Avviso

I contenuti di queste annotazioni non sono esaustivi ai fini del buon esito dell'esame. Fare riferimento alle lezioni tenute in aula ed ai testi consigliati:

- G. Monegato, Fondamenti di Calcolo Numerico. Ed. CLUT
- A. Quarteroni, F. Saleri, 'Calcolo Scientifico, esercizi e problemi risolti con Matlab e Octave' Springer.

Calcolo Integrale

Data $f(x) = F'(x)$ si ha:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + cost. \quad \textbf{(integrale indefinito)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \textbf{(integrale definito)}$$

- $F(x)$ = Primitiva
- $f(x)$ = funzione integranda continua
- a e b = estremi di integrazione

L'integrale definito si utilizza per il calcolo delle aree, volumi, in generale di quantità.

Proprietà dell'integrale

$$\int C\,f(x)\,dx = C\int f(x)\,dx \quad \text{con } C = \text{costante.}$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx \quad \text{linearità}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad (a < c < b) \quad \text{additività}$$

$$\exists \xi \in (a,b) : \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \quad \textbf{Teorema media integrale}$$

Integrazione analitica

L'integrazione di una funzione è un'operazione "difficile". Non sempre si può scrivere la primitiva di una funzione.

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + cost. \quad \textbf{(elementarmente integrabile)}$$

$$\int \frac{\sin(x)\log\sqrt{\sin(x)} + \frac{1}{4}\cos(x)\text{cotg}(x)}{(\log\sqrt{\sin(x)})^{3/2}}\,dx =$$

$$\frac{-\cos(x)}{\sqrt{\log\sqrt{\sin(x)}}} + cost. \quad \textbf{(funzione complicata)}$$

$$\int e^{-x^2}\,dx = ? \quad \textbf{(non elementarmente integrabile)}$$

Formule di quadratura

Siamo interessati a calcolare l'integrale definito.
Se la $f(x)$ è complicata cosa si può fare ?

- Approssimarla con una più semplice...
- Con dei polinomi $f(x) \simeq \sum_i f(x_i) L_i(x)$
  $L_i(x)$ ad esempio polinomi di Lagrange.

Le formule di quadratura approssimano gli integrali definiti tramite somme:

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

w_i sono i **pesi**, x_i i **nodi**.

Formule di quadratura 2

Relazione tra i pesi e i polinomi interpolanti $P_{n-1}(x)$.

- $f(x) = P_{n-1}(x) + E_n(x)$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b P_{n-1}(x)\,dx}_{\textbf{facile da integrare}} + \int_a^b E_n(x)dx$
- con le funzioni di Lagrange:
  $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \underbrace{\int_a^b L_i(x)\,dx}_{w_i=\textbf{pesi}} f(x_i) + \underbrace{\int_a^b E_n(x)dx}_{R_n=\textbf{resto (errore)}}$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + R_n$

Formule interpolatorie

Teorema di unicità: dati n nodi $\{x_i\} \Rightarrow \exists! \{w_i\}, \quad i = 1, \dots, n$ pesi.

Le formule di quadratura interpolatorie sono esatte (resto = zero) se $f(x)$ è un polinomio di grado $\leq n - 1$.

Attenzione: Se il numero dei nodi è troppo grande ci vuole cautela per determinare i nodi.

Grado di precisione

Grado di precisione p di una formula di quadratura:

- $R_n = 0$ **con** $f(x) \equiv P_n(x), n \leq p$
- $\exists P_{p+1}(x) : R_n \neq 0$

Una formula di quadratura ha grado di precisione p se è esatta quando la funzione integranda è un polinomio di grado p, ed esiste un polinomio di grado $p + 1$ per il quale il resto non è zero.

Formule di Newton-Cotes

Nelle formule di Newton-Cotes i nodi sono equispaziati. n nodi nell'intervallo $[a,b]$:

- $x_i = a + (i-1)h, \quad i = 1,2,\ldots,n$
- $h = \dfrac{b-a}{n-1}, \quad h =$ **passo di integrazione**
- Formule chiuse. Gli estremi dell'intervallo di integrazione fanno parte dell'insieme dei nodi: $a = x_1$ e $b = x_n$
- Formule aperte. Gli estremi dell'intervallo di integrazione non appartengono all'insieme dei nodi. I nodi sono punti all'interno dell'intervallo.

Formula dei trapezi (Newton-Cotes con 2 nodi)

Per semplicità prendiamo $a = 0, b = h$. La formula di quadratura con due nodi è data da:

$$\int_0^h [f(0)L_1(x) + f(h)L_2(x)]\,dx$$

$L_1(x) = \frac{x-h}{-h} \rightarrow w_1 = \int_0^h L_1(x)\,dx = \frac{x^2/2-hx}{-h}\Big|_0^h = \frac{h}{2}$
$L_2(x) = \frac{x-0}{h-0} \rightarrow w_2 = \int_0^h L_2(x)\,dx = \frac{x^2}{2h}\Big|_0^h = \frac{h}{2}$

Quindi $\int_0^h f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(f(0)+f(h))$, in generale:

Formula dei trapezi: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(f(a)+f(b))$ (area del trapezio).

Formula di Cavalieri-Simpson (Newton-Cotes con 3 nodi)

Per semplicità prendiamo $a = 0, b = 2h$. La formula di quadratura con tre nodi è data da:

$$\int_0^{2h} [f(0)L_1(x) + f(h)L_2(x) + f(2h)L_3(x)]\,dx$$

$L_3(x) = \frac{x(x-h)}{2h(2h-h)} \rightarrow w_3 = \int_0^{2h} L_3(x)\,dx = \frac{1}{2h^2}(\frac{x^3}{3} - \frac{hx^2}{2})\Big|_0^{2h} = \frac{h}{3}$
$L_2(x) = \frac{x(x-2h)}{h(h-2h)} \rightarrow w_2 = \int_0^{2h} L_2(x)\,dx = \frac{-1}{h^2}(\frac{x^3}{3} - \frac{2hx^2}{2})\Big|_0^{2h} = \frac{4h}{3}$
$w_1 = w_3$
Quindi $\int_0^{2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f(0)+4f(h)+f(2h))$, in generale:

Formula di Cavalieri-Simpson:
$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f(a)+4f((a+b)/2)+f(b))$

Errore delle formule di Newton-Cotes 1

L'errore delle formule di Newton-Cotes è l'integrale dell'errore di interpolazione di Lagrange: $R_n = \int_a^b E_n(x)dx$

- Caso n pari $f \in C^n[a,b]$:
  $R_n(f) = K_n h^{n+1} \dfrac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}$
  $K_n = \int_0^{n-1} t(t-1)\cdots(t-n+1)\,dt$
- Caso n dispari $f \in C^{n+1}[a,b]$:
  $R_n(f) = K_{n+1} h^{n+2} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}$
  $K_{n+1} = \int_0^{n-1} t^2(t-1)\cdots(t-n+1)\,dt$

con $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$ incogniti.

Errore delle formule di Newton-Cotes 2

Nel caso n pari, la formula di quadratura è esatta, $R_n(f) = 0$, se $f(x)$ è un polinomio di grado $\leq n-1$. Infatti $f^{(n)}(x) = 0$, quindi il grado di precisione è $n-1$.

Nel caso n dispari, la formula di quadratura è esatta, $R_n(f) = 0$, se $f(x)$ è un polinomio di grado $\leq n$. Infatti $f^{(n+1)}(x) = 0$, quindi il grado di precisione è n.

Errore formula dei trapezi: $R_2(f) = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi_1), \quad h = b - a,$ grado $p = 1$
Errore formula Cavalieri-Simpson:
$R_3(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_2), \quad h = (b-a)/2$, grado $p = 3$

Convergenza

Una sequenza di formule di quadratura con n nodi, crescente è convergente se:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Condizione sufficiente per la convergenza:
Se $f(x) \in C[a, b]$ la convergenza della sequenza di formule di quadratura è garantita se:

$$\sum_{i=1}^{n} |w_i| \leq K$$

con K costante indipendente da n

Convergenza formule di Newton-Cotes

Si hanno gli stessi problemi di convergenza per i polinomi.
Le formule di Newton-Cotes con n nodi non sono convergenti per $n \to \infty$.

- I pesi delle formule di Newton-Cotes aumentano in modulo con n, e con segno alternante. C'è il rischio di fenomeni di cancellazione numerica.
- Dal teorema di Faber: fissato uno schema interpolatorio, possono esistere funzioni alle quali la sequenza dei polinomi interpolanti non converge: $\lim_{n\to\infty} P_{n-1}(x) \neq f(x)$ uniformemente in $[a, b]$, per cui può accadere che $\lim_{n\to\infty} \int_a^b P_{n-1}(x)dx \neq \int_a^b f(x)\, dx$

Formule di quadratura composte

Per evitare problemi di convergenza si usano formule di Newton-Cotes con pochi nodi (max 7).
Una buona accuratezza desiderata si raggiunge con formule convergenti !
Si utilizza la proprietà additiva dell'integrale definito:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\, dx \approx \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

l'intervallo $[a, b]$ è suddiviso in m intervalli di ampiezza h: $(x_0 = a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{m-1}, x_m = b)$ con $x_{j+1} - x_j = h = (b-a)/m$. Si applica la formula di quadratura su ciascun intervallo (x_j, x_{j+1}) e si somma il tutto.

Formula dei trapezi composta

Formula dei trapezi composta:
Si applica la formula dei trapezi su ogni intervallo (x_j, x_{j+1}):

$$\sum_{j=0}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1} h \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} + \sum_j R_2^{(j)}(f) =$$

$$= h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + \frac{f(x_m)}{2} \right) + R_2$$

Errore formula trapezi composta

Se $f \in C^2([a, b])$:

$$R_2 = \sum_j R_2^{(j)}(f) = -\frac{h^3}{12} \sum_j f^{(2)}(\xi_j)$$

dal teorema della media:

$$\exists \xi \in (a, b) \text{ tale che } f^{(2)}(\xi) = \frac{1}{m} \sum_j f^{(j)}(\xi_j)$$

$$R_2 = -\frac{mh^3}{12} f^{(2)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f^{(2)}(\xi)$$

la derivata seconda di f è limitata in (a, b), quindi per $m \to \infty$, ossia $h \to 0$, l'errore R_2 tende a zero.