Avviso

I contenuti di queste slide non sono esaustivi ai fini del buon esito dell'esame. Fare riferimento anche alle lezioni tenute in aula ed ai testi consigliati:

- G. Monegato, Fondamenti di Calcolo Numerico. Ed. CLUT
- A. Quarteroni, F. Saleri, 'Calcolo Scienifico, esercizi e problemi risolti con matlab e octave' Springer.

Calcolo degli Autovalori

Data la matrice A:

$$Av = \lambda v$$

λ autovalore (scalare), v Autovettore (non nullo).
Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad Av = \begin{pmatrix} 9a + 4b \\ 8a + 5b \end{pmatrix},$$

in generale Av non è multiplo di v.

Nei casi particolari: $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 13\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

rispetto agli autovettori la matrice A si comporta come uno scalare. Questo comporta una semplificazione dei problemi con matrici.

Polinomio caratteristico

A è matrice $n * n$. Determinazione degli autovalori:

$$Av = \lambda v \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

dal teorema di Rouchè-Capelli la soluzione non-banale ($v = 0$) può esistere solo se
Det$(A - \lambda I) = 0$ **Equazione caratteristica**
Dallo sviluppo del determinante si ottiene un polinomio caratteristico di grado n in λ.

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico

Calcolare gli autovalori della matrice precedente.

Spettro di una matrice

- Lo **spettro** di una matrice è l'insieme di tutti i suoi autovalori
- Il raggio spettrale è l'autovalore di massimo modulo: $\rho(A) = \max_i(|\lambda_i|)$
- Il comando Matlab `eig(A)` restituisce lo spettro della matrice A

Matrici simili

Due matrici A e B si dicono **simili** se hanno gli **stessi autovalori**

Tasformazione di similitudine:
se S è non singolare allora $\boxed{B = S^{-1}AS}$ ha gli stessi autovalori di A.

Dimostrazione:
$Av = \lambda v \rightarrow S^{-1}Av = \lambda S^{-1}v$, inserisco $I = SS^{-1}$
$S^{-1}ASS^{-1}v = \lambda S^{-1}v$, posto $S^{-1}v = w$, si ottiene $Bw = \lambda w$

l'autovalore è lo stesso, l'autovettore è cambiato.

Diagonalizzabilità

Se esiste una scelta della matrice S tale che

$$D = S^{-1}AS$$

con D matrice diagonale, allora la matrice A si dice **diagonalizzabile**.

- Gli autovalori di D sono gli elementi della diagonale
- le colonne di S sono gli autovettori di A: $AS = SD$
- A è diagonalizzabile se e solo se possiede n autovettori **linearmente indipendenti**
- ad autovalori distinti sono associati autovettori indipendenti
- Se gli autovalori di A sono distinti, allora A è diagonalizzabile

Localizzazione degli autovalori

Per le norme naturali di matrice è: $\rho(A) \leq \|A\|$
Questo ci permette di individuare una regione ove sono contenuti tutti gli autovalori di A.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_\infty = 10, \quad \rho(A) = 3$$

Gli autovalori sono: $\lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = -1$.
I quali sono tutti inclusi nel cerchio di raggio 3 centrato nell'origine. $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{5}, |\lambda_3| = 3, |\lambda_4| = 1$.

[fare disegno nel piano complesso]

Teorema di Gerschgorin

Definiamo i "raggi" r_i a partire dalle righe della matrice A:
$r_i = \sum_{k \neq i} |a_{ik}|$, $i = 1, \ldots, n$, poi costruiamo i cerchi R_i nel piano complesso $\mathbb{C}$: $R_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$.

Il teorema afferma che lo spettro $\sigma(A)$ degli autovalori di A è contenuto nella regione R **unione** di tutti i cerchi R_i:

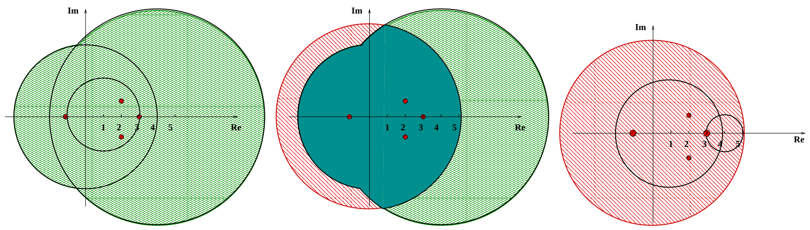
$$\boldsymbol{\sigma(A) \in R = \cup_{i=1}^{n} R_i}$$

Idem per i cerchi C_j definiti a partire dalle colonne di A:
$c_j = \sum_{k \neq j} |a_{kj}|, \; C_j = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq c_j\}, \; j = 1, \ldots, n.$

$$\boldsymbol{\sigma(A) \in C = \cup_{j=1}^{n} C_j}$$

e per **l'intersezione** di R e C: $\boxed{\boldsymbol{\sigma(A) \in R \cap C}}$

Esempio Gerschgorin



R $\qquad R \cap C$ $\qquad C$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = -1$

Metodo delle potenze

Calcolo dell'autovalore λ_1 di massimo modulo. Ipotesi:

- l'autovalore di massimo modulo è unico: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$
- autovettori $v_1, \ldots, v_n$ linearmente indipendenti
- vettore iniziale $w_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, con $\alpha_1 \neq 0$

Data la successione di vettori
$w_1 = Aw_0, w_2 = Aw_1, \ldots, w_m = Aw_{m-1}$: si ha:

$$\boldsymbol{\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{(w_{m+1})_k}{(w_m)_k}},$$

dove $(w_m)_k$ è la componente k di w_m

Metodo delle potenze (dimostrazione)

$w_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, con $\alpha_1 \neq 0$

$w_1 = Aw_0 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n v_n$

$$w_1 = \lambda_1 \left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \ldots + \alpha_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n \right)$$

iterando:

$$w_m = Aw_{m-1} = (\lambda_1)^m \left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2^m}{\lambda_1^m} v_2 + \ldots + \alpha_n \frac{\lambda_n^m}{\lambda_1^m} v_n \right)$$

$$\frac{(w_{m+1})_k}{(w_m)_k} =$$

$$\frac{(\lambda_1)^{m+1} \left(\alpha_1 (v_1)_k + \alpha_2 \frac{\lambda_2^{m+1}}{\lambda_1^{m+1}} (v_2)_k + \ldots + \alpha_n \frac{\lambda_n^{m+1}}{\lambda_1^{m+1}} (v_n)_k \right)}{(\lambda_1)^m \left(\alpha_1 (v_1)_k + \alpha_2 \frac{\lambda_2^m}{\lambda_1^m} (v_2)_k + \ldots + \alpha_n \frac{\lambda_n^m}{\lambda_1^m} (v_n)_k \right)}$$

Metodo delle potenze (dimostrazione)

siccome $|\lambda_j/\lambda_1| < 1$ per $j \geq 2$ tutti gli addendi

$$\alpha_2 \frac{\lambda_2^m}{\lambda_1^m} (v_2)_k + \ldots + \alpha_n \frac{\lambda_n^m}{\lambda_1^m} (v_n)_k \to 0$$

tendono a zero per $m \to \infty$, quindi:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(w_{m+1})_k}{(w_m)_k} = \lambda_1$$

L'autovalore di minimo modulo di A è il reciproco dell'autovalore di massimo modulo di A^{-1}. Se λ è autovalore di A, allora λ^{-1} è autovalore di A^{-1}:

$$Av = \lambda v \Rightarrow v = \lambda A^{-1} v \Rightarrow A^{-1} v = \lambda^{-1} v$$

Miglioramento algoritmo delle potenze

- Se $\lambda_1 > 1$ i vettori w_m crescono, con il rischio di arrivare all'overflow. Conviene normalizzare ad ogni iterazione:

$$w_m = w_m / \| w_m \|_\infty$$

- la stima dell'autovalore si può calcolare con il quoziente di Rayleigh:

$$\lambda_1^{(m)} = \frac{w_m^T A w_m}{w_m^T w_m}$$

è indipendente dalla scelta della componente k, ed ha velocità doppia se A è simmetrica.

Stima dell'errore e criterio di arresto

Si utilizza la differenza delle approssimazioni degli autovalori tra due iterazioni successive:

$$\text{stima errore assoluto} = |\lambda_1^{(m+1)} - \lambda_1^{(m)}|$$

La stima dell'errore (relativo o assoluto), è poi utilizzata nel criterio di arresto del ciclo.

Velocità di convergenza

La convergenza dei $\lambda_1^{(m)}$ dipende dal rapporto λ_2/λ_1, pertanto è tanto più rapida quanto più piccolo è il rapporto:

$$\lambda_2/\lambda_1$$

Se $\lambda_2 \simeq \lambda_1$ la convergenza può essere molto lenta.

Metodo delle potenze inverse

E' nota l'approssimazione p di un autovalore λ. Il metodo delle potenze inverse migliora l'approssimazione p di λ.

$$(A - pI)v = Av - pv = (\lambda - p)v$$

quindi:
$(\lambda - p)$ è autovalore della matrice $A - pI$, e
$(\lambda - p)^{-1}$ è autovalore della matrice $(A - pI)^{-1}$.
Se $p \simeq \lambda$, allora $\mu = (\lambda - p)^{-1}$ è autovalore massimo di $(A - pI)^{-1}$.
Si calcola μ col metodo delle potenze, dopodiché
$\boxed{\lambda^* = p + \frac{1}{\mu}}$ è la nuova approssimazione migliorata dell'autovalore λ.

Traccia algoritmo potenze inverse

Con la fattorizzazione LU è possibile eseguire le iterazioni senza calcolare l'inversa.
$B = A - pI$, trovare fattorizzazione $PB = LU$:

while <criterio di arresto>
trovare z da: L z = P w_m
trovare w da: U w_{m+1} = z
$\mu = \ldots$
$\lambda_{m+1} = \ldots$
stima errore = ...
aggiorna w_m
aggiorna λ_m
end while
calcola λ^*

Calcolo autovalori con fattorizzazione QR (1)

$$A = QR,$$

Q matrice ortogonale $QQ^T = I$,
R matrice triangolare superiore.

Il comando Matlab (Octave) è: `[Q,R]=qr(A)`
Il costo computazionale è $2/3 * n^3$, maggiore della fattorizzazione LU.

Data una matrice A_0 si costruisce una successione di trasformazioni di similitudine $A_0, A_1, A_2, \ldots$:

$$Q_i R_i = A_i, \quad A_{i+1} = R_i Q_i, \Rightarrow A_{i+1} = Q_i^T A_i Q_i$$

$Q_i^T = Q_i^{-1}$, per cui A_{i+1} è simile ad A_i.

Calcolo autovalori con fattorizzazione QR (2)

Si può dimostrare che per $i \to \infty$:

- Se gli autovalori di A_0 soddisfano: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \ldots > |\lambda_n|$, allora A_i tende ad una matrice triangolare superiore
- gli elementi $a_{k,k-1}^{(i)}$ convergono a zero con velocità $O(|\lambda_k/\lambda_{k-1}|^i)$ alla $i-$esima iterazione.
- Se ci sono degli autovalori complessi coniugati, A_i tende ad una matrice quasi triangolare superiore, con alcuni elementi della diagonale sotto la principale diversi da zero.