Pivoting ed errori numerici

Sistema:

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ϵ è piccolo. Soluzioni esatte: $x_1 = \frac{1}{1-\epsilon} \approx 1$, $x_2 = \frac{1-2\epsilon}{1-\epsilon} \approx 1$

Metodo di Gauss, $m_{21} = 1/\epsilon$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \epsilon & 1 & 1 \\ 0 & 1-\frac{1}{\epsilon} & 2-\frac{1}{\epsilon} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} \epsilon & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \end{array}\right) \rightarrow x_2 \approx 1 \quad x_1 \approx 0$$

x_1 è errato, il moltiplicatore si “prende” tutta l’informazione dei coefficienti del sistema.

Pivoting ed errori numerici 2

Si scambiano le righe e si ripetono i calcoli:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

... ora i risultati sono più corretti.

Il pivoting ha migliorato la **stabilità** dell’algoritmo.

NOTA: la matrice dei coefficienti è ben condizionata, anche prima dello scambio delle righe.

Scaling o Equilibratura

Se i coefficienti di un sistema sono molto diversi in ordine di grandezza, si possono manifestare degli errori di calcolo. Questi effetti si possono ridurre moltiplicando una o più equazioni per un numero.

- **Scaling esplicito**: di ogni riga scegliere il coefficiente di modulo massimo (*grandezza di riga*). Dividere tutta l’equazione per questo valore. Questa operazione corrisponde a moltiplicare la matrice A per una matrice diagonale $D = d_{ii} = \frac{1}{\max_j |a_{ij}|}$:

$$A_{equilib} = DA$$

  poi si inizia il metodo di gauss, eventualmente con pivoting.

Scaling o Equilibratura 2

- **Scaling implicito**: L’equilibratura viene effettuata durante la scelta dell’elemento pivot $a_{rk}^{(k)}$:
  - Per ogni riga $r \geq k$ si determinano le grandezze di riga:

$$s_i = \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$$

  - L’elemento pivot è dato dall’indice r tale che:

$$\frac{|a_{rk}^{(k)}|}{s_r} = \max_{k \leq i \leq n} \frac{|a_{ik}^{(k)}|}{s_i}$$

Decomposizione LU

Il metodo di Gauss con pivoting corrisponde alla seguente decomposizione della matrice A:

$$PA = LU$$

dove:

- P è una matrice di permutazione che corrisponde agli scambi di riga del pivot. Si ricava permutando le righe della matrice identità.
- U è la matrice triangolare superiore che risulta dal metodo di Gauss.
- L è una matrice triangolare inferiore con elementi diagonali eguali ad 1 (Doolittle), gli altri sono i coefficienti moltiplicativi del metodo di Gauss.

Decomposizione LU

Matrice L:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice U:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Decomposizione LU

Esempio Matrice P: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ottenuta scambiando la seconda e la terza riga della matrice identità.
Data la matrice A:

$$\tilde{A} = PA$$

$\tilde{A}$ ha le righe 2 e 3 scambiate.
Data la matrice A:

$$\overline{A} = AP$$

$\overline{A}$ ha le colonne 2 e 3 scambiate.

Decomposizione LU

Per risparmiare memoria si scrivono L ed U in un'unica tabella:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ (m_{21}) & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ (m_{31}) & (m_{32}) & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (m_{n1}) & (m_{n2}) & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

NOTA: Questa è una tabella di comodo, i moltiplicatori sono evidenziati tra $(\ )$. Le matrici L ed U sono quelle definite sopra. Non fare confusione.

Utilità decomposizione LU

Utilità della decomposizione LU:

$$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

- Quando si devono risolvere tanti sistemi con stessa matrice A, e differenti termini noti b.

$$Ax = b_1, \cdots Ax = b_k \Rightarrow \begin{cases} Ly = Pb_1 \\ Ux = y \end{cases}, \cdots \begin{cases} Ly = Pb_k \\ Ux = y \end{cases}$$

  P, L, U sono le stesse: eseguo la decomposizione solo una volta $(2/3\ n^3)$, poi risolvo $2k$ sistemi triangolari ($2kn^2$ operazioni).

Utilità decomposizione LU

- Calcolo della matrice inversa A^{-1}:

  $$PA = LU \rightarrow A = P^{-1}LU \rightarrow A^{-1} = (P^{-1}LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$$

  le matrici triangolari sono più facili da invertire.
- Calcolo del determinante $\det(A)$:

  $$\det(A) = \det(P^{-1})\det(L)\det(U) = (-1)^s \prod_i u_{ii}$$

  s è il numero di scambi di righe

Decomposizione LU e pivot totale

Nel caso del pivoting totale si hanno due matrici di permutazione: P_r per le righe, P_c per le colonne. Questa si ottiene scambiando le colonne della matrice identità. La fattorizzazione è:

$$P_r A P_c = LU.$$

Conseguenze:

- Nella soluzione di un sistema di equazioni alla fine si deve effettuare $P_c x$. per riordinare le incognite.
- Nel calcolo del determinante: $\det(A) = (-1)^{sr+sc} \prod_i u_{ii}$, dove sr numero scambi di righe, sc di colonne.

Le Norme

Le norme, sia di vettori che di matrici, sono definite dalle seguenti proprietà:

- $\|x\| > 0$ per ogni $x \neq 0$.
- $\|ax\| = |a|\|x\|$ per ogni scalare a.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare).
- $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

L'ultima proprietà non è necessaria per la definizione, ma verrà utilizzata in seguito.

Norme di vettori

E' dato un vettore x:

- $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ norma del massimo (detta anche ‘infinito’).
- $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ norma 1.
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ norma euclidea.

Esempio: $x = (1, -3, 2)$, $\|x\|_\infty = 3$, $\|x\|_1 = 6$, $\|x\|_2 = \sqrt{14}$.

Norme di Matrici

Le matrici sono entità matematiche diverse dai vettori.
Norma di matrice indotta da quella di vettore:

$$\|A\| = max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Norme di matrici indotte:

- $\|A\|_\infty = max_i \sum_j |a_{ij}|$.
- $\|A\|_1 = max_j \sum_i |a_{ij}|$.
- $\|A\|_2 = \sqrt{max_s |\lambda_s(A^T A)|}$. $\lambda_s(\cdot)$ rappresenta l'insieme degli autovalori di una matrice.