Cognome: ....*Nome:*...................*Classe:*..........*Matricola:*...................

(Scrivere tutti i dati richiesti e trascrivere gli stessi su ogni foglio dello svolgimento)
(Barrare la seguente casella per pubblicare il solo numero di matricola ☐ *)*
(I quesiti contrassegnati con (F) sono facoltativi)

Analisi Numerica A.A. 2009-2010

Quesito A (punti 3) Dati $a = 2.777777777777E - 18$ e $b = 2.777777777776E - 18$, calcolare $d = a - b$ in aritmetica in virgola mobile al calcolatore (visualizzare 16 cifre).

1. Confrontare il valore d con il risultato esatto. I due valori sono eguali ? (commentare la risposta).
2. Scrivere una definizione di precisione macchina e specificarne il valore per numeri in virgola mobile in doppia precisione.
3. Calcolare l'errore relativo vero di d, e confrontarlo con la precisione macchina dell'aritmetica in virgola mobile (commentare).

Quesito B (punti 9) È dato il sistema di equazioni $Ax = b$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} -1.5 & 0.5 & 1.5 & 1.1 \\ 0 & 8.7 & 6 & 12 \\ 3 & 4 & -12 & 4 \\ -8 & 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1.7 + \alpha \\ 4 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

dove α è l'ultima cifra del numero di matricola.

1. Risolvere il sistema con il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale.
2. Calcolare l'errore relativo vero, supponendo che il risultato vero si ottenga col comando Matlab " \ ", e commentare.
3. (F) Ripetere i punti precedenti utilizzando il pivot totale (+ 2 punti).
4. Ricavare, dall'algoritmo, il numero di operazioni macchina per la risoluzione del sistema, e confrontarlo col valore previsto dalla teoria.
5. Cosa si può dire sulla convergenza del metodo di Jacobi per la matrice A, prima dell' applicazione del metodo (usare i comandi Matlab di algebra delle matrici) ? Se il metodo non risultasse convergente modificare la matrice A per renderla convergente.
6. Calcolare la soluzione con il metodo di Jacobi con accuratezza relativa 10^{-5}, 10^{-8}, eps. Trascrivere soluzione e stima dell'errore che si ottiene dall'algoritmo.
7. Discutere il concetto di condizionamento in generale e per i sistemi di equazioni, poi utilizzando i comandi Matlab studiare l'indice di condizionamento del sistema e cercare di dedurre informazioni sulle soluzioni trovate a punti 1. e 2. e commentare.

Quesito C (punti 6) Disegnare il grafico di $f(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{x^2+3}$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$, e:

1. Costruire i polinomi interpolanti di grado 5 e 8, con nodi equispaziati nell'intervallo assegnato *(scrivere esplicitamente i polinomi di interpolazione P(x)=...)*, e disegnare un grafico dei polinomi evidenziando i punti dati.
2. Disegnare i grafici della funzione errore $f(x) - P(x)$ e stimare i valori della 'norma-infinito' nell'intervallo assegnato, per entrambe le interpolazioni. *(chiamare il docente per la verifica a video dei grafici)* e commentare.
3. Discutere il problema della convergenza dei polinomi interpolanti, ad una funzione, all'aumentare del numero dei nodi.

Quesito D (punti 6) Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Determinare l' autovalore di modulo massimo con accuratezza relativa pari a $10^{-4}, 10^{-9}$, eps, utilizzando il metodo delle potenze. Confrontare l'autovalore trovato con quello che si ottiene utilizzando un comando Matlab.

2. Per ciascuna accuratezza riportare in una tabella: l' autovalore, la stima dell' errore (assoluto o relativo), il numero di iterazioni effettuate.

3. Scrivere la definizione di autovalore e autovettore di una matrice.

4. Il metodo delle potenze è sempre convergente ? (motivare la risposta).

Quesito E (punti 6) Calcolare l' integrale definito $\int_0^3 (\cos^2(x) - x^3/3)\, dx$ con accuratezza assoluta pari a: $10^{-3}, 10^{-7}, 10^{-14}$, utilizzando l'algoritmo adattivo di Cavalieri–Simpson.

1. Riportare in tabella il valore dell' integrale, la stima dell' errore assoluto che viene restituito dall' algoritmo e l' errore vero (per trovare il risultato esatto avvalersi del comando `Q = QUADL(FUN,A,B,TOL)`).

Valore dell' integrale	Stima errore assoluto	Errore vero assoluto

2. Confrontare i valori di stima di errore assoluto ed errore vero, e commentare.

3. (F) Ripetere i punti precedenti con l' algoritmo di quadratura dei trapezi non-adattiva, e confrontare i risultati (+2 punti).

4. Cos'è il grado di precisione di una formula di quadratura ? Specificare il valore per la formula di Cavalieri–Simpson.

Cognome: ....*Nome:*...................*Classe:*..........*Matricola:*...................

(Scrivere tutti i dati richiesti e trascrivere gli stessi su ogni foglio dello svolgimento)
(Barrare la seguente casella per pubblicare il solo numero di matricola □)
(I quesiti contrassegnati con (F) sono facoltativi)

Analisi Numerica A.A. 2009-2010

Quesito A (punti 3) Effettuare le somme $S1 = a + 5 \cdot 10^{20}$ ed $S2 = b + 5 \cdot 10^{20}$, con $a = 10^{36}, b = 10a$, in aritmetica 'virgola mobile' al calcolatore.

1. Effettuare i test di confronto `S1 == a` e `S2 == b` , e spiegare i risultati dei due test motivando le risposte.
2. Illustrare brevemente la rappresentazione in virgola mobile dei numeri al calcolatore
3. Definire la precisione macchina ed illustrare la sua relazione con le operazioni al calcolatore.

Quesito B (punti 9) È dato il sistema di equazioni $Ax = b$, con:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8+\alpha \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

da risolvere con il metodo di Gauss-Seidel (α è l'ultima cifra del numero di matricola).

1. Enunciare una condizione necessaria e sufficiente di convergenza del metodo e con l'aiuto dei comandi Matlab di algebra delle matrici, stabilire se il metodo sarà convergente o meno. Se il metodo non risultasse convergente, modificare la matrice A per renderla convergente.
2. Calcolare la soluzione (con Gauss-Seidel) con accuratezza relativa 10^{-3}, 10^{-8}, eps. (scrivere soluzioni e stime dell'errore).
3. Calcolare l'errore relativo vero, supponendo che il risultato vero si ottenga col comando Matlab " \ ", e commentare.
4. Risolvere il sistema con il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale.
5. (F) Ripetere il punti 4. utilizzando il pivot totale (+ punti 2).
6. Quale metodo tra quello diretto è quello iterativo risulta più conveniente dal punto di vista computazionale ?
7. Discutere l'utilitÃ del pivoting parziale nel metodo di eliminazione.

Quesito C (punti 6) Sono dati i punti di coordinate (x_i, y_i) pari a:
$(-1, 4.93), (0, -1.35), (1, 0.98), (2, 1.01), (3, 4.26), (4, 12.7), (5, 14.18)$.

1. Scrivere i polinomi di grado 2, 3 e 4 che approssimano i punti nel senso dei minimi quadrati.
2. Disegnare la spline cubica interpolante sui suddetti nodi.
3. Disegnare un grafico con punti e polinomi in colori diversi *(chiamare il docente per la verifica dei grafici)* e commentare.
4. Illustrare brevemente il metodo dei minimi quadrati, evidenziando le differenze con l'interpolazione.

Quesito D (punti 6) Calcolare tutti gli autovalori della seguente matrice utilizzando la tecnica con fattorizzazione QR (comando Matlab qr):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 9 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

con la migliore accuratezza possibile.

1. Calcolare gli autovalori utilizzando un comando Matlab, e confrontarli con quelli ottenuti precedentemente.

2. Fornire la definizione di autovalori ed autovettori di una matrice.

3. Illustrare la tecnica usata per il calcolo degli autovalori, il significato di fattorizzazione QR di una matrice, anche in relazione alla tecnica stessa.

Quesito E (punti 6) Calcolare l' integrale definito $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3(x) + x^2)\, dx$ con accuratezza assoluta pari a: $10^{-5}, 10^{-14}$, utilizzando l' algoritmo adattivo di Cavalieri–Simpson.

1. Riportare in tabella il valore dell' integrale, la stima dell' errore assoluto che viene restituito dall' algoritmo e l' errore vero. (per trovare il risultato esatto avvalersi del comando `Q = QUADL(FUN,A,B,TOL)`)

Valore dell' integrale	Stima errore assoluto	Errore vero assoluto

2. Confrontare i valori di stima di errore assoluto ed errore vero, e commentare.

3. (F) Ripetere i punti precedenti con l' algoritmo di quadratura di Cavalieri-Simpson non-adattiva, e confrontare i risultati (+ 2 punti).

4. Illustrare le differenze tra formule di Newton-Cotes non-composte e quelle composte, spiegando perché le une possono essere preferibili rispetto alle altre.
