Cognome: ....*Nome:*...................*Classe:*.........*Matricola:*...................

(Scrivere tutti i dati richiesti e trascrivere gli stessi su ogni foglio dello svolgimento)
(Barrare la seguente casella per pubblicare il solo numero di matricola □)
(I quesiti contrassegnati con (F) sono facoltativi)

Analisi Numerica A.A. 2008-2009

Quesito A (punti 3) Si desidera effettuare il seguente calcolo: $x - \sqrt{x^2 - a}$ con $x = 10^7, a = 2$.

1. Quali problemi può presentare questo calcolo con numeri floating-point ?
2. Discutere come, in questo caso, si può superare l'inconveniente, ed eseguire il calcolo.
3. Descrivere la rappresentazione in 'virgola mobile' dei numeri al calcolatore mettendola anche in relazione con i punti precedenti.

Quesito B (punti 9) È dato il sistema di equazioni $Ax = b$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+\alpha \\ 4 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(sostituire α con la cifra finale del numero di matricola)

1. Enunciare una condizione <u>solo</u> sufficiente di convergenza per un metodo iterativo. Con tale condizione è possibile stabilire se l'applicazione del metodo iterativo al sistema sarà convergente ?
2. Enunciare una condizione necessaria e sufficiente di convergenza per un metodo iterativo, e con l'aiuto di Matlab determinare la convergenza per il metodo di Gauss-Seidel.
3. Calcolare la soluzione con il metodo di Gauss-Seidel con accuratezza relativa 10^{-4}, 10^{-9}, eps. (scrivere le soluzioni e le stime degli errori).
4. Confrontare le soluzioni ottenute con quella che si ottiene col comando Matlab " \ ", e calcolare l'errore vero per ciascuna accuratezza.
5. (F +2) Risolvere il sistema con l'algoritmo di Thomas e darne una descrizione.
6. Discutere il concetto di condizionamento in generale, e nel caso dei sistemi di equazione (indicare anche l'indice di condizionamento). Utlizzare un comando Matlab per stimare l'indice di condizionamento del sistema, e da questo dedurre informazioni sul suo condizionamento. Discutere.
7. Valutare la complessità computazionale necessaria per risolvere il sistema con un metodo diretto ed uno iterativo, e stabilire i criteri per determinare quale sia il più conveniente.

Quesito C (punti 5) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \frac{1-x^2/8}{1+4x^2}$ nell'intervallo $[-2, 2]$, e:

1. Disegnare i polinomi interpolanti di $f(x)$ con 5, 10, 19 nodi equidistanti, nell'intervallo *(utilizzare un colore diverso per polinomio)*, evidenziando i nodi. In base al grafico si può supporre, qualitativamente, la convergenza uniforme, dei polinomi alla funzione, all'aumentare del numero dei nodi ? (motivare)
2. Disegnare i polinomi interpolanti, con pari grado dei precedenti, con nodi disposti secondo Tchebichev in base alla formula: $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), i = 0, \ldots, n$, (con $n+1$ nodi) nell'intervallo $[a, b]$. Si può supporre, qualitativamente, la convergenza uniforme dei polinomi alla funzione all'aumentare del numero dei nodi ? (motivare).
3. Disegnare le spline cubiche interpolanti per i nodi dati al punto 1. evidenziando i nodi.

[chiamare il docente per la verifica a video dei grafici]

Quesito D (punti 5) Calcolare tutti gli autovalori delle seguenti matrici utilizzando la tecnica con fattorizzazione QR (comando Matlab qr):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

con la migliore accuratezza possibile.

1. Calcolare gli autovalori utilizzando un comando Matlab, ed utilizzare questi per calcolare l'errore vero sugli autovalori trovati precedentemente.
2. Fornire la definizione di autovalori ed autovettori di una matrice.
3. Illustrare la tecnica usata per il calcolo degli autovalori, il significato di fattorizzazione QR di una matrice, anche in relazione alla tecnica stessa.

Quesito E (punti 5) Calcolare l' integrale definito $\int_0^1 e^{-x^2} \sin(2\pi x)\, dx$ con accuratezza assoluta pari a: $10^{-3}, 10^{-8}, 10^{-15}$, utilizzando l' algoritmo adattivo di Cavalieri–Simpson.

1. Riportare in tabella il valore dell'integrale, la stima dell'errore assoluto che viene restituito dall'algoritmo e l'errore vero. (per trovare il risultato esatto avvelersi del comando `Q = QUADL(FUN,A,B,TOL)`).

Valore dell' integrale	Stima errore assoluto	Errore vero assoluto

2. Confrontare i valori di stima di errore assoluto ed errore vero, e commentare.
3. (F) Ripetere i punti precedenti con l' algoritmo di quadratura di Cavalieri-Simpson non-adattiva, e confrontare i risultati (+ 2 punti).
4. Illustrare brevemente le formule di Newton–Cotes, spiegando il significato dei pesi, e gli eventuali problemi di convergenza.

Quesito F (punti 3) Trovare le radici dell' equazione $e^{-x^2} \sin(2\pi x) = 0$ nell' intervallo $[0, 1]$ utilizzando degli opportuni comandi Matlab o il metodo delle secanti.

1. Illustrare brevemente il metodo delle secanti.
