Sistemi triangolari

Matrice con elementi
$a_{ij} = 0$ per $i > j$ (triangolare superiore) oppure
$a_{ij} = 0$ per $i < j$ (triangolare inferiore).

Esempio di sistema triangolare superiore:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Soluzione del sistema triangolare

Formula esplicita (sostituzione all'indietro):

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k}{a_{ii}} \qquad i = n-1, \ldots, 1$$

Complessità di calcolo:

- n divisioni.
- $2(n-i)$ somme e prodotti:

$$2\sum_{i=1}^{n-1} n-i = 2\sum_{i=1}^{n-1} n - 2\sum_{i=1}^{n-1} i = 2n(n-1) - n(n-1) = n(n-1)$$

Algoritmo di sostituzione all'indietro

Algoritmo per risolvere i sistemi triangolari.

```
n = dimensione del sistema
x(n) = b(n)/a(n,n)
for k=n-1 to 1
  sum=0
  for j=k+1 to n
    sum = sum + a(k,j)*x(j)
  end
  x(k) = (b(k) - sum)/a(k,k)
end
```

$l-1$ prodotti per ogni riga ($l =$ lunghezza riga) in tutto ci sono N righe, quindi $\sum_{l=1}^{N}(l-1) = \frac{1}{2}N(N-1) \approx \frac{1}{2}N^2$ prodotti ed altrettante somme.

Metodo di eliminazione di Gauss

IDEA: trasformare un sistema di equazioni nella forma triangolare.
Che vuol dire **trasformare** ?

- Le soluzioni di un'equazione "non cambiano" se si moltiplicano ambo i membri per una stessa quantità.
- Le soluzioni di un sistema "non cambiano" se si sommano membro a membro due equazioni del sistema stesso.

Si utilizzano in modo "furbo" delle trasformazioni, annullando i coefficienti di alcune incognite del sistema.

Metodo di eliminazione di Gauss 2

Dato il sistema: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ & \vdots \end{cases}$

si trasforma la seconda equazione: moltiplicare la prima equazione per $m_{21} = a_{21}/a_{11}$ e sottrarla membro a membro dalla seconda equazione

$$(a_{21} - m_{21}a_{11})x_1 + (a_{22} - m_{21}a_{12})x_2 + \cdots = b_2 - m_{21}b_1$$

$$\Downarrow$$

$$0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}$$

L'incognita x_1 è stata "eliminata" dalla seconda equazione del sistema

Metodo di eliminazione di Gauss 3

Si ripete il procedimento per tutte le altre equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ 0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ 0 + a_{32}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ & \vdots \end{cases}$$

Moltiplicatori: $m_{kj} = a_{kj}^{(j)}/a_{jj}^{(j)}$.

Aggiornamento dei coefficienti: $a_{kl}^{(j+1)} = a_{kl}^{(j)} - m_{kj}a_{jl}^{(j)}$.

Aggiornamento dei termini noti: $b_k^{(j+1)} = b_k^{(j)} - m_{kj}b_j^{(j)}$.

Metodo di eliminazione di Gauss 4

Si considera il "sotto-sistema" dalla seconda equazione in poi e si ripete l'eliminazione $N-1$ volte, finché il sistema diventa triangolare.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ 0 + a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ & \vdots \\ 0 + \cdots + 0 + a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)} \end{cases}$$

Algoritmo di eliminazione di Gauss

```
n = dimensione del sistema
for j=1 to n-1
    for k=j+1 to n
        m = a(k,j)/a(j,j)
        for l=j+1 to n
            a(k,l) = a(k,l) - m * a(j,l)
        end
        b(k) = b(k) - m * b(j)
    end
end
```

Complessità del metodo di Gauss

$n =$ dimensione della matrice,
$k =$ passo di eliminazione.

- $2(n-k+1)$ moltiplicazioni e somme per ogni equazione.
- $(n-k)$ divisioni e ripetizioni del punto precedente per ogni sottosistema.
- $\sum_{k=1}^{n-1}$ volte che si esegue l'eliminazione di una incognita.

In totale si ha: $2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1) = \frac{2}{3}(n^3-n) \propto \frac{2}{3}n^3$ moltiplicazioni e addizioni.
Considerando anche la risoluzione del sistema triangolare: $\simeq \frac{2}{3}n^3 + n^2$.

Il pivoting

Cosa accade se $a_{kk}^{(k)} = 0$? Il metodo di Gauss si blocca !
Si scambiano due righe in modo che $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.
Può accadere che non esista un $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, perché ?

Teorema di Rouchè-Capelli

- *Rango* di una matrice: dimensione della più grande sottomatrice con determinante diverso da zero.
- Dato il sistema $Ax = b$, si definisce *matrice completa* $A_c \equiv [A \;\; b]$, ottenuta affiancando b ad A.
- Teorema di Rouchè-Capelli: $Ax = b$ ammette soluzioni se e solo se A e A_c hanno lo stesso rango.

NOTA: A può anche essere rettangolare, con m righe, n colonne e $c =$ Rango(A_c), si hanno ∞^{n-c} soluzioni.

Sistemi di n equazioni e n incognite

Siamo interessati a sistemi che hanno un'unica soluzione.
Applichiamo Rouchè-Capelli al caso $A \in R^{n\times n}$, $b \in R^n$.

$$Ax = b \begin{cases} b \neq 0 \;\rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \rightarrow \begin{cases} \textbf{incompatibile} \\ \textbf{infinità di soluzioni} \end{cases} \\ |A| \neq 0 \rightarrow \exists! \; \underline{\textbf{soluzione } x} \end{cases} \\ b = 0 \;\rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \rightarrow \textbf{infinità di soluzioni} \\ |A| \neq 0 \rightarrow \textbf{soluzione banale } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Tecniche di pivoting

Se il coefficiente $\boldsymbol{a_{kk}^{(k)}}$ è molto piccolo, genera un moltiplicatore grande, con conseguente errori numerici.

- **Pivoting parziale**: si cerca il coefficiente $\boldsymbol{a_{ik}^{(k)}}$ di modulo massimo con $\boldsymbol{i \geq k}$ e si scambia la riga i con la riga k. I moltiplicatori saranno di modulo minore o eguale ad 1.
- **Pivoting totale**: la ricerca del coefficiente di modulo massimo avviene anche sulle colonne di indice maggiore di k. Si devono scambiare anche le colonne. Risultati migliori, ma con costo computazionale maggiore.
  NOTA: lo scambio di colonne equivale allo scambio delle incognite.