

## Avviso

I contenuti di queste slide non sono esaustivi ai fini del buon esito dell'esame. Fare riferimento anche alle lezioni tenute in aula ed ai testi consigliati:

- G. Monegato, Fondamenti di Calcolo Numerico. Ed. CLUT
- A. Quarteroni, F. Saleri, 'Calcolo Scientifico, esercizi e problemi risolti con matlab e octave' Springer.

## Metodo di Gauss-Seidel

La matrice  $M$  è parte triangolare inferiore di  $A$ . Sia  $M = L$  (non confondere con la decomposizione  $LU$ ), compresa la diagonale principale.

Abbiamo una formula interessante dal punto di vista algoritmico:

$$\begin{aligned}x^{(n+1)} &= (I - L^{-1}A)x^{(n)} + L^{-1}b \Rightarrow \\Lx^{(n+1)} &= (L - A)x^{(n)} + b \Rightarrow \\(D + L_0)x^{(n+1)} &= -U_0x^{(n)} + b \Rightarrow \\x^{(n+1)} &= D^{-1}(b - L_0x^{(n+1)} - U_0x^{(n)})\end{aligned}$$

dove  $D$  è la parte diagonale di  $A$ ,  $L_0$  e  $U_0$  la parte triangolare inferiore e superiore esclusa della parte diagonale.

## Metodo di Gauss-Seidel

Grazie alla struttura particolare di  $L_0$  ed  $U_0$ , sviluppando esplicitamente le sommatorie si trova che le componenti del vettore  $x^{(n+1)}$  che moltiplica  $L_0$ , possono essere immediatamente sostituite durante il calcolo:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}.$$

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)})) \\x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)})) \\&\dots \\x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}))\end{aligned}$$

## Metodo di Gauss-Seidel

Il metodo di Gauss-Seidel è un tentativo di accelerazione di Jacobi.

- Le componenti  $x_i^{(k+1)}$  dell'iterazione successiva in fase di calcolo, sono immediatamente utilizzate per il calcolo delle rimanenti componenti. Significa tentare di accelerare la convergenza (ma non è sempre così) e si risparmia l'uso di due vettori  $x$ .

# Convergenza

Bisogna predire se il metodo iterativo **converge** o non converge. Dato  $Ax = b$  abbiamo il metodo iterativo

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + M^{-1}b$$

sia  $\bar{x}$  la soluzione esatta. Sull'errore assoluto  $e^{(k)} = \bar{x} - x^{(k)}$  possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} Be^{(k)} &= B(\bar{x} - x^{(k)}) = \bar{x} - M^{-1}b - (x^{(k+1)} - M^{-1}b) = \\ &= e^{(k+1)} \Rightarrow \boxed{e^{(k)} = B^k e^{(0)}} \end{aligned}$$

Si desidera che  $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0$ .

# Convergenza

Lemma:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0 \iff \rho(B) < 1$$

$\rho(B)$  è il raggio spettrale di  $B$ .

Teorema:  $\forall x^{(0)} \in R^n$  la successione  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$  definita da:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \quad \forall k \geq 0, c \neq 0$$

converge all'unica soluzione di  $x = Bx + c$  **se e solo se**

$$\boxed{\rho(B) < 1}$$

Corollario (sufficiente): Se  $\|B\| < 1$  per una norma di matrice, allora la successione delle  $x^{(k)}$  converge alla soluzione.

# Autovalori e autovettori di una matrice

Data la matrice  $A \in R^{n \times n}$ ,  $\exists v \neq 0$  tale che:  $\boxed{Av = \lambda v}$  dove  $\lambda$  è uno scalare detto **autovalore**, e  $v$  è un vettore detto **autovettore**.

- gli autovalori si trovano dalla soluzione dell'equazione  $\det(A - \lambda I) = 0$ , la quale è un'equazione algebrica di grado  $n$  in  $\lambda$ .
- l'insieme di tutti gli autovalori viene chiamato **spettro** della matrice:  $\sigma(A)$ .
- il raggio spettrale è l'autovalore di modulo massimo:  $\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ .
- per le norme compatibili con quelle di vettore:  $\rho(A) \leq \|A\|$ .

# Convergenza (metodo pratico)

Può essere difficile calcolare il raggio spettrale di una matrice. Si utilizzano le altre norme indotte, più semplici da calcolare.

- In Jacobi e Gauss-Seidel la matrice  $M$  contiene la parte diagonale. Per questi due metodi una **condizione solo sufficiente di convergenza** è assicurata da:

$$\|I - M^{-1}A\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

vale a dire se la matrice  $A$  è diagonalmente dominante per righe.

## Convergenza (metodo pratico)

- Se  $A$  è tridiagonale, in caso di convergenza, Gauss-Seidel converge più velocemente di Jacobi.
- Se  $A$  è simmetrica e definita positiva Gauss-Seidel converge. Se anche  $2D - A$  è definita positiva Jacobi converge.
- Per matrici  $A$  generiche, Jacobi o Gauss-Seidel possono convergere o meno, **indipendentemente l'uno dall'altro**.

## Test di arresto (metodo accurato)

Quando fermare un metodo iterativo ?

$$\text{TEST DI ARRESTO: } \frac{\|b - Ax^{(k)}\|}{\|b\|} = \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \leq \epsilon$$

il residuo deve essere piccolo rispetto al termine noto.  
(residuo e termine noto li conosciamo)

## Ordinamento e convergenza

E' dato il sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad \rho(B_J) = 2, \rho(B_{GS}) = 4$$

Jacobi e Gauss-Seidel non convergono.

Scambio di righe

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

$A$  è diagonale dominante per righe, Jacobi e Gauss-Seidel convergono.

## Test di arresto (metodo accurato)

Quanto deve essere piccolo  $\epsilon$  affinché l'errore relativo rispetto alla soluzione vera sia piccolo?

$$\|e^{(k)}\| = \|A^{-1}r^{(k)}\| \leq \|A^{-1}\| \|r^{(k)}\| \leq$$

$$\leq \|A^{-1}\| \|b\| \epsilon \leq \epsilon K(A) \|x_{vera}\|$$

dove  $x_{vera}$  è il risultato vero e  $K(A)$  il condizionamento di  $A$ .  
Per cui:

$$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|x_{vera}\|} \leq \epsilon K(A) = \bar{\epsilon} \Rightarrow \boxed{\epsilon = \bar{\epsilon}/K(A)}$$

fissato  $\bar{\epsilon}$  si può stimare  $\epsilon$  e quindi usare il test di arresto. (la stima dell'errore relativo non dipende dal risultato).

## Rapidità di convergenza

Criterio affinché l'errore  $e^{(k)}$  si riduca di un fattore  $\alpha$  rispetto a  $e^{(0)}$  in  $k$  passi.

$$e^{(k)} = B^k e^{(0)} \Rightarrow \frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \leq \|B^k\| \leq \|B\|^k$$

ossia l'errore si riduce se  $\|B\| < 1$ .

Si vuole avere  $\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \leq \alpha$ , si sceglie  $\|B\|^k \leq \alpha$ .

$$k \ln(\|B\|) \leq \ln(\alpha) \Rightarrow k \geq \ln(\alpha) / \ln(\|B\|)$$

## Rapidità di convergenza

Velocità di convergenza asintotica:

$$R(B) = -\ln \rho(B)$$

Numero  $K_\alpha$  di iterazioni per ridurre l'errore di un fattore  $\alpha$ :

$$K_\alpha \geq \frac{-\ln \alpha}{R(B)}$$

- $\alpha$  = quantità della quale si vuole ridurre l'errore sulla stima iniziale della soluzione.
- $\rho(B)$  = raggio spettrale della matrice di iterazione.
- $K_\alpha$  = iterazioni necessarie per ridurre l'errore di  $\alpha$ .

## Complessità computazionale

- Nei metodi iterativi la complessità computazionale, per una matrice di dimensione  $n$ , è:  $Kn^2$ ; sono eseguiti circa  $n \times n$  prodotti e somme per ogni iterazione;  $K$  è il numero di iterazioni necessarie per raggiungere la precisione desiderata.
- Se la matrice è sparsa e contiene  $p$  elementi diversi da zero, omettendo di calcolare i prodotti per zero, la complessità diventa:  $Kp$
- Il metodo iterativo è competitivo con quello di eliminazione di Gauss quando:

$$Kp < \frac{n^3}{3} \implies K < \frac{n^3}{3p}$$