Avviso

I contenuti di queste slide non sono esaustivi ai fini del buon esito dell'esame. Fare riferimento anche alle lezioni tenute in aula ed ai testi consigliati:

- G. Monegato, Fondamenti di Calcolo Numerico. Ed. CLUT
- A. Quarteroni, F. Saleri, 'Calcolo Scienifico, esercizi e problemi risolti con matlab e octave' Springer.

Problema: approssimazione

- Dati: noti i punti (o nodi) $\{(x_i, y_i)\}$, trovare la $f(x)$ (modello descrittivo).
- Funzioni: nota $\hat{f}(x)$ analitica, trovare una funzione più semplice che la approssimi.
- Operatori su funzioni: determinare espressioni di approsimazione numerica di operatori su funzioni. Ad esempio formule di quadratura per il calcolo di integrali.

Risoluzione del problema

- Scegliere una *classe di funzione approssimanti*. Ogni funzione è parametrizzata da certi coefficienti $\boldsymbol{\Phi_a(x)}$.
- Scegliere la *metrica* per misurare la distanza dell'approssimazione.
- Scegliere una tecnica per individuare <u>una</u> delle funzioni tra quelle della classe (trovare i coefficienti).
  - Interpolazione: $\boldsymbol{y_i = \Phi_a(x_i)}$
  - Minimi quadrati: $\boldsymbol{\min \sum_i (\Phi_a(x_i) - y_i)^2}$
  - MinMax: $\boldsymbol{\min \max_i |\Phi_a(x_i) - y_i|}$

Interpolazione

Dati $n+1$ nodi $(x_i, y_i) \quad i = 0 \dots n$, e una base di funzioni $\Phi_i(x)$ linearmente indipendenti, la classe di funzioni approssimanti è la seguente:

$$\Phi(x, a_0 \dots a_n) = a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + \cdots + a_n\Phi_n(x)$$

parametrizzata da $a_0 \dots a_n$.

INTERPOLAZIONE $\Leftrightarrow \boldsymbol{\Phi(x_i) = y_i \quad \forall i}$

I parametri a_i si determinano da un sistema di equazioni lineare.

$\Phi_n(x) = x^n$ è la base polinomiale.

Esistenza e unicità polinomio interpolante

Si utilizzano i polinomi di grado n:
$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.
Condizione di interpolazione $\boxed{P_n(x_i) = y_i.}$

Teorema di esistenza e unicità. Dati $n+1$ punti (x_i, y_i) distinti $x_i \neq x_j \ \ \forall i, j (i \neq j)$ si ha che esiste ed è unico il polinomio di grado minore o uguale ad n tale che $P_{\leq n}(x_i) = y_i$.

E' vero perché dalle condizioni $P_n(x_i) = y_i$ si ottiene una matrice di coefficienti (Vandermonde) sicuramente non singolare. Det$(V) = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \neq 0$

Matrice di Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Si risolve il sistema $\boldsymbol{Va = y}$, dove $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)^T$ è il vettore dei coefficienti incogniti del polinomio.

La matrice di Vandermonde è mal-condizionata per n grande; si deve utilizzare un'altro metodo per determinare i coefficienti.

Interpolazione di Lagrange

Polinomi di Lagrange sono polinomi della forma:

$$L_j^{(n)}(x) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)} \quad \begin{cases} = 1 & x = x_j \\ = 0 & x = x_i \quad i \neq j \end{cases}$$

hanno la proprietà che se $L_j(x)$ è valutato proprio in x_j vale 1, se valutato in uno degli altri punti del problema, vale 0.
Soluzione dell'interpolazione

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j^{(n)}(x)$$

infatti è $P_n(x_i) = y_i$ per costruzione!

Studio dell'errore

Nel caso di **approssimazione di una funzione** $f(x)$, si scelgono delle ascisse x_i e si ricavano le ordinate $y_i = f(x_i)$. Il problema è ricondotto all'approssimazione dei dati.
Si desidera valutare l'errore che si commette nell'interpolazione.
Sia $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ (derivata $(n+1)$-esima continua in $[a, b]$), valgono le seguenti eguaglianze:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j(x) + R_{n+1}(x) \\ \\ R_{n+1}(x) = \dfrac{\prod_j (x - x_j)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \qquad \text{resto} \end{cases}$$

Teorema errore di Lagrange

Sia $f \in C^{(n+1)}([a,b])$ con $x_k \in [a,b], \quad k = 0, \dots n$. Si ha che per ogni $x \in [a,b]$ esiste un punto $\xi_x \in [a,b]$ (che non si conosce) tale che

$$f(x) - P_n(x) = R_{n+1}(x) = \frac{\prod_j (x - x_j)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

Utilità: consente di effettuare una stima dell'errore:

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\max_x \prod_j |x - x_j|}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Convergenza uniforme

In che senso una successione di polinomi converge alla funzione $f(x)$?

$$\|f(x) - P_n(x)\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)|$$

Teorema di Weierstrass Data una funzione continua $f(x) \in \mathrm{C}^0[a,b]$ a valori reali, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un polinomio $P(x)$ tale che

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)| \leq \epsilon$$

Non convergenza - Teorema di Faber

Esempio di Runge: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ interpolato su nodi equidistanti in $[-5,5]$. Aumentando il numero di punti di interpolazione, il polinomio interpolante non converge!

Teorema di Faber: Data una qualunque successione di nodi distinti $\{x_0^{(n)}, \dots x_n^{(n)}\}$, in $[a,b]$ esiste sempre una funzione $f(x) \in C[a,b]$ che genera una successione di polinomi di interpolazione $\{P_n(x)\}$, sulla successione di nodi data, che <u>non converge</u> uniformemente in $[a,b]$.

Migliore approssimazione

Si è visto che se è fissato uno schema di interpolazione non è garantito che la successione di polinomi interpolanti converga in modo **uniforme** ad una funzione da interpolare.

Si cercano dei polinomi di migliore approssimazione, ossia che rendano minima la 'distanza' $\|f(x) - P_n(x)\|_\infty$.

Teorema di Chebichev

Teorema di Chebichev: Se $P_n(x)$ è il polinomio di migliore approssimazione di grado n della funzione continua $f(x)$ in $[a, b]$, posto $E_n = \|r(x)\|_\infty = \|f(x) - P_n(x)\|_\infty$, allora esistono almeno $\underline{n+2}$ punti dove il resto $r(x)$ assume i valori $\pm E_n$ e con alternanza di segno sulla sequenza dei punti.

- E_n è il minimo possibile e ci garantisce 'la vicinanza' del polinomio alla funzione.
- Il fatto che ci sia alternanza di segno su massimi e minimi $n+2$ volte, ci dice che esistono $n+1$ punti di interpolazione.
- Però è difficile trovare questi punti, se non in casi particolari.

Applicazione di Chebichev

Se si applica il terorema di Chebichev alla funzione x^{n+1} si trova che il resto:

$$r(x) = \frac{\prod_j (x - x_j)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

ha il termine $f^{(n+1)}(\xi_x)$ costante ed il polinomio di migliore appossimazione è dato dal problema di *min-max*:

$$\min_{x_j \in [a,b]} \max_{x \in [a,b]} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|$$

...

Applicazione di Chebichev 2

...con i nodi nelle posizioni:

$$x_j = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi\right) \qquad j = 0, \ldots, n$$

Se la funzione da interpolare è continua fino al grado $n+1$ si ha il seguente teorema:
Data $f(x) \in C^{(n+1)}([a, b])$ e P_n il polinomio di interpolante ottenuto con i nodi di Chebichev, allora

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$