_0}^2} = 0,$$

$$v = \sqrt{\frac{1000}{\sqrt{3}}} \approx 24\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 6

$$h = b \cdot \tan\ \alpha = 20 \cdot \tan\ 30^\circ = 20 \cdot (\sqrt{3}/3) \approx 11.54\ m,$$

$$l = b/(\cos\alpha) = 20/(\frac{\sqrt{3}}{2}) \approx 23.12\ m,$$

$$L + \frac{1}{2}\ m\ v_0^2 - L_a = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$L = m\ g\ (h/2),$$

$$L_a = c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha)\ (l/2) = c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha)\ \frac{h}{2\ \sin\ \alpha} = \frac{1}{2} c_d\ m\ g\ h\ \cot\ \alpha,$$

$$(m\ g\ (h/2))\ (1 - c_d\ \cot\ \alpha) + \frac{1}{2}\ m\ v_0^2 = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$115.4\ (1 - 0.3 \cdot \sqrt{3}) + 16 = v^2,$$

$$v \approx \sqrt{71.43}\ m\ s^{-1} \approx 8.45\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 7

Scelgo un sistema di riferimento con origine nel punto P_1 (massa m_1), con l'asse X coincidente com la retta che comprende P_1 e P_4, e con l'asse Y coincidente com la retta che comprende P_1 e P_2. Allora le coordinate dei punti saranno:

$$P_1 \equiv (0,0)\ \ ;\ \ P_2 \equiv (0,2);$$

$$P_3 \equiv (2,2)\ \ ;\ \ P_4 \equiv (2,0)\ \ ;\ \ P_5 \equiv (1,1).$$

La massa totale è:

$$m_{tot} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 17\ Kg.$$

Le coordinate X e Y del baricentro sono:

$$x_B = \frac{20}{17},$$

$$y_B = \frac{14}{17}.$$

Esercizio 8

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}[q_1 + q_2] \approx \frac{3 \cdot 10^{-5}}{8.859 \cdot 10^{-12}} \approx 3.38 \cdot 10^6 \; V \cdot m.$$

Esercizio 9

$$i_0 = f/(R_1 + R_2) = 0.375 \; A,$$

$$i_r = f/(R_1 + R_2 + r) \approx 0.37 \; A,$$

$$\Delta i = i_0 - i_r 16.66 \; 0.005 \; A.$$

Esercizio 10

$$\tau = 15 \cdot 10^{-4} \; s,$$

$$q(\tau) = q(0) \cdot e^{-1} \approx 2.2 \cdot 10^{-5} \; C.$$

Nota: in realtà non serve conoscere il valore numerico di τ.

Esercizio 11

$$q(8 \cdot 10^{-4}) = q(0)/10,$$

$$q(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = q(0)/10,$$

$$e^{-\frac{8 \cdot 10^{-4}}{300 \; C}} = 0.1.$$

$$-\frac{8 \cdot 10^{-4}}{300\ C} = ln\ 0.1,$$

$$-\frac{8 \cdot 10^{-4}}{300\ C} \approx -2.3,$$

$$C \approx \frac{8 \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 2.3} \approx 1.1 \mu F.$$

Esercizio 12

$$\tau = RC = 1.6 \cdot 10^{-3}\ s,$$

$$q(t) = q(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$q(0) = q(10^{-3}) \cdot e^{\frac{10^{-3}}{\tau}} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot e^{0.625} \approx 3.73 \cdot 10^{-5} C,$$

$$|i(0)| = \frac{q(0)}{\tau} \approx 2.33 \cdot 10^{-2}\ A.$$

Soluzioni SECONDO MODULO INFORMATICA APPLICATA

Esercizio 1

Scelgo un sistema di riferimento con origine nel punto P_1 (massa m_1), con l'asse X coincidente com la retta che comprende P_1 e P_4, e con l'asse Y coincidente com la retta che comprende P_1 e $P - 2$. Allora le coordinate dei punti saranno:

$$P_1 \equiv (0, 0)\ \ ;\ \ P_2 \equiv (0, 2);$$

$$P_3 \equiv (2, 2)\ \ ;\ \ P_4 \equiv (2, 0)\ \ ;\ \ P_5 \equiv (1, 1).$$

La massa totale è:

$$m_{tot} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 17\ Kg.$$

Le coordinate X e Y del baricentro sono:

$$x_B = \frac{20}{17},$$

$$y_B = \frac{14}{17}.$$

Esercizio 2

Scelgo un sistema di riferimento con origine nel punto P_1 (massa m_1), con l'asse X coincidente com la retta che comprende P_1 e P_3, e con l'asse Y passante per P_1 e ad esso perpendicolare. Allora le coordinate dei punti saranno:

$$P_1 \equiv (0,0)\ \ ;\ \ P_2 \equiv (3,3)\ \ ;\ \ P_3 \equiv (3,0);$$

La massa totale è:

$$m_{tot} = m_1 + m_2 + m_3 = 12\ Kg.$$

Le coordinate X e Y del baricentro sono:

$$x_B = \frac{27}{12},$$

$$y_B = 2.$$

Esercizio 3

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}[q_1 + q_2] \approx \frac{3 \cdot 10^{-5}}{8.859 \cdot 10^{-12}} \approx 3.38 \cdot 10^6\ V \cdot m.$$

Esercizio 4

$$i_0 = f/(R_1 + R_2) = 0.375\ A,$$

$$i_r = f/(R_1 + R_2 + r) \approx 0.37\ A,$$

$$\Delta i = i_0 - i_r 16.66\ 0.005\ A.$$

Esercizio 5

$$\tau = 15 \cdot 10^{-4}\ s,$$

$$q(\tau) = q(0) \cdot e^{-1} \approx 2.2 \cdot 10^{-5}\ C.$$

Nota: in realtà non serve conoscere il valore numerico di τ.

Esercizio 6

$$q(8 \cdot 10^{-4}) = q(0)/10,$$

$$q(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = q(0)/10,$$

$$e^{-\frac{8 \cdot 10^{-4}}{300\ C}} = 0.1.$$

$$-\frac{8 \cdot 10^{-4}}{300\ C} = ln\ 0.1,$$

$$-\frac{8 \cdot 10^{-4}}{300\ C} \approx -2.3,$$

$$C \approx \frac{8 \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 2.3} \approx 1.1 \mu F.$$

Esercizio 7

$$\tau = RC = 1.6 \cdot 10^{-3}\ s,$$

$$q(t) = q(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$q(0) = q(10^{-3}) \cdot e^{\frac{10^{-3}}{\tau}} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot e^{0.625} \approx 3.73 \cdot 10^{-5} C,$$

$$|i(0)| = \frac{q(0)}{\tau} \approx 2.33 \cdot 10^{-2}\ A.$$

Scritti del 23/4/2007

PROVA DI INFORMATICA APPLICATA DEL 23/04/2007

Esercizio 1 (4 punti)

Si faccia l'analisi dimensionale dei due membri delle seguenti uguaglianze, e si dica quali sono dimensionalmente corrette e quali no:

$$1)\ p^2\ m^{-1} = L\ ;\ 2)\ a\ \omega^{-1} = v;$$

$$3)\ l\ F\ \ m^{-1} = v^3;\ 4)\ v^2\ R^{-2} = \omega^2;$$

dove:
- nella 1) m è una massa, $p \equiv m\ v$ un momento, e L un lavoro;
- nella 2) a è un'accelerazione, ω una velocità angolare, e v una velocità;
- nella 3) F è una forza, l una lunghezza, m una massa, e v una velocità;
- nella 4) v è una velocità, R un raggio, e ω una velocità angolare.

Esercizio 2 (4 punti)

Un corpo si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione costante a; se il corpo, partendo da fermo, dopo 10 secondi ha percorso 100 metri, e la forza costante che lo fa muovere è $F = 10\ N$, calcolare la massa del corpo.

Esercizio 3 (6 punti)

Un corpo, partendo da fermo, compie un moto rettilineo uniforme con velocità costante v pari a 72 chilometri all'ora. Un altro corpo, parte dietro al primo, con uno svantaggio di 100 metri rispetto al primo, e con una velocità iniziale v_0 pari a 5 metri al secondo, e compie un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo la stessa retta e nello stesso verso del primo corpo, con accelerazione a pari a 6 $m\ s^{-2}$. Calcolare dopo quanto tempo il secondo corpo raggiunge il primo.

Nota: scegliere, per motivi fisici, la radice positiva dell'equazione algebrica di secondo grado che risolverà il problema.

Esercizio 4 (6 punti)

Un corpo scende senza attrito, partendo da fermo, lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha = 45°$, e acquista una velocità di 10 $m\ s^{-1}$ alla fine del piano inclinato. Calcolare l'altezza e la lunghezza del piano inclinato.

Esercizio 5 (12 punti)

Un corpo scende senza attrito lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha = 30°$, e di lunghezza $l = 20\ m$ (nelle nostre notazioni, il piano inclinato è rappresentato da un triangolo rettangolo ABC, in cui i due cateti sono AB (l'altezza) e BC (la base), e l'ipotenusa AC è la lunghezza del piano inclinato). Calcolare, usando la conservazione dell'energia meccanica,:

a) qual'è la velocità del corpo alla fine del piano inclinato se parte da fermo;

b) qual'è la velocità del corpo quando ha percorso metà del piano inclinato se parte con una velocità iniziale di 2 m/s;

c) qual'è la velocità del corpo quando ha percorso un terzo della lunghezza del piano inclinato se parte da fermo.

Esercizio 6 (7 punti)

Una molla di costante elastica $k = 27N/m$ è attaccata ad un corpo di massa $m = 3\ Kg$. All'istante iniziale la molla passa per il suo punto di equilibrio con una velocità $v(0) = 6\ m/s$. Calcolare la posizione del corpo dopo un tempo $t = \pi/12\ s$. Calcolare la velocità del corpo dopo un tempo $t = (\pi/9)\ s$ (si ricordi che $\pi = 180°$).

Esercizio 7 (10 punti)

Un proiettile viene sparato con una velocità di modulo v_0, e con una inclinazione di $60°$ gradi rispetto al suolo. Sapendo che il proiettile in corrispondenza di un'ascissa $\tilde{x} = 10\ m$ ha raggiunto un'altezza di $15\ m$, calcolare v_0. Calcolare poi l'altezza massima.

Esercizio 8 (6 punti)

Si considerino quattro cariche puntiformi q_1, q_2, q_3, q_4. I valori delle prime tre cariche sono $q_1 = 10^{-5}\ C$, $q_2 = 7 \cdot 10^{-5}\ C$, e $q_3 = -3 \cdot 10^{-5}\ C$. Sapendo che il flusso del campo elettrico, generato da queste cariche attraverso una superficie chiusa S che le racchiude tutte ha lo stesso valore del flusso di un campo elettrico attraverso una superficie chiusa $S^{'}$ che racchiude altre due cariche q_5 e q_6 che valgono $q_5 = 2 \cdot 10^{-5}\ C$ e $q_6 = 4 \cdot 10^{-5}\ C$, calcolare la carica q_4.

Esercizio 9 (10 punti)

Un corpo scivola con attrito lungo un piano inclinato di $45°$. Se la base del piano inclinato è $b = 20\ m$, il coefficiente di attrito dinamico vale $c_d = 0.3$, ed il corpo parte con una velocità iniziale di 4 metri al secondo dalla cima del piano inclinato, calcolare la velocità del corpo a metà del piano inclinato.

PROVA DI INFORMATICA DEL 23/04/2007
(REGOLA CON LA QUALE VIENE ASSEGNATO IL VOTO:

1) L'esame non è superato se su ciascuna delle due parti (MECCANICA E ELETTROMAGNETISMO) lo studente non ottiene almeno 9 *punti,*
2) se V_1 *è il punteggio complessivo degli esercizi di MECCANICA e* V_2 *è il punteggio complessivo degli esercizi di ELETTROMAGNETISMO, il voto finale sarà:*

$$V = \frac{2}{3}\, V_1 + \frac{1}{3}\, V_2.$$

Esempio pratico: $V_1 = 24\ V_2 = 12; V = 20.$)

MECCANICA

Esercizio 1 (4 punti)

Si faccia l'analisi dimensionale dei due membri delle seguenti uguaglianze, e si dica quali sono dimensionalmente corrette e quali no:

$$1)\ p^2\ m^{-1} = L\ ;\ 2)\ a\ \omega^{-1} = v;$$

$$3)\ l\ F\ \ m^{-1} = v^3;\ 4)\ v^2\ R^{-2} = \omega^2;$$

dove:
- nella 1) m è una massa, $p \equiv m\ v$ un momento, e L un lavoro;
- nella 2) a è un'accelerazione, ω una velocità angolare, e v una velocità;
- nella 3) F è una forza, l una lunghezza, m una massa, e v una velocità;
- nella 4) v è una velocità, R un raggio, e ω una velocità angolare.

Esercizio 2 (4 punti)

Un corpo si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione costante a; se il corpo, partendo da fermo, dopo 10 secondi ha percorso 100 metri, e la forza costante che lo fa muovere è $F = 10\ N$, calcolare la massa del corpo.

Esercizio 3 (8 punti)

Un corpo scende senza attrito lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha = 30°$, e di lunghezza $l = 20\ m$ (nelle nostre notazioni, il piano inclinato è rappresentato da un triangolo rettangolo ABC, in cui i due cateti sono AB (l'altezza) e BC (la base), e l'ipotenusa AC è la lunghezza del piano inclinato). Calcolare, usando la conservazione dell'energia meccanica,:

a) qual'è la velocità del corpo alla fine del piano inclinato se parte da fermo;

b) qual'è la velocità del corpo quando ha percorso metà del piano inclinato se parte con una velocità iniziale di 2 m/s.

Esercizio 4 (7 punti)

Una molla di costante elastica $k = 27N/m$ è attaccata ad un corpo di massa $m = 3\ Kg$. All'istante iniziale la molla passa per il suo punto di equilibrio con una velocità $v(0) = 6\ m/s$. Calcolare la posizione del corpo dopo un tempo $t = \pi/12\ s$. Calcolare la velocità del corpo dopo un tempo $t = (\pi/9)\ s$ (si ricordi che $\pi = 180°$).

Esercizio 5 (10 punti)

Un proiettile viene sparato con una velocità di modulo v_0, e con una inclinazione di 60° gradi rispetto al suolo. Sapendo che il proiettile in corrispondenza di un'ascissa $\tilde{x} = 10\ m$ ha raggiunto un'altezza di 15 m, calcolare v_0. Calcolare poi l'altezza massima.

Esercizio 6 (10 punti)

Un corpo scivola con attrito lungo un piano inclinato di 45°. Se la base del piano inclinato è $b = 20\ m$, il coefficiente di attrito dinamico vale $c_d = 0.3$, ed il corpo parte con una velocità iniziale di 4 metri al secondo dalla cima del piano inclinato, calcolare la velocità del corpo a metà del piano inclinato.

Esercizio 7 (4 punti)

Calcolare il baricentro di 4 masse disposte nel modo seguente: la massa $m_1 = 1\ Kg$ è posta sul vertice in alto a sinistra di un quadrato di lato pari a 4 metri, la massa $m_2 = 3\ Kg$ è posta sul vertice in alto a destra dello stesso quadrato, la massa $m_3 = 5\ Kg$ è posta sul vertice in basso a destra dello stesso quadrato, la massa $m_4 = 7\ Kg$ è posta a metà del lato in alto dello stesso quadrato.

Esercizio 8 (6 punti)

Si considerino quattro cariche puntiformi q_1, q_2, q_3, q_4. I valori delle prime tre cariche sono $q_1 = 10^{-5}\ C$, $q_2 = 7 \cdot 10^{-5}\ C$, e $q_3 = -3 \cdot 10^{-5}\ C$. Sapendo che il flusso del campo elettrico, generato da queste cariche attraverso una superficie chiusa S che le racchiude tutte ha lo stesso valore del flusso di un campo elettrico attraverso una superficie chiusa $S^{'}$ che racchiude altre due cariche q_5 e q_6 che valgono $q_5 = 2 \cdot 10^{-5}\ C$ e $q_6 = 4 \cdot 10^{-5}\ C$, calcolare la carica q_4.

Esercizio 9 (8 punti)

In un circuito elettrico è inserita una resistenza R, ed una forza elettromotrice $f = 400\ Volt$ che possiede una resistenza interna $r = 8\ \Omega$. Sapendo che l'intensità di corrente generata nel circuito è $i = 1\ A$, calcolare la resistenza R.

Esercizio 10 (8 punti)

In un circuito RC la resistenza vale $R = 100\ \Omega$. Sapendo che la carica iniziale vale $q(0) = 2 \cdot 10^{-5}\ C$, e che il tempo caratteristico vale $\tau = 10^{-4}\ s$, calcolare il valore della capacità ed il valore della carica dopo $10^{-5}\ s$.

Esercizio 11 (12 punti)

In un circuito RC dopo $6 \cdot 10^{-4}\ s$ la carica si è ridotta ad un terzo della carica iniziale. Calcolare la capacità sapendo che la resistenza vale $300\ \Omega$.

Esercizio 12 (12 punti)

In un circuito RC dopo un tempo pari a $2 \cdot 10^{-4}\ s$ la carica si riduce a $q(0)\ e^{-1}$, dove $q(0)$ è la carica iniziale, e vale $4 \cdot 10^{-5}\ C$. Calcolare il modulo della corrente dopo 10^{-5} secondi.

PROVA DEL SECONDO MODULO PER GLI STUDENTI DI INFORMATICA APPLICATA DEL 23/04/2007

Esercizio 1 (4 punti)

Calcolare il baricentro di quattro masse disposte nel modo seguente: la massa $m_1 = 1\ Kg$ è posta sul vertice in alto a sinistra di un quadrato di lato pari a 4 metri, la massa $m_2 = 3\ Kg$ è posta sul vertice in alto a destra dello stesso quadrato, la massa $m_3 = 5\ Kg$ è posta sul vertice in basso a destra dello stesso quadrato, la massa $m_4 = 7\ Kg$ è posta a metà del lato in alto dello stesso quadrato.

Esercizio 2 (4 punti)

Calcolare il baricentro di quattro masse disposte sui quattro vertici di un trapezio rettangolo nel modo seguente: la massa $m_1 = 2\ Kg$ è posta sul vertice P_1 in basso a sinistra del trapezio, ed è il punto congiungente il lato verticale del trapezio e la base maggiore; la massa $m_2 = 1\ Kg$ è posta sul vertice P_2 in alto a sinistra del trapezio, ed è il punto congiungente il lato verticale del trapezio e la base minore; la massa $m_3 = 3\ Kg$ è posta sul vertice P_3 in alto a destra del trapezio, ed è il punto congiungente il lato obliquo del trapezio e la base minore; la massa $m_4 = 5\ Kg$ è posta sul vertice P_4 in basso a destra del trapezio, ed è il punto congiungente il lato obliquo del trapezio e la base maggiore. Sapendo che la base maggiore del trapezio vale $b = 6\ m$, che il lato obliquo vale $l_o = 4\ m$, e che l'angolo tra il lato obliquo e la base maggiore vale 60 gradi, calcolare il baricentro delle quattro masse.

Esercizio 3 (6 punti)

Date quattro cariche q_1, q_2, q_3, q_4, sappiamo che q_4 è il doppio di q_3, e che $q_1 = 5 \cdot 10^{-5}\ C$, $q_2 = 4 \cdot 10^{-5}$. Sapendo anche che il flusso del campo elettrico generato dalle quattro cariche attraverso una superficie chiusa che le contiene tutte vale

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{7 \cdot 10^{-5}}{\epsilon_0},$$

calcolare le cariche q_3 e q_4.

Esercizio 4 (8 punti)

In un circuito elettrico è inserita una resistenza R, ed una forza elettromotrice $f = 400\ Volt$ che possiede una resitenza interna $r = 8\ \Omega$. Sapendo che l'intensità di corrente generata nel circuito è $i = 1\ A$, calcolare la resistenza R.

Esercizio 5 (8 punti)

In un circuito RC la resistenza vale $R = 100\ \Omega$. Sapendo che la carica iniziale vale $q(0) = 2 \cdot 10^{-5}\ C$, e che il tempo caratteristico vale $\tau = 10^{-4}\ s$, calcolare il valore il valore della capacità ed il valore della carica dopo $10^{-5}\ s$.

Esercizio 6 (12 punti)

In un circuito RC dopo $6 \cdot 10^{-4}\ s$ la carica si è ridotta ad un terzo della carica iniziale. Calcolare la capacità sapendo che la resistenza vale 300 Ω.

Esercizio 7 (12 punti)

In un circuito RC dopo un tempo pari a $2 \cdot 10^{-4}\ s$ la carica si riduce a $q(0)\ e^{-1}$, dove $q(0)$ è la carica iniziale, e vale $4 \cdot 10^{-5}\ C$. Calcolare il modulo della corrente dopo 10^{-5} secondi.

Soluzioni scritti del 23 aprile 2007

Soluzioni INFORMATICA APPLICATA

Esercizio 1

$$1)\ [p^2\ m^{-1}] = [m^2\ v^2\ m^{-1}] = [m\ \ v^2] = [m\ a\ l] = [L],$$

SI

$$2)\ [a\ \omega^{-1}] = [a\ t] = [v].$$

SI

$$3)\ [l\ F\ \ m^{-1}] = [l\ m\ l\ t^{-2}\ m^{-1}] = [v^2],$$

NO

$$4)\ [v^2\ R^{-2}] = [l^2\ t^{-2}\ l^{-2}] = [t^{-2}] = [\omega^2],$$

SI

Esercizio 2

$$x(10) \equiv 100\ m = \frac{1}{2}\ a\ (10^2)\ m = 50 \cdot a,$$

$$a = 2\ m\ s^{-2},$$

$$m = F/a = 10/2\ Kg = 5\ Kg.$$

Esercizio 3

Scelgo come origine dell'asse X la posizione iniziale del *secondo* corpo.

$$72\ Km/h = 20\ m/s.$$

$$x_1(t) = 100 + v\ t = 100 + 20\ t,$$

$$x_2(t) = v_0\ t + \frac{1}{2}\ a\ t^2 = 5\ t + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot t^2 = 5\ t + 3\ t^2.$$

condizione: al tempo $\tilde{t}$ nel quale il secondo corpo raggiunge il primo le posizioni dei due corpi coincidono, cioè $x_2(\tilde{t}) = x_1(\tilde{t})$ o, equivalentemente, $x_2(\tilde{t}) - x_1(\tilde{t}) = 0$; questa condizione dà il tempo $\tilde{t}$:

$$0 = x_2(\tilde{t}) - x_1(\tilde{t}) = 5\ \tilde{t} + 3\tilde{t}^2 - 100 - 20\ \tilde{t},$$

$$3\ \tilde{t}^2 - 15\ \tilde{t} - 100 = 0.$$

La soluzione positiva dell'equazione è

$$\tilde{t} = \frac{15 + \sqrt{225 + 1200}}{6} = \frac{15 + \sqrt{1425}}{6} \approx \frac{15 + 37.7}{6} = 8.78 s.$$

Esercizio 4

$$m\ g\ h = \frac{1}{2} m\ v^2,$$

$$h = v^2/2g = 100/20 = 5\ m,$$

$$l = h/\sin\ 45^\circ = 5\ \sqrt{2} \approx 7\ m.$$

Esercizio 5

$$a)\ h = l\ \sin\ \alpha = 20 \cdot \sin\ 30° = 10m,$$

$$m \cdot 10 \cdot 10 = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$v = \sqrt{200} \approx 14.14\ m\ s^{-1}.$$

$$b)\ m \cdot 10 \cdot 5 + \frac{1}{2}\ m\ 2^2 = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$v = \sqrt{104} \approx 10.19\ m\ s^{-1}.$$

$$c)\ m \cdot \frac{1}{3} \cdot 100 = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$v = \sqrt{66.66} \approx\ 8.16m\ s^{-1}.$$

Esercizio 6

$$\omega = \sqrt{\frac{27}{3}} = 3\ s^{-1},$$

$$x(t) = \frac{6}{3}\ \sin\ (3\ t) = 2\ \sin\ (3\ t),$$

$$x(\pi/12) = 2\ \sin\ (3 \cdot \pi/12) = 2\ \sin\ (\pi/4) = \sqrt{2}\ m,$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot 3\ \cos\ (3\ t) = 6\ \cos\ (3\ t),$$

$$v(\pi/9) = 6\ \cos\ (3 \cdot \pi/9) = 6\ \cos\ (\pi/3) = 3\ m/s.$$

Esercizio 7

$$y(x) = (\tan\ \theta)\ x - \frac{1}{2}\ g \frac{x^2}{(v_0\ \cos\ \theta)^2},$$

$$15 \equiv y(10) = \sqrt{3} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{10^2}{(v_0/2)^2} = \sqrt{3} \cdot 10 - \frac{2000}{v_0^2},$$

$$v_0 = \sqrt{2000/(\sqrt{3} \cdot 10 - 15)} \approx \sqrt{2000/2.3} \approx 29.48\ m/s.$$

$$y^{'}(x_m) = 0$$

dà per x_m

$$x_m = \frac{v_0^2}{g}\ sin\ \theta\ \cos\ \theta,$$

e, inserendo questo valore, abbiamo per l'altezza massima

$$y_m \equiv y(x_m) = \frac{v_0^2}{2g}\ sin^2\ \theta \approx 32.6\ m.$$

Esercizio 8

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}[q_1+q_2+q_3+q_4] = \frac{1}{\epsilon_0}[10^{-5}+7\cdot 10^{-5}-3\cdot 10^{-5}+q_4] = \frac{1}{\epsilon_0}[5\cdot 10^{-5}+q_4]$$

$$\Phi^{'}_S(\vec{E}^{'}) = \frac{Q^{'}_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}[q_5 + q_6] = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot 6 \cdot 10^{-5};$$

la condizione

$$\Phi_S(\vec{E}) = \Phi^{'}_S(\vec{E}^{'})$$

dà

$$\frac{1}{\epsilon_0}[5 \cdot 10^{-5} + q_4] = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot 6 \cdot 10^{-5},$$

cioè

$$q_4 = 10^{-5}\ C.$$

Esercizio 9

$$h = b\ \tan\ \alpha = 20\ \tan\ 45^\circ = 20\ m\ \ ;\ \ l = \frac{b}{\cos\ \alpha} = \frac{20}{\cos\ 45^\circ} = 20\ \sqrt{2}\ m.$$

$$L + \frac{1}{2}\ m\ v_0^2 - L_a = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$L = m\ g\ (h/2)\ \ ;\ \ L_a = c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha)\ (l/2),$$

$$m\ g\ [10\ - 0.3\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10\ \sqrt{2}] + \frac{1}{2}\ m\ 16 = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$78 = v^2/2,$$

$$v =\approx 12.48\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 1

$$1)\ [p^2\ m^{-1}] = [m^2\ v^2\ m^{-1}] = [m\ \ v^2] = [m\ a\ l] = [L],$$

SI

$$2)\ [a\,\omega^{-1}] = [a\ t] = [v].$$

SI

$$3)\ [l\ F\ \ m^{-1}] = [l\ m\ l\ t^{-2}\ m^{-1}] = [v^2],$$

NO

$$4)\ [v^2\ R^{-2}] = [l^2\ t^{-2}\ l^{-2}] = [t^{-2}] = [\omega^2],$$

SI

Esercizio 2

$$x(10) \equiv 100\ m = \frac{1}{2}\ a\ (10^2)\ m = 50 \cdot a,$$

$$a = 2\ m\ s^{-2},$$

$$m = F/a = 10/2\ Kg = 5\ Kg.$$

Esercizio 3

$$a)\ h = l\ \sin\ \alpha = 20 \cdot \sin\ 30^\circ = 10m,$$

$$m \cdot 10 \cdot 10 = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$v = \sqrt{200} \approx 14.14\ m\ s^{-1}.$$

$$b)\ m \cdot 10 \cdot 5 + \frac{1}{2}\ m\ 2^2 = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$v = \sqrt{104} \approx 10.19\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 4

$$\omega = \sqrt{\frac{27}{3}} = 3\ s^{-1},$$

$$x(t) = \frac{6}{3}\ \sin\ (3\ t) = 2\ \sin\ (3\ t),$$

$$x(\pi/12) = 2\ \sin\ (3 \cdot \pi/12) = 2\ \sin\ (\pi/4) = \sqrt{2}\ m,$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot 3\ \cos\ (3\ t) = 6\ \cos\ (3\ t),$$

$$v(\pi/9) = 6\ \cos\ (3 \cdot \pi/9) = 6\ \cos\ (\pi/3) = 3\ m/s.$$

Esercizio 5

$$y(x) = (\tan\ \theta)\ x - \frac{1}{2}\ g \frac{x^2}{(v_0\ \cos\ \theta)^2},$$

$$15 \equiv y(10) = \sqrt{3} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{10^2}{(v_0/2)^2} = \sqrt{3} \cdot 10 - \frac{2000}{v_0^2},$$

$$v_0 = \sqrt{2000/(\sqrt{3} \cdot 10 - 15)} \approx \sqrt{2000/2.3} \approx 29.48\ m/s.$$

$$y^{'}(x_m) = 0$$

dà per x_m

$$x_m = \frac{v_0^2}{g}\ sin\ \theta\ \cos\ \theta,$$

e, inserendo questo valore, abbiamo per l'altezza massima

$$y_m \equiv y(x_m) = \frac{v_0^2}{2g}\ sin^2\ \theta \approx 32.6\ m.$$

Esercizio 6

$$h = b\ \tan\ \alpha = 20\ \tan\ 45^\circ = 20\ m\ \ ;\ \ l = \frac{b}{\cos\ \alpha} = \frac{20}{\cos\ 45^\circ} = 20\ \sqrt{2}\ m.$$

$$L + \frac{1}{2}\ m\ v_0^2 - L_a = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$L = m\ g\ (h/2)\ \ ;\ \ L_a = c_d\ (m\ g\ \cos\ \alpha)\ (l/2),$$

$$m\ g\ [10\ - 0.3\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10\ \sqrt{2}] + \frac{1}{2}\ m\ 16 = \frac{1}{2}\ m\ v^2,$$

$$78 = v^2/2,$$

$$v =\approx 12.48\ m\ s^{-1}.$$

Esercizio 7

Scelgo un sistema di riferimento con origine nel vertice in basso a sinistra del quadrato. Allora, le coordinate delle quattro masse saranno:

$$P_1 \equiv (0,4) \ \ ; \ \ P_2 \equiv (4,4);$$

$$P_3 \equiv (4,0) \ \ ; \ \ P_4 \equiv (2,4).$$

La massa totale è

$$M = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 \ Kg.$$

Il baricentro allora avrà coordinate

$$x_B = \frac{1}{16} \left[1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 2\right] = \frac{23}{8},$$

$$y_B = \frac{1}{16} \left[1 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 2\right] = \frac{15}{8}.$$

Esercizio 8

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}[q_1+q_2+q_3+q_4] = \frac{1}{\epsilon_0}[10^{-5}+7\cdot 10^{-5}-3\cdot 10^{-5}+q_4] = \frac{1}{\epsilon_0}[5\cdot 10^{-5}+q_4]$$

$$\Phi'_S(\vec{E}') = \frac{Q'_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}[q_5 + q_6] = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot 6 \cdot 10^{-5};$$

la condizione

$$\Phi_S(\vec{E}) = \Phi'_S(\vec{E}')$$

dà

$$\frac{1}{\epsilon_0}[5 \cdot 10^{-5} + q_4] = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot 6 \cdot 10^{-5},$$

cioè

$$q_4 = 10^{-5} \ C.$$

Esercizio 9

$$f = (R + r)\, i,$$

$$400 = R + 8,$$

$$R = 392\ \Omega.$$

Esercizio 10

$$C = \tau/R = 10^{-6}\ F,$$

$$q(10^{-5}) = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \exp(-0.1)\ C \approx 1.8 \cdot 10^{-5}\ C.$$

Esercizio 11

$$-\ln 3 = -\frac{6 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{2} \cdot C},$$

$$C = \frac{2}{ln3} \cdot 10^{-6}\ F \approx 1.82 \cdot 10^{-6}\ F.$$

Esercizio 12

$$\tau = 2 \cdot 10^{-4}\ s;$$

$$q(\tau) = q(0) \cdot e^{-1};$$

allora abbiamo

$$q(0) = q(\tau) \cdot e = 4 \cdot e \cdot 10^{-5}\ C \approx 10.87 \cdot 10^{-5}\ C.$$

Il modulo della corrente iniziale è

$$|i(0)| = \frac{q(0)}{\tau} = \frac{4 \cdot e \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot e \cdot 10^{-1} \ A;$$

Allora

$$|i(10^{-5})| = |i(0)| \cdot \exp(-\frac{10^{-5}}{2 \cdot 10^{-4}}) = 2 \cdot e \cdot 10^{-1} \cdot \exp(-0.05) \ A \approx 5.16 \ A.$$

Esercizio 1

Scelgo un sistema di riferimento con origine nel vertice in basso a sinistra del quadrato. Allora, le coordinate delle quattro masse saranno:

$$P_1 \equiv (0,4) \ \ ; \ \ P_2 \equiv (4,4);$$

$$P_3 \equiv (4,0) \ \ ; \ \ P_4 \equiv (2,4).$$

La massa totale è

$$M = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 \ Kg.$$

Il baricentro allora avrà coordinate

$$x_B = \frac{1}{16} \left[1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 2\right] = \frac{23}{8},$$

$$y_B = \frac{1}{16} \left[1 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 2\right] = \frac{15}{8}.$$

Esercizio 2

Scelgo un sistema di riferimento con origine nel punto P_1 in cui è concentrata la massa m_1, con l'asse X coincidente com la retta che comprende P_1 e P_4, e con l'asse Y coincidente com la retta che comprende P_1 e P_2.

Inoltre, la differenza tra la base maggiore b e quella minore $b^{'}$ vale

$$b - b^{'} = l_o \ \cos \ 60^\circ = 2 \ m,$$

e quindi

$$b^{'} = b - 2 = 4 \ m;$$

inoltre, la lunghezza del lato verticale l_v (altezza) è

$$l_v = l_o \ \sin \ 60^\circ = 2 \sqrt{3} \, m.$$

Allora le coordinate dei punti saranno:

$$P_1 \equiv (0, 0) \ \ ; \ \ P_2 \equiv (0, 2 \sqrt{3});$$

$$P_3 \equiv (4, 2 \sqrt{3}) \ \ ; \ \ P_4 \equiv (6, 0).$$

La massa totale è:

$$M = 2 + 1 + 3 + 5 = 11 \ Kg.$$

Le coordinate x_B e y_B del baricentro sono:

$$x_B = \frac{42}{11},$$

$$y_B = \frac{8 \sqrt{3}}{11}.$$

Esercizio 3

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{\epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2 + 3 \ q_3}{\epsilon_0};$$

$$\frac{7 \cdot 10^{-5}}{\epsilon_0} = \frac{9 \cdot 10^{-5} + 3 \ q_3}{\epsilon_0};$$

$$q_3 = -2 \cdot 10^{-5} \ C.$$

Esercizio 4

$$f = (R + r)\, i,$$

$$400 = R + 8,$$

$$R = 392\ \Omega.$$

Esercizio 5

$$C = \tau / R = 10^{-6}\ F,$$

$$q(10^{-5}) = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \exp(-0.1)\ C \approx 1.8 \cdot 10^{-5}\ C.$$

Esercizio 6

$$-\ln 3 = -\frac{6 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{2} \cdot C},$$

$$C = \frac{2}{ln 3} \cdot 10^{-6}\ F \approx 1.82 \cdot 10^{-6}\ F.$$

Esercizio 7

$$\tau = 2 \cdot 10^{-4}\ s;$$

$$q(\tau) = q(0) \cdot e^{-1};$$

allora abbiamo

$$q(0) = q(\tau) \cdot e = 4 \cdot e \cdot 10^{-5}\ C.$$

Il modulo della corrente iniziale è

$$|i(0)| = \frac{q(0)}{\tau} = \frac{4 \cdot e \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot e \cdot 10^{-1}\ A;$$

Allora

$$|i(10^{-5})| = |i(0)| \cdot \exp(-\frac{10^{-5}}{2 \cdot 10^{-4}}) = 2 \cdot e \cdot 10^{-1} \cdot \exp(-0.05)\ A \approx 5.16\ A.$$