

1 SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI. Esercizi

43 esercizi risolti e discussi forniscono un'efficace guida pratica alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari. Vengono affrontati: 17 sistemi non omogenei fondamentali, 8 sistemi omogenei fondamentali, 10 sistemi parametrici. Compendiano gli argomenti trattati 8 temi d'esame risolti.

2 INTRODUZIONE ALLO STUDIO DELLE FUNZIONI

Guida alla conoscenza degli argomenti basilari per lo studio sistematico delle funzioni: disequazioni, valori assoluti, estrazione di radice, funzioni inverse, calcolo di periodi, limiti, derivate, ecc. Gli argomenti sono corredati di esempi esplicativi nei quali alle considerazioni algebriche è abbinata l'interpretazione grafica.

3 FUNZIONI DA ESAME

57 funzioni scelte per dare un'opportuna preparazione all'esame scritto di ANALISI I. Ognuna di esse è svolta integralmente in modo da risultare facilmente comprensibile ed ogni operazione difficile (limiti, derivate, ...) è eseguita. Tutti i grafici sono stati realizzati con l'ausilio di un calcolatore.

4 LIMITI. Esercizi

400 esempi ed esercizi scelti in modo da condurre lo studente ad un agevole calcolo di limiti di funzioni comunque complicate e di qualsiasi tipo: funzioni razionali e irrazionali, funzioni logaritmiche ed esponenziali, funzioni circolari dirette ed inverse, funzioni iperboliche dirette e inverse.

5 DERIVATE. Esercizi

252 esercizi di derivazione di funzioni in coordinate cartesiane ortogonali, in coordinate parametriche e polari. Derivazione di funzioni esplicite ed implicite, ad una e a due variabili. Derivate successive. Differenziali. L'applicazione della derivata a problemi tecnici fondamentali ha lo scopo di rendere meno difficoltoso lo studio delle scienze applicate.

6 INTEGRALI. Esercizi

274 integrali completamente svolti, preceduti da una parte introduttiva comprendente richiami di algebra e di trigonometria circolare e iperbolica.

7 ALGEBRA DELLE MATRICI. Volume primo

176 esercizi per spiegare organicamente le leggi che governano l'algebra delle matrici; interpretazione vettoriale delle matrici; proprietà dei determinanti; ricerca del rango di una matrice; applicazioni dei determinanti alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.

8 ALGEBRA DELLE MATRICI. Volume secondo

149 esempi ed esercizi per illustrare in modo efficace gli spazi vettoriali, le trasformazioni lineari, la ricerca degli autovalori e degli autovettori di una matrice, le matrici simili e i procedimenti per triangolarizzare e per diagonalizzare una matrice; applicazioni a coniche e quadriche.

9 L'ALGEBRA DELLE MATRICI E LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

30 sistemi omogenei, non omogenei, parametrici, trigonometrici affrontati con il metodo di Gauss-Jordan, il più efficace nella risoluzione dei problemi tecnici.

10 NUMERI COMPLESSI

100 esercizi sufficienti per acquisire la pratica necessaria sui numeri complessi nelle loro quattro forme e per meglio fissare i concetti teorici espressi nel modo più elementare possibile, 22 temi d'esame risolti.

11 CORSO PROPEDEUTICO DI MATEMATICA PER GLI STUDENTI DEL PRIMO ANNO DI UNIVERSITÀ

294 esempi ed esercizi: dai polinomi alle disequazioni, dai logaritmi alle funzioni trigonometriche: i fondamenti della matematica necessari per affrontare in modo sicuro gli studi universitari.

12 LO STUDIO DELLA FUNZIONE

36 funzioni di vario tipo, precedute da una parte introduttiva avente la funzione di traccia per lo studio di qualsiasi funzione. Corredati di numerosi esempi ed esercizi, sono trattati: disequazioni, valori assoluti, estrazione di radici, funzioni inverse, calcolo di periodi, limiti, derivate, ecc.

13 IL LIMITE

337 esercizi scelti per condurre lo studente ad un'agevole ricerca dei limiti di funzioni di qualunque tipo e comunque complicate.

14 LA DERIVATA

220 esercizi di derivazione di funzioni vario tipo, esplicite ed implicite, ad una e a due variabili. Differenziali, derivate successive. Significato ed applicazioni della derivata.

15 L'INTEGRALE

250 esercizi di integrazione di funzioni di vario tipo; hanno lo scopo di condurre gradualmente lo studente ad una rapida familiarizzazione con l'operatore integrale.

16 CIRCUITI TRIFASE

36 esercizi concernenti l'analisi di reti trifase in regime sinusoidale: reti simmetriche equilibrate e non equilibrate; sistemi trifase simmetrici con neutro. Misura di potenze attive, reattive, apparenti nei sistemi trifase.

17 CAMPI E CIRCUITI MAGNETICI

46 esercizi completamente svolti, concernenti campi e circuiti magnetici, induttori mutuamente accoppiati, azioni meccaniche generate dalle correnti elettriche, elettromagneti.

18 EQUAZIONI DIFFERENZIALI

273 esercizi per acquisire la tecnica necessaria ad affrontare le equazioni differenziali nelle loro più svariate forme.

19 GEOMETRIA ANALITICA NEL PIANO

173 esercizi svolti concernenti la retta nelle sue varie forme e le sue proprietà; fasci di rette a centro proprio ed a centro improprio; traslazione e rotazione degli assi di riferimento; luoghi geometrici; circonferenza e sue proprietà; coniche in forma canonica: ellisse, parabola, iperbole; funzione omografica.

30 - SERIE DI FUNZIONI - ESERCIZI

Collana Esami

Giulio PANZARASA
Salvatore TRIBULATO

SERIE DI FUNZIONI ESERCIZI

132 esempi ed esercizi riguardanti lo studio delle serie di funzioni in campo reale ed in campo complesso: convergenza ed uniforme convergenza; derivazione ed integrazione per serie; serie di Taylor e di Mac Laurin; serie di Laurent; sviluppi in serie di Fourier di funzioni periodiche e non

€ 6,00

ISBN 978-88-85255-30-2



9 788885 255302

continua in seconda di copertina

Giulio PANZARASA – Salvatore TRIBULATO

SERIE DI FUNZIONI ESERCIZI



EDIZIONI TECNOS s.r.l.

© COPYRIGHT 2004
Seconda edizione
Prima edizione © 1989

EDIZIONI TECNOS srl
Via Rucellai 23 - 20126 Milano
Tel. & Fax 022571634
www.edizionitecnos.it
e-mail: info@edizionitecnos.it

ISBN 978-88-85255-30-2



Stampa della Edizioni Tecnos srl
Via Rucellai 23 - 20126 Milano

INDICE

1. UTILI NOZIONI FONDAMENTALI	
1.1.- Definizione di convergenza	7
1.2.- Premessa al concetto di convergenza uniforme	8
1.3.- Definizione di convergenza uniforme	9
1.4.- Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme	10
1.5.- Criterio di convergenza uniforme di Weierstrass	11
1.6.- Criterio di uniforme convergenza di Abel	12
1.7.- Continuità della somma di una serie di funzioni	13
1.8.- Integrazione per serie	14
1.9.- Derivazione per serie	15
2. SERIE DI POTENZE IN CAMPO REALE	
2.1.- Teoremi di Abel	17
2.2.- Intervallo di convergenza	17
2.3.- Determinazione dell'intervallo di convergenza	18
2.4.- Convergenza uniforme	19
2.5.- Continuità della somma	20
2.6.- Integrazione per serie	20
2.7.- Derivazione per serie	20
2.8.- Serie di Taylor e di Mac Laurin	21
2.9.- Formule di Taylor e di Mac Laurin	21
2.10.- Sviluppo di una funzione in serie di Taylor e di Mac Laurin	22
2.11.- Esempi di sviluppi di funzioni in serie di Mac Laurin	22
2.12.- Applicazioni delle serie	28
2.13.- Esercizi proposti	30
3. FUNZIONI COMPLESSE	
3.1.- Funzioni elementari di variabile complessa	41
3.2.- Funzioni monodrome e polidrome	44
3.3.- Funzione monodroma nella forma $w = u + jv$	44
3.4.- Limite e continuità di una funzione monodroma	45
3.5.- Derivata di una funzione monodroma	46
3.6.- Funzioni analitiche	47
3.7.- Derivata di una funzione analitica	48
3.8.- Determinazione della funzione coniugata di una data funzione	49
3.9.- Integrazione	53
3.10.- Teorema di Cauchy	55
3.11.- Formula di Cauchy	58
3.12.- Principio di massimo	59

4. SERIE IN CAMPO COMPLESSO

4.1.- Serie a termini complessi	61
4.2.- Serie di funzioni	62
4.3.- Serie di potenze	64
4.4.- Esercizi proposti	65
4.5.- Serie di Taylor	70
4.6.- Serie di potenze a esponente negativo	74
4.7.- Serie di Laurent	74
4.8.- Serie trigonometrica	79
4.9.- Relazioni tra coefficienti e somma in una serie trigonometrica	79
4.10.- Serie di Fourier	81
4.11.- Teorema fondamentale di convergenza	82
4.12.- Intervallo di integrazione di una funzione periodica	85
4.13.- Serie di Fourier di funzioni pari e dispari	85
4.14.- Sviluppo in serie di Fourier di una funzione non periodica	86
4.15.- Serie di Fourier in forma complessa	89
4.16.- Serie di Fourier di funzione di periodo 2λ	89
4.17.- Esercizi proposti	94
4.18.- Temi d'esame	98

1. UTILI NOZIONI FONDAMENTALI

1.1.- Definizione di convergenza

Data la successione di funzioni reali di variabile reale

$$u_1(x) \quad u_2(x) \quad \dots$$

definite nell'intervallo $a \leq x \leq b$, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{1.1.1}$$

è una serie di funzioni definita in tutti i punti di (a, b) ⁽¹⁾.

Assegnando alla variabile x un valore x_1 appartenente all'intervallo (a, b) la [1.1.1] si riduce a una serie numerica che può essere convergente o divergente e che può avere comportamento uguale o diverso da quello della serie numerica ottenuta sempre dalla [1.1.1] per $x = x_2$ anch'esso appartenente all'intervallo (a, b) .

Si dice che la [1.1.1] è convergente in un punto dell'intervallo di definizione se la corrispondente serie numerica è convergente. Si chiama *insieme o dominio di convergenza* della serie [1.1.1] l'insieme dei punti di (a, b) in cui la serie converge. In detto dominio rimane definita la funzione somma

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

che può essere continua o no. Al di fuori di questo dominio la serie di funzioni non ha somma.

Esempio.

1. Si determini il dominio di convergenza e la somma della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^n$$

Posto $q = \frac{x+1}{x-2}$ la serie si può scrivere $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

che è la serie geometrica, convergente per $|q| < 1$, cioè per:

$$\left| \frac{x+1}{x-2} \right| < 1 \rightarrow (x+1)^2 < (x-2)^2 \rightarrow x^2 + 2x + 1 < x^2 - 4x + 4 \rightarrow x < 1/2$$

La serie è convergente quindi su tutti i punti della semiretta $x < 1/2$. La sua somma è data da:

$$S(x) = \frac{1}{1 - \frac{x+1}{x-2}} = \frac{2-x}{3}$$

⁽¹⁾ Indicheremo con (a, b) l'intervallo (chiuso) in cui $a \leq x \leq b$ (estremi compresi) e con $[a, b]$ l'intervallo (aperto) in cui è $a < x < b$ (estremi esclusi).

1.2.- Premessa al concetto di convergenza uniforme.

Nell'ipotesi che la serie [1.1.1] sia convergente, in base al criterio generale di convergenza di Cauchy (cfr. P.29, *Serie numeriche*, §2.3) e relativamente al punto x_1 , si ha che, fissato ad arbitrio un $\epsilon > 0$, si può determinare un $N_1 > 0$ tale che per tutti gli $n > N_1$, valga la relazione:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = |R_n(x_1)| < \epsilon \quad [1.2.1]$$

È chiaro che N_1 dipende da ϵ .

Per lo stesso ϵ ma per un punto $x_2 \neq x_1$ si ha, analogamente:

$$|R_n(x_2)| < \epsilon \quad [1.2.2]$$

per tutti gli $n > N_2$ con N_2 in generale diverso da N_1 ; se per esempio $N_2 > N_1$ per $n > N_2$ vale sia la [1.2.1] sia la [1.2.2]. Quindi in ogni punto x di (a, b) , per l'ipotesi di convergenza della [1.1.1], fissato $\epsilon > 0$, si può sempre trovare un N che però dipende dal punto x ; siccome ϵ è arbitrario, generalizzando si può dire che N dipende sia da ϵ che da x e si può scrivere $N = N(\epsilon, x)$.

Ci domandiamo ora se, per un prefissato ϵ , esiste un \bar{N} tale che per tutti gli x di (a, b) e per ogni $n > \bar{N}$ si abbia:

$$|R_n(x)| < \epsilon \quad [1.2.3]$$

È chiaro che tale \bar{N} , se esiste, non dipende da x ma solo da ϵ . In altre parole, ci domandiamo se, per un prefissato ϵ , esiste un massimo per $N(x)$ tale da soddisfare la [1.2.3] per tutti gli x . I seguenti esempi chiariranno il concetto.

2. Consideriamo la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ nell'intervallo $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Essa è convergente e ha per somma:

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

il resto $R_n(x)$ è la serie:

$$R_n(x) = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \dots = x^n(1 + x + x^2 + \dots) = x^n \cdot \frac{1}{1-x}$$

che è una funzione crescente nell'intervallo considerato, e quindi ha l'estremo superiore in $x = 1/2$.

Applicando la [1.2.3] si ha:

$$|R_n(x)| = \frac{x^n}{1-x} < \epsilon \rightarrow n \log x < \log[\epsilon(1-x)]$$

$$n > \frac{\log[\epsilon(1-x)]}{\log x} \rightarrow n > \frac{\log\left(\epsilon \cdot \frac{1}{2}\right)}{\log \frac{1}{2}} = \frac{\log \epsilon - \log 2}{-\log 2} = 1 - \frac{\log \epsilon}{\log 2}$$

ossia, indicando con \bar{N} il primo intero maggiore di $1 - \frac{\log \epsilon}{\log 2}$, la [1.2.3] risulta veri-

ficata in tutti i punti dell'intervallo $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ per $n > \bar{N}$.

3. Consideriamo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)x^k$ nell'intervallo $(\frac{1}{3}, 1)$; essa è convergente nei punti $\frac{1}{3} \leq x < 1$ quale serie geometrica avente come primo termine $(1-x)$, come ragione $x < 1$ e come somma $S(x) = \frac{(1-x)}{(1-x)} = 1$.

Nel punto $x = 1$ la serie è convergente perché tutti i suoi termini sono nulli e quindi ha somma uguale a zero; nell'intervallo $(\frac{1}{3}, 1)$ la serie è convergente ma la sua somma $S(x)$ è discontinua.

Applicando la [1.2.3] si ha:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= (1-x)x^n + (1-x)x^{n+1} + \dots = (1-x)x^n(1 + x + x^2 + \dots) = \\ &= (1-x)x^n \frac{1}{1-x} = x^n < \epsilon \end{aligned}$$

da cui

$$n > \frac{\log \epsilon}{\log x}$$

ossia, siccome per $x \rightarrow 1^-$ è $\log x \rightarrow 0^-$, il secondo membro tende all'infinito e non esiste un valore di \bar{N} che soddisfi la [1.2.3].

In entrambi gli esempi si ha a che fare con serie convergenti nell'intervallo di definizione ma dal comportamento diverso in quanto la prima ha somma continua e soddisfa la [1.2.3] mentre la seconda ha somma discontinua e non soddisfa la [1.2.3].

1.3.- Definizione di convergenza uniforme

Una serie di funzioni definite nell'intervallo (a, b) e convergente in tutti i punti di esso, viene detta uniformemente convergente se è possibile, per ogni $\epsilon > 0$ arbitrario, determinare un \bar{N} intero tale che per tutti gli $n > \bar{N}$ valga in tutto (a, b) la disuguaglianza:

$$|R_n(x)| < \epsilon \quad [1.3.1]$$

Ricordando che $R_n(x) = S(x) - s_n(x)$, la [1.3.1] diventa:

$$|S(x) - s_n(x)| < \epsilon$$

che geometricamente può essere così interpretata: per un prefissato $\epsilon > 0$ si possono sempre trovare delle somme parziali il cui grafico cade interamente nella striscia compresa tra $S(x) + \epsilon$ e $S(x) - \epsilon$; in altre parole per $n \rightarrow \infty$ $s_n(x) \rightarrow S(x)$.

Per la serie dell'esempio 2 si ha:

$$S(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{e} \quad s_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

ed essendo (si ricordi che è $x < 1$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{1}{1-x} = S(x)$$

la serie è uniformemente convergente.

Dal diagramma della fig. 1.3.1, che riporta l'andamento delle funzioni della serie nell'intervallo considerato, si nota che la distanza tra $S(x)$ e $s_n(x)$ decresce al crescere di n , e a partire da un certo n in poi tutte le somme parziali s_n sono contenute nella striscia delimitata da $S(x)$ e $S(x) - \epsilon$.

Per la serie dell'esempio 3 si ha:

$$S(x) = 1 \text{ per } x \text{ in } \left(\frac{1}{3}, 1\right] \text{ e } S(1) = 0$$

$$s_n(x) = 1 - x^n \rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 1 & x < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 0 & x = 1 \end{cases}$$

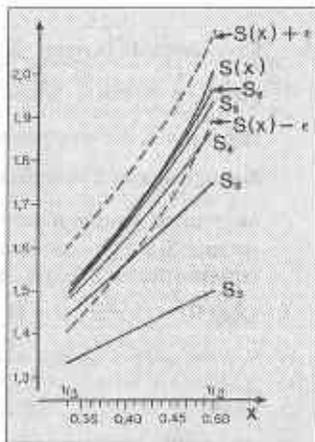


Fig. 1.3.1

e per $n = 1, 2, 3, \dots$ si hanno i grafici di fig. 1.3.2. Come si vede chiaramente, nell'intorno sinistro di $x = 1$, per qualunque n , la distanza $S(x) - s_n(x)$ è vicina a 1 quanto si vuole, e inoltre, per $\epsilon < 1$, la striscia delimitata da $S(x)$ e $S(x) - \epsilon$ non contiene interamente alcuna s_n ; quindi la serie non è uniformemente convergente.

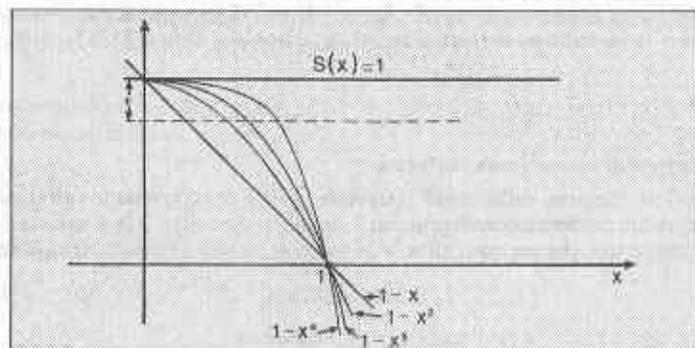


Fig. 1.3.2

1.4.- Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme

Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad a \leq x \leq b \quad [1.4.1]$$

nell'intervallo (a, b) è che, preso un $\bar{\epsilon} > 0$ arbitrario, si possa determinare un intero positivo N tale che per tutti gli $n > N$ e per tutti gli interi r valga in (a, b) la seguente disuguaglianza:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+r} u_k(x) \right| < \bar{\epsilon} \quad [1.4.2]$$

La condizione è necessaria perché, se la [1.4.1] è uniformemente convergente, cioè se $|R_n(x)| < \epsilon$, la [1.4.2] è verificata; infatti si ha

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+r} u_k(x) \right| = |R_n(x) - R_{n+r}(x)| \leq |R_n(x)| + |R_{n+r}(x)| < 2\epsilon$$

ossia la [1.4.2] assumendo $\epsilon = \frac{\bar{\epsilon}}{2}$.

Per la sufficienza si ha:

$$|R_n(x)| = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=n+1}^{n+r} u_k(x) \right| \leq \bar{\epsilon} < 2\bar{\epsilon}$$

ossia $|R_n(x)| < \epsilon$ assumendo $\epsilon = 2\bar{\epsilon}$.

1.5.- Criterio di convergenza uniforme di Weierstrass

Una serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad a \leq x \leq b \quad [1.5.1]$$

è uniformemente convergente nell'intervallo di definizione se si può trovare una serie numerica a termini positivi $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ convergente e tale che:

$$|u_k(x)| \leq \alpha_k \quad a \leq x \leq b \quad [1.5.2]$$

Infatti dalla [1.5.2] e dal criterio generale di convergenza di Cauchy per le serie numeriche, espresso da $\sum_{k=n+1}^{n+r} \alpha_k < \epsilon$, risulta verificata la [1.4.2]:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+r} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+r} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+r} \alpha_k < \epsilon \quad [1.5.3]$$

Dalla [1.5.3] si deduce pure che la serie [1.5.1] è assolutamente convergente perché è convergente la serie dei moduli $\sum |u_k|$ la quale è anch'essa uniformemente convergente.

Una serie che risulta uniformemente convergente per il presente criterio viene detta maggiorabile. Tale criterio è solo sufficiente per cui una serie uniformemente convergente non è detto che sia maggiorabile.

Esempio.

$$4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n^2}$$

Poiché è $|\text{sen } nx| \leq 1$ per qualunque x reale, si ha:

$$\left| \frac{\text{sen } nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

cioè, ciascun termine della serie data risulta, in valore assoluto, non superiore al corrispondente termine della serie armonica generalizzata che, come sappiamo (cfr. P.29, Serie numeriche - Esercizi, §3.2), è convergente per $p > 1$ (nel nostro caso è $p = 2$). La serie data è quindi, per il criterio di Weierstrass, uniformemente convergente su tutto l'asse reale.

1.6.- Criterio di uniforme convergenza di Abel

È anch'esso un criterio solo sufficiente. Una serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad a \leq x \leq b$$

è uniformemente convergente se risultano verificate le seguenti relazioni:

$$u_k(x) = \alpha_k v_k(x) \quad [1.6.1]$$

dove gli α_k sono delle costanti tali che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ sia convergente e le funzioni $v_k(x)$, in tutto l'intervallo (a, b) , sono non negative, minori di una costante (ovviamente positiva) M e tali che:

$$v_1(x) \geq v_2(x) \geq \dots \geq v_n(x) \geq \dots$$

Esempio.

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{\frac{x-1}{n(x+2)}}$$

Si tratta di una serie convergente per qualunque $x \neq -2$ come si può verificare applicando il criterio del quoziente (cfr. P.29, *Serie numeriche*, §3.3). Si ha infatti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} e^{\frac{x-1}{n(x+2)}} = 0$$

e prendendo per il confronto la serie armonica generalizzata con $p = 3$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{x-1}{n(x+2)}} = 1$$

Vediamo adesso se la serie è uniformemente convergente. Si ha:

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

è convergente (serie armonica generalizzata con $p = 3$).

2) Le funzioni $v_n(x) = e^{\frac{x-1}{n(x+2)}}$ sono non negative su tutto l'asse x .

3)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x-1}{n(x+2)}} = e^{\frac{1}{n}}$$

quindi ciascuna delle funzioni costituenti la serie risulta minore di $M = e$.

4) Resta da vedere se è verificata la condizione:

$$v_1(x) \geq v_2(x) \geq \dots \geq v_n(x)$$

Essendo $e > 1$ è sufficiente vedere quando è

$$\frac{x-1}{n(x+2)} \geq \frac{x-1}{(n+1)(x+2)} \rightarrow \frac{x-1}{x+2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \geq 0$$

Essendo

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$$

la condizione è verificata per

$$x < -2 \quad \text{e} \quad x \geq 1$$

cioè, in questo intervallo il criterio di Abel ci assicura che la serie è uniformemente convergente.

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$$

a) Essendo $\sin^2 nx \leq 1$ per qualunque x si può scrivere:

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

quindi, per il criterio di Weierstrass, la serie risulta uniformemente convergente su tutto l'asse reale.

b) Appliciamo il criterio di Abel. Si ha:

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

è convergente (serie armonica generalizzata con $p = 2$).

2) Le funzioni $v_n(x) = \sin^2 nx$ sono non negative su tutto l'asse reale.

3) Si ha $\sin^2 nx \leq M = 1$ su tutto l'asse reale.

4) Resta da vedere se è verificata la condizione:

$$v_1(x) \geq v_2(x) \geq \dots \geq v_n(x)$$

Dal diagramma che riporta l'andamento delle $v_n(x)$ si vede che la condizione non è mai verificata in alcun intervallo.

Ciò però non ci autorizza a concludere che la serie non è uniformemente convergente, in quanto il criterio è solamente sufficiente. Ed infatti, come abbiamo visto in a), la serie è uniformemente convergente su tutto l'asse reale.

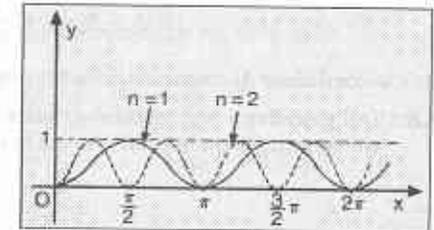


Fig. 1.6.1

1.7.- Continuità della somma di una serie di funzioni

È noto che un numero finito di funzioni continue ha per somma una funzione continua; ciò non è sempre vero per un numero infinito di funzioni continue come risulta dagli esempi 2 e 3. Vediamo ora quando ciò si verifica.

Se le funzioni

$$u_1(x) \quad u_2(x) \quad \dots \quad u_n(x)$$

sono continue nell'intervallo (a, b) , e la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

è uniformemente convergente in tale intervallo, la somma $S(x)$ della serie è continua nello stesso intervallo.

Infatti dalla convergenza uniforme risulta:

$$|R_n(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad [1.7.1]$$

Scrivendo la relazione che lega S , R_n , s_n per il punto x_0 e per il generico punto x si ha:

$$S(x) = R_n(x) + s_n(x)$$

$$S(x_0) = R_n(x_0) + s_n(x_0)$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$S(x) - S(x_0) = s_n(x) - s_n(x_0) + R_n(x) - R_n(x_0)$$

$$|S(x) - S(x_0)| \leq |s_n(x) - s_n(x_0)| + |R_n(x)| + |R_n(x_0)| \quad [1.7.2]$$

Siccome la funzione $s_n(x)$ è continua, in quanto somma di un numero finito di funzioni continue, per definizione si ha:

$$|s_n(x) - s_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \quad [1.7.3]$$

In base alla [1.7.1] e alla [1.7.3] la [1.7.2] diventa:

$$|S(x) - S(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

che è la condizione di continuità della funzione $S(x)$.

N.B.: Dal precedente ragionamento risulta che una serie non può essere uniformemente convergente in un intervallo in cui la somma $S(x)$ è discontinua.

1.8.- Integrazione per serie

È noto che la somma di un numero finito di funzioni integrabili ha per integrale la somma degli integrali delle funzioni; ciò non è sempre vero per un numero infinito di funzioni. Vediamo ora quando ciò si verifica.

Per una serie di funzioni continue

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

che sia uniformemente convergente in (a, b) e quindi abbia somma $S(x)$ continua (cfr. §1.7), l'integrale della somma $S(x)$ è uguale, in ogni intervallo di (a, b) , alla serie degli integrali delle funzioni; si ha cioè

$$\int_a^x S(t) dt = \int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t) dt \quad a \leq x \leq b$$

Esempio.

7. Determiniamo l'intervallo di uniforme convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n$$

Applichiamo il criterio di Weierstrass scegliendo come serie di confronto la serie geometrica di ragione $q < 1$:

$$\left| \frac{x-1}{2} \right| \leq q < 1$$

$$\left| \frac{x-1}{2} \right| < 1 \rightarrow |x-1| < 2 \rightarrow -2 < x-1 < 2 \rightarrow -1 < x < 3$$

la serie risulta uniformemente convergente nell'intervallo aperto $[-3, 3]$. Essa è la serie geometrica di ragione $(x-1)/2$ privata del primo termine $a_0 = 1$, quindi la sua somma è:

$$S(x) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{2}} - 1 = \frac{2}{3-x} - 1 = \frac{x-1}{3-x}$$

Vediamo se è possibile applicare il teorema di integrazione per serie nell'intervallo chiuso $(0, 2)$.

- 1) In tale intervallo le infinite funzioni della serie sono tutte continue;
- 2) L'intervallo chiuso $(0, 2)$ è contenuto interamente nell'intervallo di convergenza uniforme della serie.

Pertanto, essendo verificate le condizioni per l'integrazione per serie, si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^2 \left(\frac{x-1}{2} \right)^n dx = \int_0^2 \frac{x-1}{3-x} dx = \\ &= \left[-x - 2 \log(3-x) \right]_0^2 = -2 + 2 \log 3 = 2(\log 3 - 1) \end{aligned}$$

1.9.- Derivazione per serie

Anche in questo caso ciò che è valido per un numero finito di funzioni non è sempre valido per un numero infinito.

Per una serie di funzioni aventi derivate continue in (a, b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad [1.9.1]$$

che sia convergente in (a, b) e quindi abbia somma $S(x)$, la derivata della somma è uguale alla serie delle derivate, cioè

$$S'(x) = \frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{du_k(x)}{dx}$$

se la serie delle derivate

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \quad [1.9.2]$$

è uniformemente convergente.

8. Sia data la serie geometrica (privata del primo termine)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

convergente per $|x| < 1$.

Le funzioni che la costituiscono sono continue e derivabili nell'intervallo di convergenza. Essa ha per somma:

$$S(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

La serie delle derivate è:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Vediamo se è uniformemente convergente. Applichiamo il criterio di Weierstrass scegliendo come serie numerica di confronto la serie il cui termine generale è na^{n-1} .

Con $|x| < a < 1$ risulta $|nx^{n-1}| \leq na^{n-1}$.

Inoltre la serie numerica è convergente, come risulta dal criterio del rapporto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a^n}{na^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} a = a < 1$$

Pertanto la serie delle derivate è uniformemente convergente nell'intervallo aperto $[-1, 1]$. Si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx} S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Verifichiamo tale risultato:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

Essa risulta il prodotto alla Cauchy (cfr. P.29, *Serie numeriche*, §2.7) della serie geometrica per se stessa, cioè:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Pertanto la sua somma è:

$$S'(x) = [S(x)]^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2 - SERIE DI POTENZE IN CAMPO REALE

2.1.- Teoremi di Abel

Le serie di potenze sono delle particolari serie di funzioni e hanno espressione del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad [2.1.1]$$

dove i coefficienti a_n sono costanti reali funzione di n ma non di x .

Le serie di potenze godono della proprietà di essere sempre convergenti almeno in un punto, cioè in $x = 0$.

a) Se una serie di potenze è convergente in un punto $x_0 \neq 0$ essa è assolutamente convergente in tutti i punti x tali che

$$|x| < |x_0|$$

Infatti, siccome in una serie convergente $u_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, esiste un numero positivo M maggiore del valore assoluto di ogni termine della serie, per cui vale la relazione

$$|a_n x_0^n| < M$$

che ci permette di scrivere la serie dei moduli della [2.1.1] nel seguente modo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < \sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = \text{serie geometrica di ragione } \left| \frac{x}{x_0} \right|$$

Nei punti $|x| < |x_0|$ la ragione è minore di 1, la serie geometrica è convergente, la serie dei moduli $\sum |a_n x^n|$ è convergente per il criterio del confronto e la serie [2.1.1] è perciò assolutamente convergente. Nei punti $|x| > |x_0|$, la ragione è maggiore di 1, la serie geometrica è divergente ma il criterio del confronto non permette di concludere nulla relativamente alla serie dei moduli.

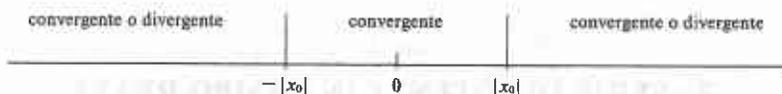
b) Se una serie di potenze è divergente in un punto $\bar{x}_0 \neq 0$, essa è divergente in tutti i punti x tali che

$$|x| > |\bar{x}_0|$$

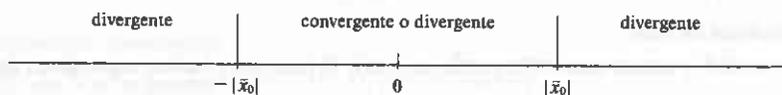
Si ragioni per assurdo: supponiamo che la serie, divergente in \bar{x}_0 , sia convergente in un punto $|x_1| > |\bar{x}_0|$; se così fosse, la serie per il teorema a) dovrebbe essere convergente in tutti i punti $|x| < |x_1|$ e quindi anche in \bar{x}_0 , contrariamente all'ipotesi.

2.2.- Intervallo di convergenza

Dai teoremi precedenti si traggono le seguenti conclusioni: se la serie [2.1.1] è convergente in un punto $x_0 \neq 0$, essa è convergente nell'intervallo $(-|x_0|, |x_0|)$, ma non si può affermare nulla circa il suo comportamento all'esterno di detto intervallo;



se la serie [2.1.1] è divergente in $\bar{x}_0 \neq 0$, essa lo è anche nei punti $|x| > |\bar{x}_0|$ ma non si può dire nulla per i punti $|x| < |\bar{x}_0|$;



Studiando la serie in tutti i punti si perviene alla conclusione che l'insieme dei punti $-|x_0| < x < |x_0|$ per cui la serie converge ammette un estremo superiore $|E_s|$ e che l'insieme dei punti $|x| > |\bar{x}_0|$ per cui la serie diverge ammette un estremo inferiore $|E_i|$ e che tali estremi coincidono:

$$|E_s| = |E_i| = |R|$$

Il segmento avente per estremi $-R$ ed R costituisce l'intervallo o dominio di convergenza: nei suoi punti interni la serie è convergente, in quelli esterni è divergente, agli estremi può essere sia convergente che divergente. R viene detto raggio di convergenza.

Come casi particolari si hanno:

$R = 0$ l'intervallo di convergenza si riduce al solo punto $x = 0$

$R = \infty$ la serie converge in tutti i punti.

2.3.- Determinazione dell'intervallo di convergenza

Per determinare l'intervallo di convergenza $(-R, R)$ della [2.1.1] si deve studiare la serie dei moduli $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ con uno dei metodi validi per le serie numeriche a termini positivi.

Come esempio studiamo detta serie col metodo del limite della radice; si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \sqrt[n]{a_n}$$

per $|x| < \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ tale limite è < 1 e la serie è assolutamente convergente

per $|x| > \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ la serie dei moduli è divergente e quindi il suo termine generale non tende a zero; ma se $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n x^n| \neq 0$ anche $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n \neq 0$ e quindi la serie [2.1.1] è divergente

per $|x| = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ il criterio risulta inefficace

In conclusione l'intervallo di convergenza ha raggio $R = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ ma non si può dire nulla relativamente ai suoi estremi dove la serie deve essere studiata con altri criteri.

Si arriva alle stesse conclusioni anche utilizzando altri criteri.

Esempi.

9. La serie esponenziale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ha $R = \infty$; infatti applicando il criterio del rapporto alla serie dei moduli si ottiene:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \frac{n!}{|x^n|} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \quad \text{per ogni } x$$

che ci permette di affermare che la serie esponenziale è assolutamente convergente per ogni x .

10. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ ha $R = 0$; infatti per il criterio del rapporto si ha:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! |x^{n+1}|}{n! |x^n|} = (n+1) |x| \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \infty \quad \text{per } x \neq 0$$

quindi la serie è divergente per $x \neq 0$ e convergente per $x = 0$.

11. La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ha $R = 1$; negli estremi dell'intervallo cioè per $|x| = 1$ è divergente.

12. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ con $p > 1$ ha $R = 1$ e negli estremi, a differenza della serie precedente, è convergente; infatti per il criterio del rapporto applicato alla serie dei moduli si ha:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)^p} \frac{n^p}{|x^n|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p |x| \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x|$$

per cui la serie converge per $|x| < 1$ e diverge per $|x| > 1$; per $x = 1$ la serie diventa

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ cioè la serie p che per $p > 1$ sappiamo essere convergente; per $x = -1$ la serie è assolutamente convergente perchè la serie dei moduli è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

13. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ha $R = 1$ ma ha un comportamento diverso nei due estremi dell'intervallo: per $x = 1$ diventa la serie armonica che è divergente, mentre per $x = -1$ diventa la serie armonica alternata che è convergente con somma $S = \log 2$ (cfr. es. 21).

2.4.- Convergenza uniforme

Una serie di potenze è uniformemente convergente in ogni segmento $(-r, r)$ interamente contenuto nell'intervallo di convergenza cioè per $r < R$.

Infatti, fissato un $r < R$ si può sempre trovare un \bar{r} con $r < \bar{r} < R$ e per $x = \bar{r}$ la serie è

per ipotesi assolutamente convergente (cfr. §2.1-a). Possiamo ora applicare il criterio di Weierstrass (cfr. §1.5) assumendo come serie numerica convergente a termini positivi α_n , quella dei moduli della serie di potenze in $x = \bar{r}$ e cioè:

$$\alpha_n = |a_n| \bar{r}^n$$

e come serie da studiare $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; siccome per $|x| \leq r$ si ha

$$|a_n x^n| < a_n \bar{r}^n$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è uniformemente convergente per $-r \leq x \leq r$.

2.5.- Continuità della somma

La somma di una serie di potenze è continua in ogni segmento $(-r, r)$ interamente contenuto nell'intervallo di convergenza cioè con $r < R$.

Infatti in tale intervallo sono verificate le due condizioni richieste per la continuità della somma di una serie di funzioni e cioè la continuità del termine $a_n x^n$ e la uniforme convergenza della serie.

2.6.- Integrazione per serie

L'integrale della somma di una serie di potenze è uguale alla serie degli integrali in qualunque intervallo (α, β) interamente contenuto nell'intervallo di convergenza. Infatti per $-R < \alpha \leq x \leq \beta < R$ la serie di potenze soddisfa le due condizioni richieste dal teorema di integrazione per serie di funzioni e cioè la continuità del termine $a_n x^n$ e la uniforme convergenza della serie.

2.7.- Derivazione per serie

Sia data la serie di potenze

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad [2.7.1]$$

ha intervallo di convergenza $(-R, R)$. La serie ottenuta derivando termine a termine è:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots \quad [2.7.2]$$

Se nell'intervallo $(-R, R)$ valgono le condizioni del teorema di derivazione per serie (cfr. §1.9), indicando con $S(x)$ la somma della [2.7.1] e con $\bar{S}(x)$ la somma della [2.7.2] si ha:

$$\bar{S}(x) = \frac{d}{dx} S(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

in ogni punto interno all'intervallo $(-R, R)$ ossia che la somma $\bar{S}(x)$ della serie ottenuta derivando termine a termine la serie di potenze [2.7.1] è uguale alla derivata della somma $S(x)$ della serie [2.7.1].

Quanto detto per la [2.7.1] può essere ripetuto per la [2.7.2] e proseguendo in tal modo si arriva al seguente risultato:

la serie [2.7.1] di somma $S(x)$ può essere derivata in ogni punto interno a $(-R, R)$ un numero qualunque p di volte, cioè si ha:

$$S^{(p)}(x) = \frac{d^p}{dx^p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^p}{dx^p} (a_n x^n)$$

Tutte le serie ottenute derivando successivamente la [2.7.1] hanno lo stesso intervallo di convergenza $(-R, R)$.

2.8.- Serie di Taylor e di Mac Laurin

Una funzione $f(x)$ continua in (a, b) insieme con le sue derivate di tutti gli ordini permette di scrivere formalmente la seguente serie, detta di Taylor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots \quad [2.8.1]$$

dove x e x_0 sono punti dell'intervallo di definizione. In generale tale serie può essere divergente, convergente con somma $S(x) \neq f(x)$ e convergente con somma $S(x) = f(x)$. Il caso più interessante, per se stesso e per le sue applicazioni, è il terzo cioè quello per cui la serie di Taylor dedotta da una funzione $f(x)$ ha per somma la stessa $f(x)$.

Ponendo $x - x_0 = X$ la serie di Taylor diventa una serie di potenze del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ dove $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Per $x_0 = 0$ la serie di Taylor diventa la serie di Mac Laurin.

2.9.- Formule di Taylor e di Mac Laurin

Si dimostra che una funzione $f(x)$ continua insieme con le sue derivate degli $(n + 1)$ ordini in (a, b) ammette la seguente formula o sviluppo accorciato di Taylor:

$$f(x) = \left[f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{x - x_0}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \right] + R_n \quad [2.9.1]$$

dove x e x_0 sono punti di (a, b) e R_n è il resto che vale:

$$R_n = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)] \quad (0 < \theta < 1) \quad [\text{detto resto di Lagrange}]$$

$$R_n = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} (1 - \theta)^n f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)] \quad (0 < \theta < 1) \quad [\text{detto resto di Cauchy}]$$

In entrambi i resti la derivata è calcolata in un punto compreso tra x_0 e x in quanto $0 < \theta < 1$ ma per valori di θ diversi, in generale, nei due casi.

Per $x_0 = 0$ si ha la formula di Mac Laurin.

Nel caso che $f(x)$ sia un polinomio di grado n , il resto, in entrambe le forme, è nullo perché è nulla la derivata di ordine $(n + 1)$.

2.10.- Sviluppo di una funzione in serie di Taylor e di Mac Laurin

Se, nelle ipotesi del paragrafo precedente, la funzione $f(x)$ ammette le derivate di tutti gli ordini, è possibile scrivere la formula di Taylor per un numero n grande a piacere; passando al limite per $n \rightarrow \infty$ in entrambi i membri della [2.9.1], si ha che:

- 1) il termine $f(x)$ non varia perché indipendente da n
- 2) i termini entro parentesi quadre diventano la serie di Taylor [2.8.1] della $f(x)$
- 3) il resto, in generale può tendere a qualunque limite.

Per $n \rightarrow \infty$ la [2.9.1] diventa:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$$

È chiaro che se e soltanto se $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, la funzione $f(x)$ è la somma della serie di Taylor da essa dedotta, cioè è sviluppabile in serie di Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Per $x_0 = 0$ si ha lo sviluppo in serie di Mac Laurin.

2.11.- Esempi di sviluppi di funzioni in serie di Mac Laurin

14. FUNZIONI $\sin x$ e $\cos x$

Le funzioni sono continue insieme con le derivate di tutti gli ordini in tutto l'asse x ; per $x_0 = 0$ il resto nella forma di Lagrange è:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

e tende a zero per $n \rightarrow \infty$; infatti per ogni n e ogni x si ha:

$$|f^{(n+1)}(\theta x)| = \begin{cases} |\pm \sin \theta x| \leq 1 \\ |\pm \cos \theta x| \leq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

quale termine generale della serie esponenziale che è convergente (cfr. es. 9); quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$$

Essendo verificate le condizioni per lo sviluppo in serie di Mac Laurin, si può passare al calcolo delle derivate nel punto $x = 0$.

Le derivate di ordine pari $2n$ sono:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin x = (-1)^n \sin x \rightarrow \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin x \Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \cos x = (-1)^n \cos x \rightarrow \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \cos x \Big|_{x=0} = (-1)^n$$

Le derivate di ordine dispari $(2n+1)$ sono:

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \sin x = (-1)^n \cos x \rightarrow \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \sin x \Big|_{x=0} = (-1)^n$$

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \cos x = (-1)^{n+1} \sin x \rightarrow \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \cos x \Big|_{x=0} = 0$$

Quindi si ha:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$$

Tali sviluppi sono serie a segni alterni nelle quali l'errore che si commette (cfr. P.29, *Serie numeriche*, §4.1) assumendo come somma della serie una somma parziale è inferiore, in valore assoluto, al primo termine scartato, quindi sono comode per calcoli con valori piccoli di x (in tal caso bastano pochi termini perché gli altri sono trascurabili) e scomode per valori grandi di x (in tal caso per avere un piccolo errore sono necessari molti termini).

15. FUNZIONE ESPONENZIALE e^x

È continua insieme con le derivate di tutti gli ordini in tutto l'asse x ; il resto di Lagrange tende a zero per $n \rightarrow \infty$; infatti essendo $\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x$ si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| \quad 0 < \theta < 1$$

Essendo:

$$\text{per } x > 0 \quad e^{\theta x} < e^x$$

$$\text{e per } x < 0 \quad e^{\theta x} < e^{-x}$$

$$\text{si ha, per ogni } x, \quad e^{\theta x} < e^{|x|}$$

Il limite del resto è quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| < e^{|x|} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$$

Lo sviluppo in serie di Mac Laurin è:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^0 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad -\infty < x < +\infty$$

Siccome i valori negativi della variabile possono essere espressi da $-x$ con $x > 0$ e quelli positivi da $-x$ con $x < 0$ nelle precedenti si può scambiare x con $-x$ ottenendo:

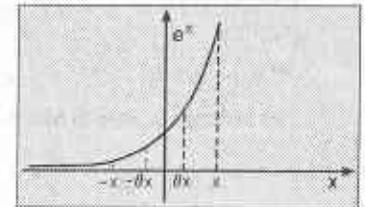


Fig. 2.11.1

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (-1)^n \quad -\infty < x < +\infty$$

dove i valori positivi delle x possono essere espressi da x^2 ottenendo:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} (-1)^n$$

16. FUNZIONI IPERBOLICHE $\text{Sh } x$, $\text{Ch } x$

Applicando la sommabilità di due serie convergenti (cfr. P.29, *Serie numeriche*, §2.7) si ha (cfr. es. 15):

$$\text{Sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\text{Ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad -\infty < x < +\infty$$

17. FUNZIONE ESPONENZIALE COMPLESSA e^z E FORMULA DI EULERO

La funzione e^z dove $z = x + jy$ è definita nel seguente modo

$$e^z = e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy}$$

Ponendo $jy = t$, lo sviluppo di e^t in serie di Mac Laurin è il seguente:

$$e^t = e^{jy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jy)^n}{n!}$$

Ricordando che:

$$j^2 = -1 \quad j^3 = j^2 \cdot j = -j \quad j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1$$

$$j^{2m} = (-1)^m \quad j^{2m+1} = j \cdot j^{2m} = j(-1)^m$$

e gli sviluppi in serie di Mac Laurin di seno e coseno si ottiene:

$$e^{jy} = 1 + jy - \frac{y^2}{2!} - \frac{jy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{jy^5}{5!} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right) + j \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots\right) = \cos y + j \sin y$$

La formula di Eulero è la seguente:

$$e^z = e^{x+jy} = e^x (\cos y + j \sin y)$$

18. SERIE BINOMIALE

È lo sviluppo in serie di Mac Laurin della funzione:

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

per $-1 < x < 1$ cioè $(1+x) > 0$ e per α reale.

Per α intero positivo e $(1+x)$ reale si ha la formula del binomio di Newton. La funzione $f(x)$ è continua insieme con le derivate di tutti gli ordini che sono:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$$

Verifichiamo che il resto di Cauchy tende a zero per $n \rightarrow \infty$:

$$R_n = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{n!} (1-\theta)^n (1+\theta x)^{\alpha-n-1} \cdot x^{n+1} =$$

$$= \alpha \binom{\alpha-1}{n} (1+\theta x)^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n x^{n+1}$$

Essendo $0 < \theta < 1$, nell'intervallo $-1 < x < 1$ si ha che $(1+\theta x) > 0$ e $(1+\theta x)^{\alpha-1}$ come funzione potenza ammette un massimo assoluto che indichiamo con M ; siccome $|\theta x| < \theta$ si ha:

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1 \quad \text{e quindi} \quad |R_n| < M |\alpha| \left| \binom{\alpha-1}{n} x^{n+1} \right|$$

L'espressione $\binom{\alpha-1}{n} x^{n+1}$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$ perché è il termine generale della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^{n+1}$$

che è convergente, come si può verificare facilmente applicando il criterio del rapporto:

$$\left| \binom{\alpha-1}{n+1} x^{n+2} \cdot \frac{1}{x^{n+1} \binom{\alpha-1}{n}} \right| = \left| \frac{(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n)(\alpha-n-1) x^{n+2}}{(n+1)n! x^{n+1} \frac{(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{n!}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\alpha-n-1}{n+1} x \right|$$

il cui limite per $n \rightarrow \infty$ tende a $|x| < 1$.

È lecito quindi lo sviluppo in serie di Mac Laurin della $f(x)$ che è:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \dots \quad |x| < 1$$

La funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ quale potenza ad esponente reale, è definita per valori positivi della base, cioè per $x > -1$, insieme con le derivate di tutti gli ordini; quindi la sua serie di Mac Laurin esiste per $x > -1$ ma converge a $f(x) = (1+x)^\alpha$ solo per $|x| < 1$; tale intervallo può comprendere gli estremi nei due seguenti casi particolari che non dimostriamo:

- a) per $\alpha > 0$, non intero, la serie converge assolutamente per $-1 \leq x \leq 1$
 b) per $-1 < \alpha < 0$ la serie converge per $-1 < x \leq 1$

Diamo ora le espressioni per alcuni valori particolari di α :

$$\boxed{a = -1}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \text{[serie geometrica di ragione } -x\text{]}$$

che, ponendo x^2 al posto di x , diventa:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} (-1)^n$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2n)}x^n (-1)^n + \dots$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}x^{2n} (-1)^n + \dots$$

che, ponendo $-x^2$ al posto di x diventa

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}x^{2n} + \dots$$

19. FUNZIONE arcsen x

Dalla serie binomiale per $\alpha = \frac{1}{2}$ e dal teorema di integrazione per serie di potenze si ha per $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \arcsen x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^6 + \dots \right) dt = \\ &= x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)(2n+1)}x^{2n+1} \end{aligned}$$

Si dimostra che tale sviluppo è valido anche per $|x| = 1$ per cui si ha:

$$\arcsen 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

che ci permette di calcolare il valore di π con l'approssimazione desiderata.

20. FUNZIONE arctg x

Dalla serie binomiale per $\alpha = -1$ e dal teorema di integrazione per serie di potenze si ha per $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \arctg x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 + \dots) dt = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} (-1)^n \end{aligned}$$

Si dimostra che tale sviluppo vale anche per $|x| = 1$.

21. FUNZIONE LOGARITMICA $\log(1+x)$

Può essere sviluppata in serie di Mac Laurin nell'intervallo $-1 < x \leq 1$. La funzione è continua insieme con le sue derivate di tutti gli ordini che sono:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} & f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} & f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4} & f^{(n)}(x) &= \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} (-1)^{n-1} & f^{(n+1)}(x) &= \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} (-1)^n \end{aligned}$$

Il resto di Lagrange è:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}} (-1)^n = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+\theta x} \right)^{n+1}$$

che tende a zero per $n \rightarrow \infty$, nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$, perchè $0 \leq \frac{x}{1+\theta x} < 1$.

Il resto di Cauchy è:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x^{n+1}}{n!} (1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{x^{n+1}}{n!} (1-\theta)^n \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}} (-1)^n = \\ &= x^{n+1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \frac{(-1)^n}{(1+\theta x)} \end{aligned}$$

che tende a zero per $n \rightarrow \infty$, nell'intervallo $-1 < x \leq 0$, perchè $|x| < 1$ e $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$

Nell'intervallo $-1 < x \leq 1$ sono soddisfatte le condizioni per lo sviluppo di Mac Laurin che è:

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n-1} \end{aligned} \quad [2.11.1]$$

Con la [2.11.1] si può calcolare il logaritmo dei numeri positivi $x \leq 2$ con l'approssimazione desiderata. In particolare, per $x = 1$ si ha:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

che è la serie armonica a segni alterni.

Se si vuole calcolare, mediante le serie ⁽¹⁾, il logaritmo di un numero qualunque, si procede nel seguente modo: sostituendo x con $-x$ la [2.11.1] vale nell'intervallo $-1 \leq x < 1$ (bisogna escludere $x = 1$ perché per tale valore il logaritmo non è definito) e diventa:

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \quad [2.11.2]$$

Sottraendo la [2.11.2] dalla [2.11.1], si ottiene nell'intervallo comune $-1 < x < 1$ la seguente serie:

$$\log(1+x) - \log(1-x) = \log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \quad [2.11.3]$$

Ponendo ora $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{y}{a} = \frac{a+y}{a}$, con a e y positivi qualunque, e ricavando

x si ottiene $x = \frac{y}{y+2a}$ positivo e minore di 1; in altre parole ogni numero positivo

può essere espresso nella forma $1 + \frac{y}{a}$ a cui corrisponde un x con $0 < x < 1$; quindi sono lecite le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \log \left(1 + \frac{y}{a} \right) &= \log(a+y) - \log a = \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) = \\ &= 2 \left(\frac{y}{y+2a} + \frac{y^3}{3(y+2a)^3} + \frac{y^5}{5(y+2a)^5} + \dots \right) \end{aligned}$$

che permettono il calcolo del logaritmo di un numero qualunque.

2.12.- Applicazioni delle serie

Come è noto, ogni funzione continua ammette sempre la primitiva la quale però non sempre è esprimibile mediante funzioni elementari. In tal caso il calcolo degli integrali definiti può essere ottenuto con la desiderata approssimazione usando gli sviluppi in serie della funzione integranda.

Come esempi calcoliamo i seguenti integrali definiti che non ammettono primitiva elementare per la funzione integranda.

$$\begin{aligned} 22. \int_a^b e^{-x^2} dx &= [\text{cfr. §2.6 ed es. 15}] = \int_a^b \left[1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right] dx = \\ &= (b-a) - \frac{b^3-a^3}{1! \cdot 3} + \frac{b^5-a^5}{2! \cdot 5} - \frac{b^7-a^7}{3! \cdot 7} + \dots \end{aligned}$$

$$23. \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx$$

Tenendo presente lo sviluppo di $\sin x$ (cfr. es. 14) la funzione integranda può essere

⁽¹⁾ Meyer e Briggs non hanno usato le serie che alla loro epoca erano sconosciute.

espressa dalla serie:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} (-1)^n$$

che è convergente per ogni x , come si può constatare mediante l'applicazione del criterio del rapporto:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{2n+2} (2n+1)!}{(2n+3)! x^{2n}} = \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$$

e ammette perciò l'integrazione per serie:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx &= \int_a^b \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right] dx = \\ &= (b-a) - \frac{b^3-a^3}{3! \cdot 3} + \frac{b^5-a^5}{5! \cdot 5} - \frac{b^7-a^7}{7! \cdot 7} + \dots \end{aligned}$$

$$24. \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad \text{integrale ellittico per } k < 1$$

Nell'integrale ellittico la funzione integranda può essere sviluppata in serie binomiale.

per ogni φ considerando $k^2 \sin^2 \varphi = x$ e $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} &= \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \varphi - \frac{k^4 \sin^4 \varphi}{2 \cdot 4} - \frac{3k^6 \sin^6 \varphi}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \dots \end{aligned}$$

Tale serie è uniformemente convergente, per ogni φ , per il criterio di Weierstrass perché la serie di confronto a termini positivi:

$$1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{k^4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^6 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2)}k^{2n} + \dots$$

è convergente, come si può constatare applicando il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)(2n+2-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2)2n} k^{2n+2} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)k^{2n}} = \\ &= \frac{2n-3+2}{2n} k^2 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k^2 < 1 \end{aligned}$$

Si può quindi applicare il teorema di integrazione per serie:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{1}{2}k^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{2 \cdot 4}k^4 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^4 \varphi d\varphi + \\ &\quad - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^6 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^6 \varphi d\varphi - \dots \end{aligned}$$

dove gli integrali $\int \sin^{2n} \varphi d\varphi$ sono calcolabili per via elementare e nel caso di $\varphi_1 = 0$ e

$\varphi_2 = \pi/2$ diventano:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$$

2.13.- Esercizi proposti

Deteminare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie:

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n (3n-1)}$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2 - n + 1}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x^{2^n})}$

Studiare la convergenza uniforme delle serie:

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[1+(n-1)x](1+nx)}$ $x \neq -\frac{1}{n}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n$

31. $x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \dots$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{2^n - 1}$

34. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$$

converge uniformemente, ma non assolutamente, per ogni x .

35. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

ha per somma $S(x)$ una funzione continua insieme con le sue derivate per ogni x .

36. Dimostrare che

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)} \, dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right) dx = 0$$

37. Dimostrare che

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\text{Sh } n\pi}$$

è derivabile un numero qualunque di volte per ogni x .

Sviluppare in serie di potenze le funzioni:

38. $\text{Sett Th } x = \text{Th}^{-1} x$

39. $\cos^2 x$

40. $\log(1+x)^{(1+x)}$

41. $\log(x + \sqrt{1+x^2})$

42. Sviluppare $\cos x$ secondo le potenze di $x - \frac{\pi}{4}$.

43. Sviluppare e^x secondo le potenze di $(x-2)$.

44. Sviluppare $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ secondo le potenze di $(x-1)$.

Soluzioni degli esercizi proposti

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$

Applicando il criterio del rapporto ai moduli si ha:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)^3} \frac{n^3}{|x^n|} = |x| \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x|$$

Quindi per $|x| < 1$ la serie è assolutamente convergente. Vediamo qual è il comportamento della serie agli estremi di questo intervallo: per $x = 1$ la serie data diventa la serie p con $p = 3$ (quindi convergente) e per $x = -1$ la serie data ha per serie dei moduli la serie p con $p = 3$ (quindi è assolutamente convergente). Si conclude che l'intervallo di convergenza è:

$$-1 \leq x \leq 1$$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n (3n-1)}$

Applicando il criterio del rapporto ai moduli si ha:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x-1|^{n+1}}{2^{n+1} (3n+3-1)} \frac{2^n (3n-1)}{|x-1|^n} = \frac{|x-1|}{2} \frac{3n-1}{3n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x-1|}{2}$$

La serie converge per

$$\frac{|x-1|}{2} < 1 \rightarrow -1 < \frac{x-1}{2} < 1 \rightarrow -1 < x < 3$$

Per $x = 3$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$$

serie alternata convergente in quanto soddisfa alle condizioni del teorema di Leibnitz (cfr. P.29, *Serie numeriche*, §4.1):

$$u_1 > u_2 > \dots \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n-1} = 0$$

Per $x = -1$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$$

che è divergente, come si può constatare con il criterio del confronto:

$$\frac{1}{3n-1} > \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \cdot [\text{termine generale della serie armonica (divergente)}]$$

Quindi l'intervallo di convergenza risulta $-1 < x \leq 3$

27.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x^2)^n}$$

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n(1+x^2)^n}{(n+1)(1+x^2)^{n+1}} = \frac{n}{(n+1)(1+x^2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+x^2}$$

La serie converge per $1+x^2 > 1$ e quindi per ogni $x \neq 0$. Per $x = 0$ la serie si trasforma nella serie armonica che è divergente.

28.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$$

Applicando il criterio del rapporto ai moduli si ha:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = (n+1)^2 \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^{n+1} \frac{1}{n^2} \left| \frac{1+x}{1-x} \right|^n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$$

La serie converge per

$$\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1 \rightarrow x > 0$$

29.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2 - n + 1}$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{(n+1)x}}{(n+1)^2 - (n+1) + 1} \frac{n^2 - n + 1}{e^{nx}} = \frac{e^x (n^2 - n + 1)}{n^2 + n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^x$$

Quindi per $x < 0$ la serie converge.

Per $x = 0$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1}$$

e converge, come si vede applicando il criterio di Raabe (cfr. P.29, *Serie numeriche*, §3.7):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 - n + 1} = 2 > 1$$

L'intervallo di convergenza è quindi $x \leq 0$.

30. Siccome al denominatore del termine generale si ha il prodotto di due fattori la cui differenza dà il numeratore, la serie può essere scritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1+(n-1)x} - \frac{1}{1+nx} \right] &= \\ &= \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) + \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+2x} \right) + \left(\frac{1}{1+2x} - \frac{1}{1+3x} \right) + \dots \end{aligned}$$

la cui somma parziale ennesima è

$$s_n = 1 - \frac{1}{1+nx} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S = 1 \text{ per } x \neq 0$$

D'altra parte per $x = 0$ i termini della serie si annullano e quindi $S = 0$. In qualunque intervallo comprendente il punto $x = 0$ la serie non può essere uniformemente convergente perché in essa la somma S non è continua (cfr. §1.7). In ogni altro intervallo la serie è uniformemente convergente perché, fissato un $\epsilon > 0$ arbitrario, si può sempre trovare un N tale che per tutti gli $n > N$ si abbia $|R_n| < \epsilon$; infatti si ha:

$$|R_n| = |S(x) - s_n(x)| = \left| \frac{1}{1+nx} \right| < \epsilon \rightarrow |1+nx| > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\text{per } x > 0 \quad 1+nx > \frac{1}{\epsilon} \rightarrow n > \frac{\frac{1}{\epsilon} - 1}{x} \quad \text{con } \epsilon < 1$$

$$\text{per } x < 0 \quad 1+nx < -\frac{1}{\epsilon} \rightarrow n > \frac{-\frac{1}{\epsilon} - 1}{x}$$

Siccome in qualunque intervallo che escluda $x = 0$, fissato ϵ , le due espressioni di n sono limitate superiormente, basta assumere per N il primo intero maggiore di tale limite superiore (corrispondente all'estremo inferiore dell'intervallo di x prescelto).

31.
$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \dots$$

Per $x = 0$ la somma è $S = 0$.

Poiché si tratta di una serie geometrica con primo termine x^2 e ragione $\frac{1}{1+x^2} < 1$ la sua somma parziale ennesima è:

$$s_n(x) = x^2 \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} - \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+x^2}} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 \quad \text{per } x \neq 0$$

La somma $S(x)$ è discontinua in $x = 0$ ($S(0) = 0$, $S(x) > 1$ per $x \neq 0$) quindi la serie non può essere uniformemente convergente in un intervallo comprendente il punto $x = 0$; in ogni altro intervallo è uniformemente convergente, infatti:

$$|R_n(x)| = |S(x) - s_n(x)| = x^2 \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{n-1} < \epsilon$$

$$(1+x^2)^{n-1} > \frac{1}{\epsilon} \quad \rightarrow \quad n > \frac{\log \frac{1}{\epsilon}}{\log(1+x^2)} + 1 \quad \text{con } \epsilon < 1 \quad [2.12.1]$$

Basta assumere per N il primo intero maggiore del valore dato dalla [2.12.1].

32.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

Applichiamo il criterio di Weierstrass assumendo come serie di confronto la serie geometrica con ragione $q < 1$. Per

$$\left|\frac{x}{3}\right| \leq q < 1 \quad \rightarrow \quad |x| < 3$$

la serie risulta uniformemente convergente.

33.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{2^n - 1}$$

Poiché $\sin^2 nx \leq 1$ per ogni x , si ha:

$$\frac{\sin^2 nx}{2^n - 1} \leq \frac{1}{2^n - 1}$$

Applichiamo alla serie il cui termine generale è il secondo membro della disuguaglianza il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n2^{n-1}}{(n+1)2^n} = \frac{1}{2}$$

La serie di confronto è quindi convergente e, per il criterio di Weierstrass, la serie data è uniformemente convergente.

34. Applicando il criterio di Leibnitz sulle serie alternate si vede che la serie data è convergente per ogni x , infatti si ha:

$$u_1 > u_2 > \dots \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+x^2} = 0$$

Il resto della serie è dato da:

$$R_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)+x^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)+x^2} + \dots$$

che è una serie alternata con primo termine $\frac{(-1)^n}{(n+1)+x^2}$ avente somma (cfr. P.29, *Serie numeriche*, §4.1):

$$|S(x)| < \left| \frac{1}{(n+1)+x^2} \right|$$

Quindi, fissato un $\epsilon > 0$ arbitrario, si ha:

$$|R_n| < \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1} < \epsilon \quad \rightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon} - 1 \quad [2.12.2]$$

Basta quindi assumere per N il primo intero maggiore del valore dato dalla [2.12.2] per poter affermare che la serie è uniformemente convergente.

Consideriamo adesso la serie dei moduli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2} \quad [2.12.3]$$

Per qualunque x , indicando con n_0 il primo intero tale che $x^2 \leq n_0$, si ha:

$$\frac{1}{n+x^2} \geq \frac{1}{n+n_0}$$

Ma il secondo membro è il termine generale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n_0}$$

che è la serie armonica privata dei primi n_0 termini; allora, per il criterio del confronto, si deduce che la serie [2.12.3] è divergente e quindi la serie data non è assolutamente convergente.

35. Dalla relazione

$$\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} \quad [= \text{termine generale serie } p \text{ convergente per } p > 1]$$

per il criterio di Weierstrass si può affermare che la serie è uniformemente convergente e quindi ha somma continua.

Analogamente, la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

è anch'essa uniformemente convergente, e quindi con somma continua, in quanto

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Essendo verificate le condizioni del teorema di derivazione per serie (cfr. §1.9), si ha che:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

36. Essendo $|\cos 2nx| \leq 1$, si può scrivere:

$$\left| \frac{\cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)} \right| \leq \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{4n^2-1} < \frac{1}{n^2}$$

Poiché per il criterio di Weierstrass la serie è uniformemente convergente, in base al teorema di integrazione per serie, l'integrale della serie è dato dalla serie degli integrali, si ha quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{\cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)} dx \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2n(2n-1)(2n+1)} [\sin 2nx]_0^{\pi} \right\} = 0$$

37. Per poter applicare il teorema di derivazione per serie dobbiamo dimostrare che la serie è convergente e quella delle derivate è uniformemente convergente.

La prima condizione è soddisfatta perché la serie è uniformemente convergente, come si constata con il criterio di Weierstrass; infatti si ha:

$$\left| \frac{\sin nx}{\operatorname{Sh} n\pi} \right| \leq \frac{1}{\operatorname{Sh} n\pi}$$

e la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Sh} n\pi}$ è convergente, come mostra il criterio del rapporto:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n\pi} - e^{-n\pi}}{e^{n\pi} e^{\pi} - e^{-n\pi} e^{-\pi}} = \frac{e^{2n\pi} - 1}{e^{2n\pi} e^{\pi} - e^{-\pi}}$$

Applicando la regola di de l'Hôpital si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi e^{2n\pi}}{e^{\pi} e^{2n\pi} 2\pi} = \frac{1}{e^{\pi}} < 1$$

Esaminiamo la serie delle derivate prime:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nx}{\operatorname{Sh} n\pi}$$

essa è uniformemente convergente (criterio di Weierstrass) perché

$$\left| \frac{n \cos nx}{\operatorname{Sh} n\pi} \right| \leq \frac{n}{\operatorname{Sh} n\pi}$$

e la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\operatorname{Sh} n\pi}$$

è convergente, come mostra il criterio del rapporto:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n} \right) \left[\frac{e^{n\pi} - e^{-n\pi}}{e^{n\pi} e^{\pi} - e^{-n\pi} e^{-\pi}} \right]$$

Siccome il termine tra parentesi tonde ha limite 1 per $n \rightarrow \infty$ e il termine tra parentesi quadre è quello precedentemente visto, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \cdot \frac{1}{e^{\pi}} < 1$$

Essendo quindi soddisfatte ambedue le condizioni, possiamo derivare termine a termine e scrivere:

$$\frac{dS(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{\sin nx}{\operatorname{Sh} n\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nx}{\operatorname{Sh} n\pi}$$

Le serie delle derivate seconda, terza, quarta sono:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2 \sin nx}{\operatorname{Sh} n\pi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^3 \cos nx}{\operatorname{Sh} n\pi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 \sin nx}{\operatorname{Sh} n\pi}$$

In generale le serie delle derivate di ordine r hanno le espressioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pm n^r \sin nx}{\operatorname{Sh} n\pi} \quad \text{per } r \text{ pari} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pm n^r \cos nx}{\operatorname{Sh} n\pi} \quad \text{per } r \text{ dispari}$$

ed esse sono tutte uniformemente convergenti, per il criterio di Weierstrass, perché per i loro termini generali si ha:

$$\left| \frac{\pm n^r \sin nx}{\operatorname{Sh} n\pi} \right| \leq \frac{n^r}{\operatorname{Sh} n\pi} \quad \text{e} \quad \left| \frac{\pm n^r \cos nx}{\operatorname{Sh} n\pi} \right| \leq \frac{n^r}{\operatorname{Sh} n\pi}$$

essendo convergente la serie a termini positivi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{\operatorname{Sh} n\pi}$$

come si vede applicando il criterio del rapporto:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^r \left[\frac{e^{n\pi} - e^{-n\pi}}{e^{n\pi} e^{\pi} - e^{-n\pi} e^{-\pi}} \right] \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^r \cdot \frac{1}{e^{\pi}} = \frac{1}{e^{\pi}}$$

Concludendo si può quindi scrivere:

$$\frac{d^r}{dx^r} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^r}{dx^r} \frac{\sin nx}{\operatorname{Sh} n\pi} \right)$$

38. Per definizione (cfr. P.4, *Limiti - Esercizi*, §1.11) la funzione inversa della tangente iperbolica è:

$$\text{Sett Th } x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \quad \text{per } -1 < x < 1$$

Applicando la [2.11.3] si ha:

$$\text{Sett Th } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

39. Potendosi scrivere:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

per quanto visto nel §2.11, es. 14, si ha:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{(2x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(2x)^4}{2 \cdot 4!} - \frac{(2x)^6}{2 \cdot 6!} + \dots$$

valida per ogni x .

40. $\log(1+x)^{(1+x)}$

In base allo sviluppo visto al §2.11, es. 21, si ha:

$$\begin{aligned} \log(1+x)^{(1+x)} &= (1+x) \log(1+x) = (1+x) \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right] = \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right) + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \dots \right) = \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \dots = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1) \cdot n} (-1)^n \end{aligned}$$

valida per $-1 < x \leq 1$.

41. $\log(x + \sqrt{1+x^2})$

Ricordando che (cfr. P.6, *Integrali - Esercizi*, §2.2, TAB. I):

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int_0^x (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$$

dalla serie binomiale (cfr. §2.11, es. 18, per $\alpha = -1/2$) e per il teorema di integrazione delle serie di potenze si ha:

$$\begin{aligned} \log(x + \sqrt{1+x^2}) &= \int_0^x \left(1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} t^6 + \dots \right) dt = \\ &= x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \end{aligned}$$

valida per $|x| \leq 1$ [cfr. §2.11, es. 18, b), tenendo presente che si è sostituito x^2 ad x].

42. Si tratta di sviluppare $\cos x$ in serie di Taylor con $x_0 = \frac{\pi}{4}$

Il resto di Lagrange è:

$$R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)]$$

Si osservi che è $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ sempre in quanto $x-x_0$ è un intorno finito di x_0 . Inoltre è:

$$|f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)]| = \begin{cases} |\pm \text{sen}[x_0 + \theta(x-x_0)]| \leq 1 \\ |\pm \text{cos}[x_0 + \theta(x-x_0)]| \leq 1 \end{cases} \quad \text{per ogni } x$$

si ha allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| = 0$$

e, tenendo conto delle espressioni delle derivate di $\cos x$ viste al §2.11, es. 14, e che

$$\text{sen } \frac{\pi}{4} = \text{cos } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

si può applicare lo sviluppo in serie di Taylor che è:

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} \frac{\sqrt{2}}{2} + \dots \end{aligned}$$

43. Si tratta di sviluppare e^x in serie di Taylor con $x_0 = 2$. Il resto di Lagrange tende a zero per $n \rightarrow \infty$ perché, per ogni x ,

$$f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)] = e^{x_0 + \theta(x-x_0)} < e^{x_0 + |x-x_0|}$$

per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{x_0 + |x-x_0|} = 0 \cdot e^{x_0 + |x-x_0|} = 0$$

Quindi si può applicare la formula di Taylor ricordando che tutte le derivate di e^x valgono e^x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) = e^2 + (x-2)e^2 + \frac{(x-2)^2}{2!} e^2 + \frac{(x-2)^3}{3!} e^2 + \dots$$

44. Essendo la funzione da sviluppare un polinomio di terzo grado, il resto della serie è nullo perché le derivate di ordine superiore al terzo sono nulle. Si ha:

$$f(1) = -3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5 \quad \rightarrow \quad f'(1) = 4$$

$$f''(x) = 6x - 4 \rightarrow f''(1) = 2$$

$$f'''(x) = 6$$

quindi:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} f^{(n)}(1) = -3 + (x-1) \cdot 4 + \frac{(x-1)^2}{2!} 2 + \frac{(x-1)^3}{3!} 6$$

che, naturalmente, è ancora un polinomio del terzo ordine.

3 - FUNZIONI COMPLESSE

3.1.- Funzioni elementari di variabile complessa

Assumendo $z = x + jy$ come variabile indipendente in una regione R e w come variabile dipendente, vengono dette funzioni elementari in campo complesso le seguenti:

1) I polinomi

$$w = P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

dove a_0, a_1, \dots, a_n sono costanti complesse.

2) Le funzioni razionali

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

dove $P(z)$ e $Q(z)$ sono polinomi.

3) L'esponenziale

$$e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x (\cos y + j \sin y)$$

che rappresenta un numero complesso in forma trigonometrica avente modulo e^x e argomento y .

Applicando la proprietà del prodotto di due numeri complessi (prodotto dei moduli e somma degli argomenti) si ha:

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1} e^{jy_1} \cdot e^{x_2} e^{jy_2} = e^{x_1+x_2} [\cos(y_1+y_2) + j \sin(y_1+y_2)] = \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1+y_2) + j \sin(y_1+y_2)] = \\ &= e^{x_1+x_2} \cdot e^{j(y_1+y_2)} = e^{(x_1+jy_1) + (x_2+jy_2)} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

In base all'ultima espressione risulta lecita la sommabilità degli esponenti per cui

$$(e^z)^n = e^z \cdot e^z \cdot \dots = e^{nz}$$

La funzione esponenziale è periodica con periodo $2\pi j$; infatti:

$$e^{z+2k\pi j} = e^z e^{2k\pi j} = e^z (\cos 2k\pi + j \sin 2k\pi) = e^z$$

4) Le funzioni trigonometriche

Derivano formalmente dalle seguenti espressioni ottenute dalle formule di Eulero:

$$\begin{aligned} e^{jy} &= \cos y + j \sin y & e^{-jy} &= \cos y - j \sin y \\ \sin y &= \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j} & \cos y &= \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2} & \operatorname{tg} y &= \frac{j(e^{-jy} - e^{jy})}{e^{jy} + e^{-jy}} \end{aligned}$$

Sostituendo la variabile reale y con quella complessa z si ottengono per definizione le funzioni trigonometriche di variabile complessa:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \quad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$$

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} \quad \operatorname{sec} z = \frac{1}{\operatorname{cos} z} \quad \operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}$$

Per le funzioni trigonometriche di variabile complessa valgono formalmente tutte le relazioni relative alle funzioni trigonometriche di variabile reale.

5) Funzioni iperboliche

Si definiscono sostituendo la variabile reale x con quella complessa z nelle espressioni valide in campo reale; quindi si ha:

$$\operatorname{Sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \operatorname{Ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \operatorname{Th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

Anche in questo caso rimangono formalmente valide le relazioni relative alle funzioni iperboliche reali.

Le funzioni trigonometriche e quelle iperboliche sono legate dalle seguenti relazioni:

$$\operatorname{sen}(jz) = \frac{e^{j(jz)} - e^{-j(jz)}}{2j} = \frac{e^{-z} - e^z}{2j} = -\frac{(e^z - e^{-z})}{2j} = j \operatorname{Sh} z$$

$$\operatorname{cos}(jz) = \frac{e^{j(jz)} + e^{-j(jz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \operatorname{Ch} z$$

$$\operatorname{tg}(jz) = \frac{\operatorname{sen}(jz)}{\operatorname{cos}(jz)} = j \operatorname{Th} z$$

6) Logaritmo

È la funzione inversa dell'esponenziale e quindi, se $z = e^w$, si ha:

$$w = \log z$$

Per trovarne l'espressione ricorriamo alla forma esponenziale di z (1): $z = |z| e^{j(\varphi + 2k\pi)}$ dove $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

$$w = \log[|z| e^{j(\varphi + 2k\pi)}] = \log |z| + j(\varphi + 2k\pi)$$

Un numero complesso ha quindi infiniti logaritmi aventi per parte reale il logaritmo del modulo e per parte immaginaria uno qualunque dei valori che si ottengono per k intero. Per $k = 0$ si ottiene il valore principale (ramo principale della curva) che vale:

$$\log z = \log |z| + j\varphi$$

per $z = 1$ si ha: $\log 1 = \log e^{2jk\pi} = 2jk\pi$

per $z = j$ si ha: $\log j = \log e^{j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

Sfruttando una proprietà dei logaritmi si definisce la funzione z^a , con a complesso, nel seguente modo:

$$z^a = e^{a \log z}$$

Se, in particolare, $z = j$ e $a = j$, si ha:

$$j^j = e^{j \log j} = e^{j^2 \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

(1) Cfr. P.10, Numeri complessi, §2.6: logaritmo di un numero complesso.

7) Funzioni trigonometriche inverse

Analogamente a quanto avviene in campo reale, se $z = \operatorname{sen} w$ si ha:

$$w = \operatorname{arc} \operatorname{sen} z$$

Per ricavare w dalla relazione $z = \operatorname{sen} w$ si procede nel seguente modo:

$$z = \operatorname{sen} w = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j} \rightarrow 2jz = e^{jw} - e^{-jw} \rightarrow 2jz e^{jw} = e^{2jw} - 1$$

Ponendo $e^{jw} = t$ si ha l'equazione di secondo grado in t :

$$t^2 - 2jzt - 1 = 0$$

che ha le soluzioni:

$$t = jz \pm \sqrt{-z^2 + 1}$$

Ricordando che:

$$e^{jw} = t = jz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

passando ai logaritmi si ha:

$$w = \operatorname{arc} \operatorname{sen} z = \frac{1}{j} \log(jz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

In modo analogo si ottiene

$$\operatorname{arc} \operatorname{cos} z = \frac{\log(z \pm j\sqrt{1 - z^2})}{j}$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} z = \frac{1}{2j} \log \frac{1 + jz}{1 - jz}$$

8) Funzioni iperboliche inverse

Se $z = \operatorname{Sh} w$ si ha:

$$w = \operatorname{Sett} \operatorname{Sh} z$$

Per ricavare w dalla relazione $z = \operatorname{Sh} w$ si procede nel seguente modo:

$$z = \operatorname{Sh} w = \frac{e^w - e^{-w}}{2} \rightarrow 2z = e^w - e^{-w} \rightarrow e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0$$

Ponendo $e^w = t$ si ottiene l'equazione di secondo grado in t

$$t^2 - 2zt - 1 = 0$$

che ha le soluzioni:

$$t = e^w = z \pm \sqrt{z^2 + 1}$$

e passando ai logaritmi si ottiene:

$$w = \operatorname{Sett} \operatorname{Sh} z = \log(z \pm \sqrt{z^2 + 1})$$

Analogamente si ottiene:

$$\operatorname{Sett} \operatorname{Ch} z = \log(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Sett} \operatorname{Th} z = \frac{1}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z}$$

3.2.- Funzioni monodrome e polidrome

La funzione $w = f(z)$ può essere definita in tutto il piano complesso, o in un'area o in una linea; nel caso dell'area si parla di regione R avente contorno C e la regione si dice aperta quando non comprende il suo contorno mentre si dice chiusa quando lo comprende. La funzione $f(z)$ è univoca o monodroma se ad ogni z corrisponde un solo valore di w , è plurivoca o polidroma se ad ogni valore di z corrispondono due o più valori di w .

I polinomi e la funzione esponenziale (e quindi le funzioni trigonometriche e le iperboliche, che sono combinazioni lineari di esponenziali) sono monodrome mentre la funzione logaritmica (e quindi le funzioni inverse delle trigonometriche e delle iperboliche) è polidroma a infiniti valori.

Esempi.

45. La funzione $w = z^3$ è definita in tutto il piano complesso.

Siccome $z = x + jy = |z| e^{j(\theta + 2k\pi)}$ dove $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, si ha:

$$w = |z|^3 e^{j(3\theta + 6k\pi)}$$

a cui corrisponde, per ogni k , uno stesso vettore w che ha modulo $|z|^3$ e argomento 3θ ; la funzione z^3 è monodroma.

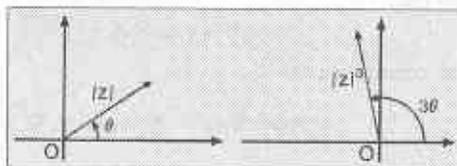


Fig. 3.2.1

46. La funzione $w = z^{1/3}$ è definita in tutto il piano complesso; si ha:

$$w = z^{1/3} = |z|^{1/3} e^{j \frac{\theta + 2k\pi}{3}}$$

Per $k = 0, 1, 2$ si hanno i seguenti corrispondenti valori di w :

$$w_0 = |z|^{1/3} e^{j \frac{\theta}{3}}$$

$$w_1 = |z|^{1/3} e^{j \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right)}$$

$$w_2 = |z|^{1/3} e^{j \left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right)}$$

e i vettori di fig. 3.2.2.

Siccome per tutti gli altri valori di k , che sono $k = -1, -2, \pm 3, \pm 4, \dots$, w assume sempre uno dei tre valori w_0, w_1, w_2 , si può affermare che la funzione $z^{1/3}$ è polidroma a tre valori; non ci occuperemo di tale tipo di funzione; ci limitiamo solo ad affermare che se si fissa un particolare valore di k si ottiene una funzione monodroma che, nel nostro esempio, può essere una qualunque delle tre.

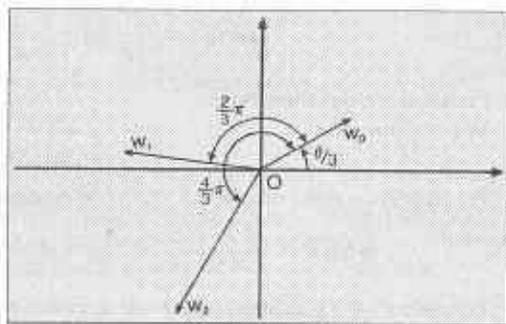


Fig. 3.2.2

3.3.- Funzione monodroma nella forma $w = u + jv$

Se nella funzione $w = f(z)$ si sostituisce la z con $x + jy$ si ottiene l'espressione:

$$w = f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$$

in quanto le operazioni di somma, prodotto, potenza, ecc. sui numeri complessi hanno come risultato un numero complesso. Come esempio troviamo la u e la v per le funzioni $w = z^3$ e $w = \text{sen } z$

$$w = z^3 = (x + jy)^3 = x^3 - jy^3 + 3jx^2y - 3xy^2 = (x^3 - 3xy^2) + j(3x^2y - y^3)$$

$$u = x^3 - 3xy^2 \quad v = 3x^2y - y^3$$

$$w = \text{sen } z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = \frac{1}{2j} (e^{jx-y} - e^{-jx+y}) =$$

$$= \frac{1}{2j} [e^{-y}(\cos x + j \text{sen } x) - e^y(\cos x - j \text{sen } x)] =$$

$$= \frac{1}{2j} [(e^{-y} - e^y) \cos x + j(e^{-y} + e^y) \text{sen } x] =$$

$$= \frac{e^{-y} + e^y}{2} \text{sen } x - j \frac{e^{-y} - e^y}{2} \cos x$$

$$u = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \text{sen } x = \text{Ch } y \text{ sen } x$$

$$v = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x = \text{Sh } y \cos x$$

3.4.- Limite e continuità di una funzione monodroma

La definizione di limite di una funzione monodroma ed i relativi teoremi sono del tutto analoghi a quelli validi per il campo reale. Sottolineiamo che la funzione $f(z)$ ha limite finito nel punto $z_0 = x_0 + jy_0$ se all'interno dei cerchi con centro in $P_0(x_0, y_0)$ e raggio δ , la differenza $|f(z) - l|$ tende a zero quando $\delta \rightarrow 0$; in altre parole, qualunque sia la direzione con cui z tende a z_0 , più z si avvicina a z_0 , più $f(z)$ si avvicina a l .

Siccome poi $z \rightarrow z_0$ significa $x \rightarrow x_0$ e $y \rightarrow y_0$ si ha:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [u(x, y) + jv(x, y)]$$

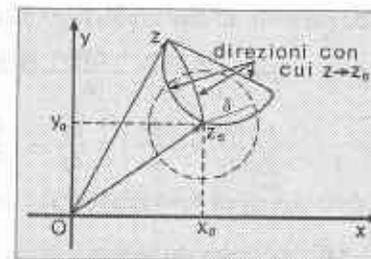


Fig. 3.4.1

Anche la definizione di continuità è analoga a quella del campo reale: la funzione $f(z)$ è continua in z_0 se è definita in z_0 e se il suo limite per $z \rightarrow z_0$ è $f(z_0)$; ciò che qui interessa è che se $f(z)$ è continua in z_0 , le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono continue in $P_0(x_0, y_0)$ e cioè si ha:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0)$$

Viceversa: se le funzioni u e v , scelte arbitrariamente, sono continue in $P_0(x_0, y_0)$, la funzione complessa

$$f(z) = u + jv$$

è continua in $z_0 = x_0 + jy_0$.

3.5.- Derivata di una funzione monodroma

La funzione $f(z)$ sia definita nella regione R . La derivata $f'(z_0)$ nel punto z_0 interno a R è definita come il seguente limite:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Nel caso più generale questo limite assume valori differenti a seconda della direzione di $\Delta z = \Delta x + j\Delta y$; vediamo due casi particolari:

a) Δz parallelo all'asse x (vedi fig. 3.5.1).

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + j \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

dove le derivate sono calcolate in (x_0, y_0)

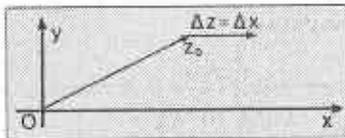


Fig. 3.5.1

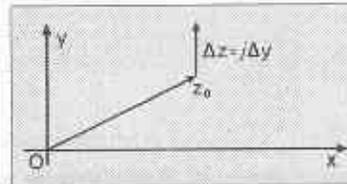


Fig. 3.5.2

b) Δz parallelo all'asse y (vedi fig. 3.5.2).

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{j\Delta y} + j \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{j\Delta y} \right] = \\ &= \frac{1}{j} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

dove le derivate sono calcolate in (x_0, y_0) .

Affinché le due derivate coincidano, cioè si abbia:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}$$

devono essere uguali le loro parti reali e le loro parti immaginarie:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

Il ragionamento può essere esteso al caso di una generica direzione θ secondo la quale venga calcolata la derivata della funzione, pervenendo alla conclusione che se per la funzione $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ valgono le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

il valore della derivata è indipendente dalla direzione, cioè è unico; esso è dato da una qualsivoglia delle espressioni già trovate in a) e b):

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}$$

Due funzioni u e v soddisfacenti le equazioni di Cauchy-Riemann sono dette *coniugate*.

3.6.- Funzioni analitiche

Una funzione $f(z)$ monodroma in una regione R del piano complesso è detta analitica o regolare o olomorfa in R se la sua derivata $f'(z)$ è continua e indipendente dalla direzione secondo la quale $\Delta z \rightarrow 0$.

Condizione necessaria e sufficiente perché una funzione $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ sia analitica in R è che $u(x, y)$ e $v(x, y)$ abbiano derivate parziali continue e soddisfacenti le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad [3.6.1]$$

Nei seguenti esempi stabiliremo la analiticità o non di alcune funzioni: si deve calcolare la $u(x, y)$ e la $v(x, y)$ e verificare se esse soddisfano o meno le equazioni di Cauchy-Riemann.

47. $w = z^3$

Abbiamo già visto al §2.3 che $u = x^3 - 3xy^2$ e $v = 3x^2y - y^3$.

Essendo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

la funzione è analitica in tutto il piano z .

48. $w = \operatorname{sen} z$

Sempre al §2.3 abbiamo visto che $u = \operatorname{Ch} y \operatorname{sen} x$ e $v = \operatorname{Sh} y \cos x$.

Essendo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Ch} y \cos x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{Sh} y \operatorname{sen} x = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

la funzione è analitica in tutto il piano z .

49. $w = \frac{z}{z + j}$

La funzione è definita in tutto il piano z escluso il punto $z = -j$. Si ha:

$$w = \frac{x + jy}{x + j(y + 1)} = \frac{(x + jy)[(x - jy) - j]}{x^2 + y^2 + 1 + 2y} = \frac{(x^2 + y^2 + y) - jx}{x^2 + y^2 + 1 + 2y}$$

$$u = \frac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + y^2 + 1 + 2y} \quad v = \frac{-x}{x^2 + y^2 + 1 + 2y}$$

Poiché:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy + 2x}{(x^2 + y^2 + 1 + 2y)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x^2 + 2y + y^2 + 1}{(x^2 + y^2 + 1 + 2y)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

la funzione è analitica in tutti i punti di definizione.

50. $w = e^{z^2}$

La funzione è definita in tutto il piano z . Si ha:

$$e^{z^2} = e^{x^2 - y^2 + 2jxy} = e^{x^2 - y^2} \cdot (\cos 2xy + j \sin 2xy)$$

$$u = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy \quad v = e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2 - y^2} \cdot 2x \cos 2xy - e^{x^2 - y^2} \cdot 2y \sin 2xy = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x^2 - y^2} \cdot 2y \cos 2xy - e^{x^2 - y^2} \cdot 2x \sin 2xy = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

La funzione è quindi analitica in tutto il piano z .

51. $w = z|z|$

La funzione è definita in tutto il piano z . Si ha:

$$w = x\sqrt{x^2 + y^2} + jy\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq \frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

La funzione è quindi non-analitica in tutto il piano z .

3.7.- Derivata di una funzione analitica

Abbiamo visto che la derivata di una funzione analitica $f(z) = u + jv$ non dipende dalla direzione di dz ; scegliendo le due direzioni particolari $dz = dx$ e $dz = jdy$ si ottiene

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{df(z)}{dx} = \frac{d}{dx}(u + jv) \quad \frac{df(z)}{dz} = \frac{d}{jdy}(u + jv) = \frac{d}{dy}(v - ju)$$

Con i seguenti esempi facciamo vedere che si può ottenere lo stesso risultato derivando rispetto a z con le già note regole di derivazione del campo reale e sostituendo, nell'espressione così ottenuta, z con $x + jy$. Utilizzando risultati precedenti si ha:

52. $w = z^3$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dx}(u + jv) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 6jxy$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dy}(v - ju) = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 6jxy$$

$$\frac{dw}{dz} = 3z^2 = 3(x + jy)^2 = 3(x^2 + 2jxy - y^2) = 3x^2 - 3y^2 + 6jxy$$

53. $w = \sin z = \text{Ch } y \sin x + j \text{Sh } y \cos x$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dx}(u + jv) = \text{Ch } y \cos x - j \text{Sh } y \sin x$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dy}(v - ju) = \text{Ch } y \cos x - j \text{Sh } y \sin x$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \frac{1}{2}(e^{j(x+iy)} + e^{-j(x+iy)}) =$$

$$= \frac{1}{2}[e^{-y}(\cos x + j \sin x) + e^y(\cos x - j \sin x)] =$$

$$= \frac{1}{2}[(e^y + e^{-y})\cos x - j(e^y - e^{-y})\sin x] = \text{Ch } y \cos x - j \text{Sh } y \sin x$$

54. $w = \log z$

La funzione è polidroma a infiniti rami dati da $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; la derivata non dipende da k ed è unica.

$$w = \log z = \log |z| + j(\theta + 2k\pi) = \log \sqrt{x^2 + y^2} + j \left(\arctg \frac{y}{x} + 2k\pi \right)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dx}(u + jv) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + j \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dy}(v - ju) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} - j \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$$

3.8.- Determinazione della funzione coniugata di una data funzione

Abbiamo visto che in una funzione analitica $f(z) = u + jv$, la u e la v hanno derivate parziali continue che soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad [3.8.1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad [3.8.2]$$

Ora facciamo vedere che la u e la v sono funzioni armoniche, cioè soddisfano l'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Infatti se deriviamo la [3.8.1] rispetto a x e la [3.8.2] rispetto a y si ottiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

e sommando si ha:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

perché per le derivate miste si ha $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$.

In modo analogo, derivando la [3.8.1] rispetto a y e la [3.8.2] rispetto a x e sommando, si ottiene:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Dalle equazioni [3.8.1] e [3.8.2] discende che per ottenere una funzione analitica si può scegliere ad arbitrio la sola parte reale u , o la sola parte immaginaria v , e determinare l'altra. Scelta, per esempio, ad arbitrio la u , naturalmente armonica, vediamo come si determina la v . Il differenziale totale della v è:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

e per le [3.8.1] e [3.8.2]:

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Il secondo membro è un differenziale esatto. Infatti, ricordando che un differenziale $A dx + B dy$ è esatto quando

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

ponendo $A = -\frac{\partial u}{\partial y}$ e $B = \frac{\partial u}{\partial x}$ si ha:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

siccome la u è armonica si ha $-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; quindi il differenziale al secondo membro è esatto.

Integrando ambo i membri lungo una linea di estremi (x_0, y_0) e (x, y) , si ha:

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)$$

relazione che definisce la funzione v a meno di una costante (1).

Determiniamo l'armonicità e l'eventuale funzione coniugata delle seguenti funzioni:

55. $u = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y + 3y^2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + 6xy - 6y^2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 12y$$

La u non è armonica perché $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \neq 0$

Non esiste quindi la sua coniugata.

56. $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy + 4x \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y + 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 - 4y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y - 4$$

La u è armonica perché $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

La sua coniugata è data da:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= [1] = v(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} dy = \\ &= c_1 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-3x^2 + 3y^2 + 4y) dx + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (6xy + 4x) dy = \\ &= c_1 + [-x^3 + 3y_0^2x + 4y_0x - (-x_0^3 + 3y_0^2x_0 + 4y_0x_0)] + \\ &\quad + [3xy^2 + 4xy - (3xy_0^2 + 4xy_0)] = \\ &= -x^3 + 3xy^2 + 4xy + c \end{aligned}$$

Un altro metodo per trovare v è il seguente.

Dalla [3.8.2] si ha:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3x^2 + 3y^2 + 4y \rightarrow$$

$$v(x, y) = \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx = -x^3 + 3xy^2 + 4xy + f_1(y)$$

Analogamente, dalla [3.8.1], si ha:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 6xy + 4x \rightarrow v(x, y) = 3xy^2 + 4xy + f_2(x)$$

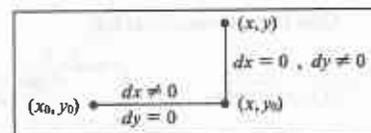


Fig. 3.8.1.- Cammino di integrazione.

(1) Si ricordi che per integrare un differenziale esatto si può scegliere ad arbitrio il cammino di integrazione (cfr. P.21, *Integrali curvilinei e multipli*, §1.10).

Affinché le due espressioni di $v(x, y)$ ottenute siano uguali si deve scegliere:

$$f_2(x) = -x^3 \quad \text{e} \quad f_1(y) = 0$$

quindi:

$$v(x, y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + c$$

57. $u = xe^x \cos y - ye^x \sin y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y + xe^x \cos y - ye^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y + e^x \cos y + xe^x \cos y - ye^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^x \sin y - ye^x \cos y - e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xe^x \cos y - e^x \cos y + ye^x \sin y - e^x \cos y$$

La u è armonica e la sua coniugata è data da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \rightarrow \quad v &= \int (xe^x \sin y + ye^x \cos y + e^x \sin y) dx = \\ &= \sin y \int xe^x dx + y \cos y \int e^x dx + \sin y \int e^x dx = [1] = \\ &= xe^x \sin y + ye^x \cos y + f_1(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \rightarrow \quad v &= \int (e^x \cos y + xe^x \cos y - ye^x \sin y) dy = \\ &= e^x \int \cos y dy + xe^x \int \cos y dy - e^x \int y \sin y dy = [2] = \\ &= xe^x \sin y + ye^x \cos y + f_2(x) \end{aligned}$$

Assumendo $f_1(y) = f_2(x) = 0$ si ha:

$$v(x, y) = xe^x \sin y + ye^x \cos y + c$$

Con l'altro metodo si ha:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= v(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{-\partial u}{\partial y} dx + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} dy = \\ &= v(x_0, y_0) + [xe^x \sin y_0 + e^x y_0 \cos y_0 - (x_0 e^{x_0} \sin y_0 + e^{x_0} y_0 \cos y_0)] + \\ &\quad + [xe^x \sin y + e^x y \cos y - (x_0 e^{x_0} \sin y_0 + e^{x_0} y_0 \cos y_0)] = \\ &= xe^x \sin y + e^x y \cos y + c \end{aligned}$$

(1) A meno della costante di integrazione è:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

(2) A meno della costante di integrazione è:

$$\int y \sin y dy = -y \cos y + \int \cos y dy = -y \cos y + \sin y$$

3.9.- Integrazione

È definita in modo del tutto analogo all'integrale curvilineo in campo reale (1):

$$\int_l f(z) dz = \int_l (u + jv)(dx + j dy) = \int_l (u dx - v dy) + j \int_l (v dx + u dy)$$

cioè l'integrale curvilineo complesso si riduce al calcolo di due integrali curvilinei reali del tipo $\int_l (A dx + B dy)$. Vediamo alcuni esempi.

58. Se $f(z) = 1$, cioè $u = 1$ e $v = 0$, si ha:

$$\int_l dz = \int_{x_0}^{x_1} dx + j \int_{y_0}^{y_1} dy = (x_1 - x_0) - j(y_1 - y_0)$$

cioè $\int_l dz$, che è la somma dei vettori infinitesimi dz è dato dal vettore che unisce i punti estremi della linea l di integrazione.

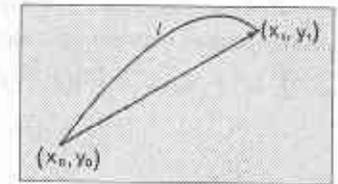


Fig. 3.9.1

59. Siccome $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds =$ lunghezza arco infinitesimo, si ha:

$$\int_l |dz| = \int_l ds = l = \text{lunghezza linea di integrazione}$$

60. Siccome il modulo di un integrale è non maggiore dell'integrale del modulo si ha:

$$|\int_l f(z) dz| \leq \int_l |f(z)| dz \leq M \int_l ds = Ml$$

dove M è il massimo di $|f(z)|$ su l .

61. Calcolare l'integrale

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0}$$

dove C è la circonferenza di centro in z_0 e di raggio ϵ .

I vettori $z - z_0$ hanno modulo ϵ e argomento $0 \leq \theta \leq 2\pi$; quindi si può scrivere:

$$z - z_0 = \epsilon e^{j\theta} \quad \rightarrow \quad dz = j\epsilon e^{j\theta} d\theta$$

e sostituendo si ha:

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = \oint_0^{2\pi} \frac{j\epsilon e^{j\theta} d\theta}{\epsilon e^{j\theta}} = 2\pi j$$

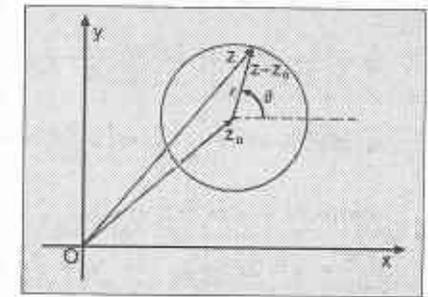


Fig. 3.9.2

62. Calcolare l'integrale $\int_l (x^2 - jy^2) dz$ lungo la parabola $y = 2x^2$ tra $P_1(1, 1)$ e $P_2(2, 8)$.

Svolgendo si ha:

$$\int_l (x^2 - jy^2) dz = \int_l (x^2 dx + y^2 dy) + j \int_l (-y^2 dx + x^2 dy)$$

(1) Per quanto riguarda gli integrali curvilinei in campo reale cfr. P.21, *Integrali curvilinei e multipli*.

Essendo $y = 2x^2$ e $dy = 4x dx$, sostituendo si ottiene:

$$\int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 4x^4 \cdot 4x dx - j \int_1^2 4x^4 dx + j \int_1^2 x^2 \cdot 4x dx = \frac{511}{3} - j \frac{49}{5}$$

63. Calcoliamo l'integrale $\int_C (z^2 + 3z) dz$ nei seguenti casi:

- a) lungo il cerchio $|z| = 2$ tra $P_1(2, 0)$ e $P_2(0, 2)$ in senso antiorario;
- b) lungo il segmento che unisce P_1 e P_2 .

$$\begin{aligned} \int_C (z^2 + 3z) dz &= \int_C [(x^2 - y^2 + 3x) + j(2xy + 3y)] dz = \\ &= \int_C (u dx - v dy) + j \int_C (v dx + u dy) = I_1 + jI_2 \end{aligned}$$

Osserviamo che essendo:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = \frac{\partial}{\partial x}(-v) \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 3 = \frac{\partial u}{\partial x}$$

I_1 e I_2 sono integrali curvilinei di differenziali esatti e quindi non dipendono dal cammino di integrazione ma solo dagli estremi. Posto $d\varphi = u dx - v dy$ si ha:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u = x^2 - y^2 + 3x \rightarrow \varphi = \frac{x^3}{3} - y^2x + \frac{3x^2}{2} + f_1(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -v = -2xy - 3y \rightarrow \varphi = -xy^2 - \frac{3y^2}{2} + f_2(x)$$

Scegliendo $f_1(y) = -\frac{3y^2}{2}$ e $f_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$ si ottiene:

$$\varphi = \frac{x^3}{3} - y^2x + \frac{3x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + c_1$$

$$\text{quindi: } I_1 = \int_{(2,0)}^{(0,2)} d\varphi = [\varphi]_{(2,0)}^{(0,2)} = -\frac{44}{3}$$

Posto $d\psi = v dx + u dy$ si ha:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v = 2xy + 3y \rightarrow \psi = x^2y + 3xy + f_3(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = x^2 - y^2 + 3x \rightarrow \psi = x^2y - \frac{y^3}{3} + 3xy + f_4(x)$$

Scegliendo $f_3(y) = -\frac{y^3}{3}$ e $f_4(x) = 0$ si ottiene:

$$\psi = x^2y - \frac{y^3}{3} + 3xy + c_2$$

$$\text{quindi: } I_2 = \int_{(2,0)}^{(0,2)} d\psi = [\psi]_{(2,0)}^{(0,2)} = -\frac{8}{3}$$

e l'integrale richiesto vale $-\frac{44}{3} - j \frac{8}{3}$ qualunque sia il cammino d'integrazione, quindi anche se calcolato lungo il segmento P_1P_2 .

3.10.- Teorema di Cauchy

Per una funzione $f(z)$, analitica nella regione chiusa R semplicemente connessa e di contorno C , l'integrale curvilineo esteso al contorno è nullo; si ha cioè:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Abbiamo visto che in generale si ha:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + j \oint_C (v dx + u dy)$$

Applicando la formula di Green (cfr. P.21, *Integrali curvilinei e multipli*, §2.5) ai due integrali reali si ha:

$$\oint_C (u dx - v dy) = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\oint_C (v dx + u dy) = \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

Ma per la $f(z)$, che è analitica per ipotesi, valgono le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

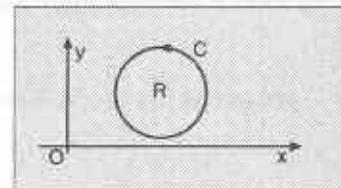


Fig. 3.10.1

che annullano gli integrali doppi e di conseguenza anche quelli curvilinei, per cui:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Ricordiamo che le formule di Green valgono per senso antiorario di percorrenza del contorno.

Se la regione R è doppiamente connessa vuoi ad *anello* o a *corona* ci si può ridurre al caso precedente nel seguente modo: la regione R è composta dalle linee C_1 e C_2 e dalla superficie compresa tra esse. Mediante le linee AA' e BB' dividiamo la regione R in due parti semplicemente connesse e aventi i contorni $t_1 = AA'D'B'BD$ e $t_2 = A'AE'BB'E'$

Per il teorema di Cauchy si può scrivere (tralasciando la funzione integranda):

$$\oint_{t_1} = \int_{AA'} + \int_{A'D'B'} + \int_{B'B} + \int_{BDA} = 0$$

$$\oint_{t_2} = \int_{A'A} + \int_{AEB} + \int_{BB'} + \int_{B'E'A'} = 0$$

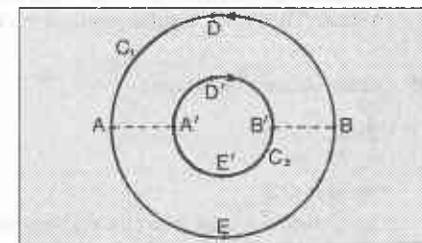


Fig. 3.10.2

Ricordando che $\int_{AA'} = -\int_{A'A}$ e $\int_{BB'} = -\int_{B'B}$, sommando e raccogliendo si ottiene:

$$[\int_{A'D'B'} + \int_{B'E'A'}] + [\int_{BDA} + \int_{AEB}] = \int_{C_1} + \int_{C_2} = 0$$

dove C_1 è percorso in senso antiorario e C_2 in senso orario; assumendo il senso antiorario per entrambi i contorni (se si cambia il senso l'integrale cambia segno) si ha:

$$\int_{C_1} = \int_{C_2} \quad [3.10.1]$$

Se la regione è triplicemente connessa la si riduce a due semplicemente connesse con tre linee o tagli AA' , DE , GH , come indicato nella fig. 3.10.3.

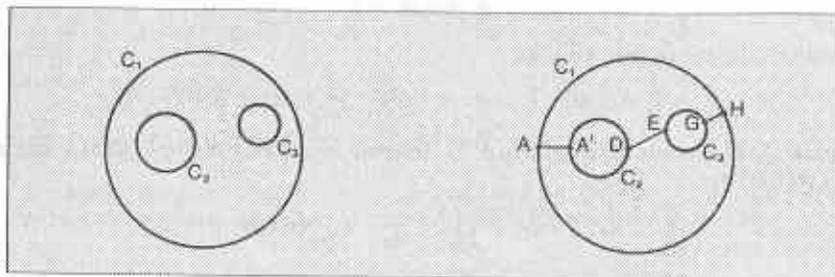


Fig. 3.10.3

Procedendo in modo analogo si conclude che:

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0$$

se C_1 antiorario e C_2 e C_3 orari; oppure

$$\int_{C_1} = \int_{C_2} + \int_{C_3} \quad [3.10.2]$$

se si assumono antiorari tutti i sensi di percorrenza.

In altre parole, assumendo tutti i sensi di percorrenza antiorari, l'integrale esteso al contorno esterno è uguale alla somma di quelli estesi ai contorni interni.

64. Calcoliamo l'integrale

$$\oint_C (z - z_0)^n dz$$

dove n è intero positivo o nullo, z_0 costante e C una linea semplice chiusa.

Siccome la funzione $(z - z_0)^n$ è un polinomio, quindi analitica in tutto il piano complesso, l'integrale è nullo per il teorema del presente paragrafo.

65. Calcoliamo l'integrale

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz$$

nei due casi:

- il punto z_0 è esterno alla regione limitata dalla linea C semplice chiusa;
- il punto z_0 è interno alla regione limitata dalla linea C semplice chiusa.

Nel primo caso (vedi fig. 3.10.4) $(z - z_0)$ non si annulla mai nella regione chiusa di contorno C e quindi la funzione integranda

$$\frac{1}{z - z_0}$$

in detta regione è analitica; ne consegue che:

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = 0$$

Nel secondo caso (vedi fig. 3.10.5) la funzione integranda è analitica in tutti i punti della regione chiusa ad eccezione del punto z_0 , quindi:

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz \neq 0$$

Per calcolarne il valore consideriamo un cerchio di circonferenza C_1 , centro in z_0 , raggio ϵ e interno a C (ciò è sempre possibile perché z_0 è interno a C); la superficie compresa tra i contorni C e C_1 costituisce una regione doppiamente connessa nella

quale la funzione $\frac{1}{z - z_0}$ è analitica; per il teorema di Cauchy, ricordando il risultato dell'esempio 61, si ha:

$$\int_C \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{C_1} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi j$$

66. Calcoliamo l'integrale

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz \quad n = 2, 3, \dots$$

Se z_0 è esterno a C l'integrale è nullo perché la funzione integranda è analitica nella regione chiusa di contorno C .

Se z_0 è interno a C , tenendo presente che sulla circonferenza C_1 (vedi fig. 3.10.5) si ha:

$$z - z_0 = \epsilon e^{j\theta} \rightarrow (z - z_0)^n = \epsilon^n e^{jn\theta} \quad \text{e} \quad dz = j\epsilon e^{j\theta} d\theta$$

per il teorema di Cauchy si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} &= \int_{C_1} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{j\epsilon e^{j\theta} d\theta}{\epsilon^n e^{jn\theta}} = \frac{j}{\epsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{j\theta(1-n)} d\theta = \\ &= \frac{j}{\epsilon^{n-1}} \left[\frac{e^{j\theta(1-n)}}{j(1-n)} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{(1-n)\epsilon^{n-1}} (e^{2j\pi(1-n)} - 1) = 0 \end{aligned}$$

perché $e^{2jk\pi} = 1$

Concludendo, i risultati degli esempi 65 e 66 ci permettono di affermare che l'integrale

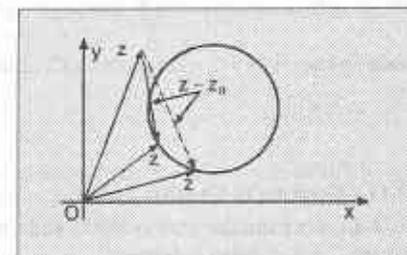


Fig. 3.10.4

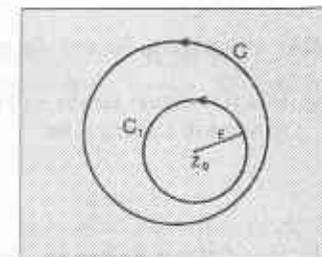


Fig. 3.10.5

$$\int_C (z - z_0)^n dz \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

vale $2\pi j$ per $n = -1$ e z_0 interno a C ; in tutti gli altri casi vale zero.

3.11.- Formula di Cauchy

Con la funzione $f(z)$ analitica nella regione R , chiusa, semplicemente connessa di contorno C costruiamo la funzione

$$\frac{f(z)}{z - z_i}$$

dove z_i è un punto interno alla regione. Si hanno due casi:

- a) se la $f(z)$ ha uno zero in z_i (1) la $\frac{f(z)}{(z - z_i)}$ è analitica nella regione chiusa e quindi per il teorema di Cauchy si ha:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_i)} dz = 0$$

- b) se la $f(z)$ non ha uno zero in z_i , la $\frac{f(z)}{z - z_i}$ è analitica in tutta la regione chiusa \bar{R} ottenuta da R con l'esclusione del punto z_i . Se realizziamo tale esclusione con una circonferenza C_1 di centro in z_i e raggio ϵ piccolo a piacere, la $\frac{f(z)}{z - z_i}$ risulta analitica nella regione chiusa doppiamente connessa di contorno esterno C e di contorno interno C_1 in cui è applicabile il teorema di Cauchy che permette di scrivere (cfr. [3.10.1]):

$$\oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_i} = \oint_{C_1} \frac{f(z) dz}{z - z_i}$$

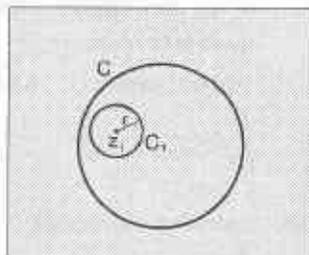


Fig. 3.11.1

Siccome $f(z) = f(z) + f(z_i) - f(z_i)$ (2) sostituendo e ricordando che $\oint_{C_1} \frac{dz}{z - z_i} = 2\pi j$ (cfr. es. 61) si ha:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_i} dz &= \oint_{C_1} \frac{f(z_i)}{z - z_i} dz + \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_i)}{z - z_i} dz = \\ &= 2j\pi f(z_i) + \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_i)}{z - z_i} dz \end{aligned} \quad [3.11.1]$$

Dimostriamo che l'ultimo integrale è nullo per $\epsilon \rightarrow 0$. Indicando con M il massimo di $|f(z) - f(z_i)|$ su C_1 , siccome $\epsilon = |z - z_i|$, si ha:

$$\left| \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_i)}{z - z_i} dz \right| \leq \oint_{C_1} \frac{|f(z) - f(z_i)|}{|z - z_i|} |dz| \leq \frac{M}{\epsilon} \oint_{C_1} ds = \frac{M}{\epsilon} 2\pi\epsilon = 2\pi M$$

(1) Cioè è $f(z) = (z - z_i)g(z)$.

(2) Si noti che $f(z_i)$ è una costante.

Ma per $\epsilon \rightarrow 0$ $M \rightarrow 0$ perché la circonferenza C_1 tende al suo centro, la $f(z)$ su C_1 tende a $f(z_i)$ e quindi il massimo di $|f(z) - f(z_i)|$ tende a zero.

Dalla [3.11.1] si ricava:

$$f(z_i) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_i} dz \quad [3.11.2]$$

che permette di calcolare i valori che una funzione analitica assume all'interno della sua regione di definizione mediante i valori che essa assume sul contorno.

Indicando con z il generico punto interno e con z_c il generico punto sul contorno, la [3.11.2] diventa la formula di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z_c)}{z_c - z} dz_c \quad [3.11.3]$$

Si osservi che la funzione integranda è analitica nella regione aperta perché in essa è $(z_c - z) \neq 0$ (z_c è sul contorno e z no); si può quindi derivare sotto il segno di integrale rispetto a z ottenendo:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z_c)}{(z_c - z)^2} dz_c$$

Con lo stesso ragionamento si arriva ad affermare che nella regione aperta esistono le derivate di tutti gli ordini; per l'ordine n si ha:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z_c)}{(z_c - z)^{n+1}} dz_c$$

Quanto detto per una regione semplicemente connessa può essere esteso ad una regione R molteplicemente connessa, tenendo conto che il contorno di integrazione C è costituito da tutti i contorni percorsi nel verso col quale la regione rimane a sinistra.

Conclusion: una funzione $f(z)$ analitica in una regione chiusa è definita dai suoi valori sul contorno e ammette la derivata di tutti gli ordini nei punti interni cioè nella regione aperta.

3.12.- Principio di massimo

Se $f(z)$ è una funzione analitica nella regione chiusa R di contorno C , il massimo del modulo di $f(z)$ si ha in un punto del contorno.

Indicando con n un intero positivo, alla funzione $g(z) = [f(z)]^n$ si può applicare la formula di Cauchy che diventa:

$$g(z) = [f(z)]^n = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{g(z_c)}{z_c - z} dz_c = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{[f(z_c)]^n}{z_c - z} dz_c$$

Indicando con M il massimo di $|f(z)|$ sul contorno e con δ la minima distanza $|z_c - z|$ tra il punto z e il contorno C , e ricordando che

$$\oint_C |dz| = \int_C ds$$

è la lunghezza l del contorno C , si ha:

$$|f(z)|^n \leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{|f(z_c)|^n}{|z_c - z|} |dz| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M^n}{\delta} l \rightarrow |f(z_c)| \leq M \left(\frac{l}{2\pi\delta} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Al tendere di n all'infinito si ha:

$$|f(z)| \leq M$$

cioè il modulo della funzione nei punti interni è minore o uguale al massimo del modulo sul contorno.

4 - SERIE IN CAMPO COMPLESSO

4.1.- Serie a termini complessi

Una serie a termini complessi è del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + jb_n) = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + j \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Per definizione tale serie è convergente se la somma parziale n -esima

$$s_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + j(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = s'_n + js''_n$$

ha limite finito per $n \rightarrow \infty$.

È chiaro che se sono convergenti le due serie a termini reali $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, indicando con A e B le rispettive somme, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + jb_n)$ è convergente perché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s'_n + js''_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + j \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + jB$$

Viceversa, se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + jb_n) \tag{4.1.1}$$

è convergente e ha somma $A + jB$, le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergono rispettivamente ad A e B . Infatti dalla convergenza della [4.1.1] si ha che, fissato $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, si può determinare un N tale che per tutti gli $n > N$, risulta verificata la relazione:

$$|(s'_n + js''_n) - (A + jB)| < \epsilon \rightarrow \sqrt{(s'_n - A)^2 + (s''_n - B)^2} < \epsilon$$

da cui chiaramente

$$|s'_n - A| < \epsilon \quad \text{e} \quad |s''_n - B| < \epsilon$$

che sono le condizioni di convergenza della $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ad A e della $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a B .

CONVERGENZA ASSOLUTA

Sappiamo che una serie è assolutamente convergente quando è convergente la serie dei suoi moduli. La serie dei moduli della [4.1.1] è data da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \dots$$

Dimostriamo che se la [4.1.1] è assolutamente convergente sono convergenti anche le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Infatti, essendo

$$|a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = c_n \quad \text{e} \quad |b_n| \leq c_n$$

il criterio del confronto dimostra l'assunto.

CRITERIO GENERALE DI CONVERGENZA DI CAUCHY

L'enunciato, del tutto analogo a quello valido in campo reale, è espresso dalla formula:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+r} (a_k + jb_k) \right| < \epsilon$$

4.2.- Serie di funzioni

DEFINIZIONE E CONVERGENZA

Una serie di funzioni si presenta nella forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots \quad [4.2.1]$$

dove $z = x + jy$ e le funzioni sono definite su una linea o in una superficie.

È chiaro che nel punto $z_1 = x_1 + jy_1$, la [4.2.1] si riduce a una serie di termini complessi del tipo $\sum (a_n + jb_n)$ che può essere convergente o divergente. Se la [4.2.1] è convergente in tutti i punti di definizione della funzione $u_k(z)$, si dice che è convergente in tale regione.

CONVERGENZA UNIFORME

L'enunciato, analogo a quello valido nel campo reale, è espresso dalle relazioni:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+r} u_k(z) \right| < \epsilon \quad |R_n| = |S(z) - s_n(z)| < \epsilon$$

CRITERIO DI UNIFORME CONVERGENZA DI WEIERSTRASS

Tale criterio, che è anche criterio di assoluta convergenza (cfr. §1.5), è valido in tutta la regione in cui si ha:

$$|u_k(z)| \leq \alpha_k$$

CONTINUITÀ DELLA SOMMA E INTEGRABILITÀ TERMINE A TERMINE

Se le funzioni $u_k(z)$ sono continue nella regione di definizione e se in essa la serie [4.2.1] è uniformemente convergente, anche la somma della serie risulta continua in tale regione e integrabile termine a termine lungo una linea appartenente alla regione.

TEOREMA DI WEIERSTRASS PER LA DERIVABILITÀ DELLE SERIE DI FUNZIONI ANALITICHE

Esso afferma: una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \quad [4.2.2]$$

in cui le funzioni $u_k(z)$ siano analitiche in una regione chiusa di contorno C e che sia uniformemente convergente sul contorno C , risulta uniformemente convergente nella regione

chiusa e ha per somma una funzione che nei punti interni della regione è analitica e derivabile termine a termine un numero qualunque di volte.

Dall'ipotesi di uniforme convergenza sul contorno, risulta che, per r qualunque ma finito, si ha:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+r} u_k(z_c) \right| < \epsilon$$

Siccome la somma $\sum_{k=n+1}^{n+r} u_k(z)$ delle r funzioni analitiche è una funzione analitica e ha quindi il suo massimo sul contorno (principio di massimo, §3.12), per un punto z interno alla regione si ha:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+r} u_k(z) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+r} u_k(z_c) \right| < \epsilon$$

cioè la serie [4.2.2] è uniformemente convergente anche nei punti interni e quindi nella regione chiusa.

Indicando con $S(z_c)$ la somma della [4.2.2] sul contorno e moltiplicandone tutti i termini per $\frac{1}{2\pi j} \frac{1}{z_c - z}$, si ottiene la seguente serie:

$$\frac{S(z_c)}{2\pi j(z_c - z)} = \frac{u_1(z_c)}{2\pi j(z_c - z)} + \frac{u_2(z_c)}{2\pi j(z_c - z)} + \dots$$

che è anch'essa uniformemente convergente sul contorno (il termine $(z_c - z)$ è costante e diverso da zero per ogni z interno) e quindi integrabile termine a termine per cui si ha:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{S(z_c)}{z_c - z} dz_c = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{u_1(z_c)}{z_c - z} dz_c + \dots$$

Siccome per gli integrali del secondo membro è applicabile la formula di Cauchy (cfr. [3.11.3]) si ha:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{S(z_c)}{z_c - z} dz_c = u_1(z) + u_2(z) + \dots \quad [4.2.3]$$

Poiché la serie a secondo membro è uniformemente convergente nella regione chiusa, la sua somma $S(z)$ è continua; non possiamo ancora affermare che è analitica; per farlo osserviamo che la [4.2.3] si può scrivere

$$S(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{S(z_c)}{z_c - z} dz_c$$

e che la funzione integranda (e quindi anche la $S(z)$) è derivabile quanto si vuole; ma se la $S(z)$ ammette le derivate di ogni ordine è analitica.

Rimane da dimostrare che la serie

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$$

è derivabile termine a termine quanto si vuole.

Moltiplicando tutti i termini della serie $S(z_c) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_c)$ per $\frac{n!}{2\pi j(z_c - z)^{n+1}}$ si ottiene una serie integrabile termine a termine che permette di scrivere:

$$\frac{n!}{2\pi j} \int_C \frac{S(z_c) dz_c}{(z_c - z)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi j} \int_C \frac{u_1(z_c)}{(z_c - z)^{n+1}} dz_c + \frac{n!}{2\pi j} \int_C \frac{u_2(z_c)}{(z_c - z)^{n+1}} dz_c + \dots$$

da cui per la formula di Cauchy si ottiene la relazione tra le derivate di ordine n :

$$S^{(n)}(z) = u_1^{(n)}(z) + u_2^{(n)}(z) + \dots$$

4.3.- Serie di potenze

Una serie di potenze si presenta nella forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - b)^n = a_0 + a_1(z - b) + a_2(z - b)^2 + \dots \quad [4.3.1]$$

Data la grande analogia con le serie reali ci limitiamo ad enunciare le proprietà.

Per il teorema di Abel (cfr. §2.1), se la serie è convergente in un punto $z = z_0$, essa è assolutamente e uniformemente convergente in un cerchio, compresa la sua circonferenza, di centro in b e raggio $\rho < |z_0 - b|$; se invece è divergente in un punto $z = z_0$, essa è divergente in tutti i punti esterni al cerchio di centro in b e raggio $R = |z_0 - b|$.

La circonferenza di raggio R è detta circonferenza di convergenza ed R raggio di convergenza della serie di potenze; il cerchio delimitato dalla circonferenza di raggio R è detto cerchio di convergenza della serie. Nei punti ad esso esterni la [4.3.1] è divergente; nei punti interni la [4.3.1] è convergente; per i punti sulla circonferenza di raggio R non si può affermare nulla in generale: la serie può essere convergente in tutti i punti, divergente in tutti, convergente in alcuni e divergente in altri.

Esempi.

67.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$$

Per il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1}}{(1+n)^3} \cdot \frac{n^3}{|z|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 |z| = |z|$$

e quindi la serie converge per $|z| < 1$, diverge per $|z| > 1$. Il suo cerchio di convergenza ha perciò raggio $R = 1$; ma per $z = 1$ la serie diventa la serie armonica generalizzata con $p = 3$ che, come sappiamo, è convergente. In definitiva la serie converge in tutti i punti del cerchio di convergenza, contorno compreso.

68.
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Per il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = |z|$$

Se ne deduce quindi che la serie (geometrica) ha raggio di convergenza $R = 1$. Vediamo cosa succede sul contorno, cioè sulla circonferenza $z = e^{j\theta}$. Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{jn\theta} \neq 0 \quad \text{per qualunque } \theta$$

e quindi la serie geometrica non converge in alcun punto della circonferenza di raggio $R = 1$. In particolare si può vedere che per $z = 1$ la serie diverge, per $z = -1$, la serie è indeterminata.

69.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

Con il criterio del rapporto si può vedere che la serie ha raggio di convergenza $R = 1$. Per $z = 1$ la serie diventa la serie armonica che è divergente, mentre per $z = -1$ diventa la serie armonica a segni alterni che è convergente. Quindi sulla circonferenza di convergenza la serie può essere sia convergente che divergente.

Come casi particolari si può avere $R = 0$ (in tal caso la serie è convergente solo per $z = b$) e $R = \infty$ (in tal caso la serie è assolutamente convergente in tutto il piano e uniformemente convergente in ogni cerchio di centro b).

La serie può essere integrata termine a termine all'interno del cerchio di convergenza perché, per il teorema di Abel, è uniformemente convergente all'interno di tale cerchio.

All'interno del cerchio di convergenza la serie, per il teorema di Weierstrass, ha per somma una funzione analitica e ammette la derivazione termine a termine, un numero qualunque di volte e lasciando inalterato il raggio di convergenza.

4.4.- Esercizi proposti.

70. Dimostrare che la serie $1 + az + a^2z^2 + \dots$ converge uniformemente a $\frac{1}{1-az}$ in tutti i punti interni al cerchio di raggio $R = \frac{1}{|a|}$

71. Determinare la convergenza assoluta e uniforme della serie:

$$\frac{z}{3} + \frac{z(3-z)}{3^2} + \frac{z(3-z)^2}{3^3} + \frac{z(3-z)^3}{3^4} + \dots$$

72. Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(z^n + z^{n+1})$ determinarne:

- a) la convergenza e la somma;
- b) la convergenza assoluta;
- c) la convergenza uniforme.

73. Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2 + 1)^n}$ determinarne:

- a) la convergenza e la somma;
- b) la convergenza assoluta;
- c) la convergenza uniforme.

74. Determinare la regione di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+j)^n}{(n+1)(n+2)}$

75. Determinare la regione di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n$

76. Determinare la regione di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}$
77. Determinare la regione di uniforme convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$
78. Determinare la regione di uniforme convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{n^2}$
79. Determinare la regione di uniforme convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n}$
80. Determinare la regione di uniforme convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 + |z|^2}$
81. Determinare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ per $|z| < 1$
82. Determinare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ per $|z| < 1$.

Soluzioni degli esercizi proposti.

70. Ponendo $az = t$ la serie data diventa la serie geometrica $\sum t^n$ che ha raggio di convergenza $\bar{R} = 1$. Quindi per $|t| = |a||z| < 1$ cioè per $|z| < \frac{1}{|a|}$ la serie è convergente, ha per somma $S = \frac{1}{1-az}$ e per il teorema di Abel è uniformemente convergente.
71. Mettendo in evidenza il termine $\frac{z}{3}$ la serie si può scrivere:

$$\frac{z}{3} \left[1 + \frac{3-z}{3} + \frac{(3-z)^2}{3^2} + \dots \right]$$

ed è evidente che si annulla per $z = 0$. Osservando che i termini racchiusi all'interno delle parentesi quadrate costituiscono la serie geometrica di ragione $\frac{3-z}{3}$ che è assolutamente convergente per $|3-z| < 3$, la serie ha per somma:

$$S(z) = \frac{z}{3} \frac{1}{1 - \frac{3-z}{3}} = \frac{z}{3} \frac{1}{3 - 3 + z} = 1$$

per tutti gli z che soddisfano la $|3-z| < 3$; la serie è quindi assolutamente convergente nei punti del cerchio $|3-z| < 3$ e nel punto $z = 0$ (fig. 4.4.1). Siccome nel punto $z = 0$ si ha $S(0) = 0$ e in tutti gli altri punti si ha $S(z) = 1$, la somma $S(z)$ ha un punto di discontinuità in $z = 0$ e quindi in qualun-

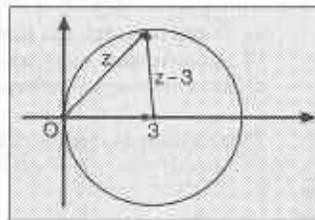


Fig. 4.4.1

que intorno che comprenda $z = 0$ la serie non è uniformemente convergente. Nei punti $|3-z| < 3$ la somma $S(z)$ è continua; tale continuità, da sola, non ci autorizza ad affermare che la serie è in essi uniformemente convergente; siccome però nei punti $|3-z| < 3$ si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |S(z) - s_n(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 - \frac{z}{3} \frac{1 - \left(\frac{3-z}{3}\right)^n}{1 - \frac{3-z}{3}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3-z}{3} \right|^n = 0 \end{aligned}$$

si può concludere che la serie data è uniformemente convergente all'interno del suddetto cerchio.

72. a) Sviluppando, la serie data diventa:
 $(1+z) - (z+z^2) + (z^2+z^3) - (z^3+z^4) + \dots$
 Semplificando, la successione delle somme parziali di posto pari ha come termine generale:
 $s_{2m}(z) = 1 + z^{2m+1}$
 e quella delle somme parziali di posto dispari ha come termine generale:
 $s_{2m+1}(z) = 1 - z^{2m+2}$
 Per $|z| < 1$ la serie è convergente e ha per somma $S(z) = 1$ perché (cfr. P.29, *Serie numeriche*, §4.1):
 $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + z^{2m+1}) = 1$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - z^{2m+2}) = 1$
- b) Siccome la serie dei moduli è:
 $|1+z| + |z+z^2| + |z^2+z^3| + \dots \leq 1 + 2|z| + 2|z|^2 + 2|z|^3 + \dots = 1 + 2|z|(1 + |z| + |z|^2 + \dots)$
 essa è assolutamente convergente per $|z| < 1$.
- c) Per $|z| < 1$ la serie è uniformemente convergente perché
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |S(z) - s_n(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |1 - (1 \pm z^n)| = [1] = \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0$

73. La serie data può essere scritta nel seguente modo:

$$-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z^2 + 1)^n}$$

cioè si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{z^2 + 1}$ diminuita di 1.

(1) Il segno \pm dipende dal fatto di considerare somme parziali di posto pari o di posto dispari.

a) Essa è convergente per $|z^2 + 1| > 1$ e ha per somma:

$$S(z) = -1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{z^2 + 1}} = -1 + \frac{z^2 + 1}{z^2} = \frac{1}{z^2}$$

e per somma parziale:

$$s_n(z) = -1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{z^2 + 1}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{z^2 + 1}} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2 + 1}{z^2} \left(\frac{1}{z^2 + 1}\right)^{n+1}$$

b) La serie dei moduli è la serie geometrica di ragione $\left|\frac{1}{z^2 + 1}\right|$ mancante del primo termine (esso non influisce sulla convergenza) per cui la serie data è assolutamente convergente per $|z^2 + 1| > 1$.

c) La serie è uniformemente convergente per $|z^2 + 1| > 1$ perché:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |S(z) - s_n(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^2 + 1}{z^2} \left(\frac{1}{z^2 + 1}\right)^{n+1} \right| = 0$$

74. Scriviamo la serie data nel seguente modo:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+j)^n}{(n+1)(n+2)}$$

e applichiamo il criterio di Weierstrass (cfr. §1.5) usando come serie di confronto la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Si ha:

$$|u_n(z)| = \frac{|(z+j)^n|}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^2} \text{ per } |z+j| \leq 1$$

la serie è quindi convergente perché assolutamente convergente nel cerchio (contorno compreso) di centro $-j$ e raggio 1.

75. Scrivendo la serie nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{z+1}{3(z-1)} \right]^n$$

e applicando lo stesso procedimento dell'esercizio precedente si ha che la serie data è convergente per $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| \leq 3$.

76. La serie dei moduli è la serie esponenziale che converge per $|z|$ qualunque (cfr. es. 9). Dunque la serie data è convergente perché assolutamente convergente.

77. Poiché:

$$\left| \frac{z^n}{3^n + 1} \right| < \left| \frac{z}{3} \right|^n$$

applichiamo il criterio di Weierstrass assumendo come serie di confronto la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{3} \right|^n$ che è convergente per $|z| < 3$. Quindi la serie data è uniformemente convergente per $|z| < 3$.

Per $z = 3$ la serie data diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + 1}$ che diverge perché il suo termine generale per $n \rightarrow \infty$ non tende a zero ma a uno. Quindi la regione di uniforme convergenza non contiene la circonferenza di convergenza.

78. Applicando il criterio di Weierstrass, essendo:

$$\frac{|z-j|^{2n}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} = [\text{termine generale di serie convergente}]$$

la serie è uniformemente convergente per $|z-j| \leq 1$, cioè in tutto il cerchio di convergenza, contorno compreso.

79. Ponendo $z = \frac{1}{t}$ la serie data diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n+1}$.

Applicando il criterio di Weierstrass, essendo:

$$\left| \frac{t^n}{n+1} \right| < |t|^n = \text{termine generale della serie geometrica, convergente per } |t| < 1,$$

la serie data è uniformemente convergente nei punti $|z| > 1$.

Per $z = 1$ la serie data diviene la serie armonica, che è divergente, quindi la regione di uniforme convergenza non contiene la circonferenza di convergenza.

80. Per ogni z sono verificate le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 + |z|^2} &\leq \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} \leq \frac{\sqrt{2n}}{n^2} \leq \frac{\sqrt{2} n^{\frac{3}{4}}}{n^2} = \sqrt{2} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}} = \\ &= \sqrt{2} \cdot [\text{termine generale serie } p \text{ convergente per } p = \frac{5}{4} > 1] \end{aligned}$$

per il criterio di Weierstrass la serie data è uniformemente convergente per ogni z .

81. Tenendo presente il teorema di derivazione di una serie termine a termine (cfr. §§ 1.9, 2.7) si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz} z^n = z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) =$$

$$= z \frac{d}{dz} \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = z \frac{d}{dz} \left(-1 + \frac{1}{1-z} \right) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

82. Per il teorema di derivazione di una serie si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = z \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \frac{dz^n}{dz} \right) = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(nz^n)}{dz} = z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=1}^{\infty} nz^n \right)$$

Ricordando il risultato dell'esercizio precedente si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \frac{d}{dz} \frac{z}{(1-z)^2} = z \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

4.5.- Serie di Taylor

Abbiamo visto che per i teoremi di Abel e di Weierstrass la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n = a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \dots \quad [4.5.1]$$

ha per somma una funzione che è analitica all'interno del cerchio di convergenza; dimostriamo ora l'inverso e cioè che una funzione $f(z)$ analitica all'interno di un cerchio di raggio R e centro in b è sviluppabile in una serie di potenze del tipo [4.5.1] e che inoltre tale serie di potenze è la serie di Taylor della funzione $f(z)$.

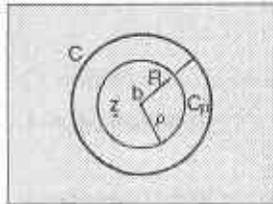


Fig. 4.5.1

In qualunque cerchio di raggio $\rho < R$ e centro in b è applicabile la formula di Cauchy: indicando con C_ρ la circonferenza di raggio ρ , con z_ρ un punto su tale circonferenza e con z un punto ad essa interno si ha:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_\rho} \frac{f(z_\rho)}{z_\rho - z} dz_\rho \quad [4.5.2]$$

Siccome $|z_\rho - b| > |z - b|$ e quindi $\frac{z-b}{z_\rho-b} = q < 1$, la serie geometrica di ragione q è convergente e ha per somma $\frac{1}{1 - \frac{z-b}{z_\rho-b}}$. La funzione integranda può essere trasformata nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \frac{f(z_\rho)}{z_\rho - z} &= \frac{f(z_\rho)}{(z_\rho - b) - (z - b)} = \frac{f(z_\rho)}{(z_\rho - b)} \frac{1}{1 - \frac{z-b}{z_\rho-b}} = \\ &= \frac{f(z_\rho)}{z_\rho - b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-b}{z_\rho-b} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-b)^n f(z_\rho)}{(z_\rho-b)^{n+1}} \end{aligned} \quad [4.5.3]$$

Indicando con M il massimo di $f(z_\rho)$ su C_ρ , per il termine generale della serie [4.5.3] si ha:

$$\frac{f(z_\rho)}{z_\rho - b} \cdot \left(\frac{z-b}{z_\rho-b} \right)^n \leq \frac{M}{\rho} q^n \quad [= \text{termine generale serie geometrica}]$$

Quindi la serie [4.5.3], per il criterio di uniforme convergenza di Weierstrass, è uniformemente convergente in tutti i punti z_ρ su C_ρ e può essere integrata termine a termine (si può cioè sostituire all'integrale della somma la serie degli integrali). Sostituendo, la [4.5.2] diventa:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{C_\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-b)^n}{(z_\rho-b)^{n+1}} f(z_\rho) dz_\rho = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{C_\rho} f(z_\rho) \frac{(z-b)^n}{(z_\rho-b)^{n+1}} dz_\rho \right] = [1] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(z-b)^n \frac{1}{2\pi j} \int_{C_\rho} \frac{f(z_\rho) dz_\rho}{(z_\rho-b)^{n+1}} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n \end{aligned} \quad [4.5.4]$$

avendo posto $\frac{1}{2\pi j} \int_{C_\rho} \frac{f(z_\rho) dz_\rho}{(z_\rho-b)^{n+1}} = a_n$

Abbiamo così dimostrato che la $f(z)$ è sviluppabile nella serie di potenze [4.5.1].

Ricordando ora la formula di Cauchy (§3.11) si ha:

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_\rho} \frac{f(z_\rho) dz_\rho}{(z_\rho-b)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \quad [4.5.5]$$

Sostituendo la [4.5.5] nella [4.5.4] si ottiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n$$

cioè la $f(z)$ è sviluppabile nella sua serie di Taylor. Per $b = 0$ la $f(z)$ è sviluppabile in serie di Mac Laurin.

Esempi.

83. FUNZIONE ESPONENZIALE e^z

Essendo analitica in tutti i punti del piano è sviluppabile in serie di Mac Laurin in ogni cerchio con centro nell'origine:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

84. FUNZIONI $\sin z$ E $\cos z$

Essendo funzioni di esponenziali, sono analitiche e sviluppabili nelle rispettive serie di Mac Laurin in tutto il piano:

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \dots$$

(1) Essendo z_ρ la variabile di integrazione, $(z-b)^n$ è una costante.

85. FUNZIONE LOGARITMICA $\log(1+z)$

È polidroma perché

$$\log(1+z) = \log|1+z| + j[\arg(1+z) + 2k\pi] \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots$$

Consideriamo il ramo monodromo corrispondente a $k = 0$:

$$\log(1+z) = \log|1+z| + j[\arg(1+z)]$$

La funzione così definita è analitica in ogni punto interno al cerchio con centro nell'origine e raggio unitario. Il contorno del cerchio è escluso perché contiene il punto $z = -1$ in cui la derivata non è continua. Pertanto all'interno di tale cerchio la funzione è sviluppabile in serie di potenze, in particolare, in serie di potenze di Mac Laurin nell'intorno dello zero. Risulta:

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \quad |z| < 1$$

All'interno del cerchio di convergenza la serie è uniformemente convergente; sul contorno, escluso $z = -1$, è convergente a $\log(1+z)$.

Si osservi che all'interno del cerchio di convergenza, presi z_1 e z_2 simmetrici rispetto all'origine, si ha $\log(1+z_2) = \log(1-z_1)$, infatti per le condizioni di simmetria è $z_1 = -z_2$. Pertanto scambiando z con $-z$ si ha:

$$\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots \quad |z| < 1$$

Lo sviluppo è valido anche per $|z| = 1$ escluso $z = 1$. Sottraendo le due espressioni trovate si ha:

$$\log(1+z) - \log(1-z) = \log \frac{1+z}{1-z} = 2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right)$$

che è valida per $|z| \leq 1$ esclusi i punti $z = 1$ e $z = -1$.

Per le seguenti funzioni, fissato il punto b , ci proponiamo di determinare il raggio del cerchio nel cui interno esse sono analitiche e quindi sviluppabili in serie di Taylor.

86. $f(z) = \frac{z+3}{(z-1)(z-4)} \quad b = 2$

La funzione $f(z)$ è analitica in tutti i punti del piano escluso $z = 1$ e $z = 4$; è sviluppabile in serie di Taylor nel cerchio di centro in b e raggio 1 cioè per $|z-2| < 1$ perché nei punti interni la $f(z)$ è analitica (un cerchio di raggio maggiore contiene almeno il punto $z = 1$, dove la funzione non è analitica).

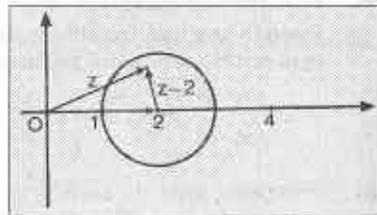


Fig. 4.5.3

87. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+4} \quad b = 0$

La funzione è analitica per ogni z escluso $z^2+4=0 \rightarrow z = \pm 2j$ (fig. 4.5.4).

La $f(z)$ è sviluppabile in serie di Mac Laurin per $|z| < 2$.

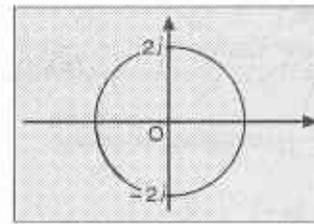


Fig. 4.5.4

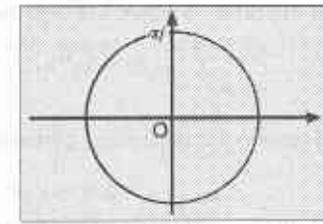


Fig. 4.5.5

88. $f(z) = \frac{z}{e^z+1} \quad b = 0$

La funzione è analitica in tutto il piano escluso il punto $z = j\pi$ (fig. 4.5.5) dove è:

$$e^{j\pi} = \cos \pi + j \sin \pi = -1$$

La $f(z)$ è sviluppabile in serie di Mac Laurin nel cerchio di raggio π .

89. $f(z) = e^{-z^2} \text{Sh}(z+2) \quad b = 0$

La funzione è analitica in tutto il piano ed è quindi sviluppabile in serie di Mac Laurin in un punto qualunque del piano.

90. $f(z) = \sec \pi z \quad b = 1$

La funzione è analitica in tutto il piano escluso $z = \frac{1}{2}$ (vedi fig. 4.5.6); infatti si ha:

$$\sec \pi z = \frac{1}{\cos \pi z} = \frac{2}{e^{j\pi z} + e^{-j\pi z}}$$

in cui il denominatore si annulla per $z = \frac{1}{2}$ essendo $e^{j\pi/2} = j$ ed $e^{-j\pi/2} = -j$.

La funzione è quindi sviluppabile in serie di Taylor per $|z-1| < \frac{1}{2}$.

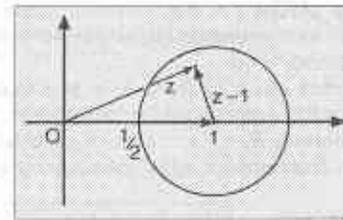


Fig. 4.5.6

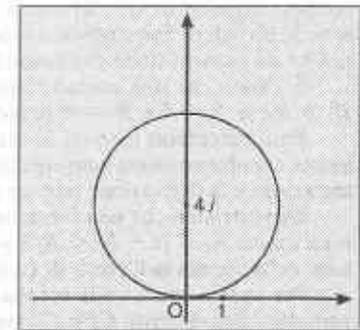


Fig. 4.5.7

91. $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)} \quad b = 4j$

La funzione è analitica in tutto il piano tranne nei punti $z = 0$ e $z = 1$ (vedi fig. 4.5.7); essa è sviluppabile in serie di Taylor nei punti $|z-4j| < 4$ cioè all'interno del cerchio di raggio 4 e centro in $4j$.

4.6.- Serie di potenze a esponente negativo

Una serie di potenze a esponente negativo è del tipo:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-b)^n = \dots + \frac{a_{-2}}{(z-b)^2} + \frac{a_{-1}}{z-b} \quad [4.6.1]$$

Per trovare il cerchio di convergenza poniamo $t = \frac{1}{z-b}$; sostituendo otteniamo:

$$a_{-1}t + a_{-2}t^2 + a_{-3}t^3 + \dots$$

che è una serie di potenze a esponente positivo con $b = 0$; sappiamo che essa ha un raggio di convergenza; indicandolo con $\frac{1}{R_1}$ si ha che per $|t| < \frac{1}{R_1}$ e quindi per $\frac{1}{|t|} > R_1$

essa è convergente; dall'uguaglianza $\frac{1}{|t|} = |z-b| > R_1$ si deduce che la serie [4.6.1] è convergente nella regione esterna al cerchio di centro in b e raggio R_1 ; per i teoremi visti in precedenza essa in tale regione è assolutamente e uniformemente convergente, integrabile e derivabile termine a termine. Se $R_1 = 0$ la regione comprende tutto il piano ad eccezione del punto $z = b$.

4.7.- Serie di Laurent

Una serie di Laurent è del tipo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n = \dots + \frac{a_{-2}}{(z-b)^2} + \frac{a_{-1}}{z-b} + a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \dots \quad [4.7.1]$$

Essa è la somma della serie di potenze a esponente positivo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$, detta parte analitica della [4.7.1], e della serie di potenze a esponente negativo $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-b)^n$ detta

parte principale. Indichiamo con R_1 e R_2 i raggi di convergenza rispettivamente della parte principale (convergente all'esterno di R_1) e di quella analitica (convergente all'interno di R_2); quando la parte principale ha un numero finito di termini si ha $R_1 = 0$: in tal caso le potenze negative di $(z-b)$ hanno un valore finito perché $z \neq b$ e i termini hanno per somma un valore finito perché sono in numero finito; analogamente quando la parte analitica ha un numero finito di termini il raggio R_2 è infinito.

È chiaro che una corona circolare di convergenza esiste se $R_1 < R_2$ e non esiste se $R_1 \geq R_2$; se $R_1 = 0$ e $R_2 = \infty$ la corona diventa tutto il piano escluso il punto $z = b$.

Per i precedenti teoremi, la serie [4.7.1], nella corona $R_1 < |z-b| < R_2$, è assolutamente e uniformemente convergente, ha per somma una funzione analitica e ammette l'integrazione e la derivazione termine a termine.

Dimostriamo che una funzione $f(z)$ analitica nella corona aperta $R_1 < |z-b| < R_2$ è sviluppabile nei punti interni della corona nella serie di Laurent.

Per ogni z interno alla corona si possono sempre trovare due circonferenze C_1' e C_2' concentriche in b , interne alla corona di raggi R_1 e R_2 , e formanti una nuova corona al cui interno si trova il punto z (fig. 4.7.1); nella corona di circonferenze C_1' e C_2' la $f(z)$ è analitica anche sul contorno per cui è applicabile la formula di Cauchy che dà:

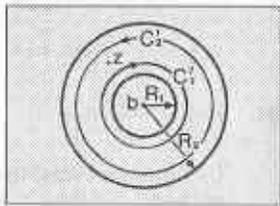


Fig. 4.7.1

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1'} \frac{f(z_c) dz_c}{z_c - z} + \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2'} \frac{f(z_c) dz_c}{z_c - z}$$

Con procedimento del tutto analogo a quello visto per la serie di Taylor (cfr. §4.5), relativamente al contorno C_1' si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{f(z_c)}{z_c - z} &= f(z_c) \frac{1}{(z_c - b) - (z - b)} = \frac{f(z_c)}{-(z - b)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_c - b}{z - b}} = \\ &= \frac{-f(z_c)}{z - b} \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{z_c - b}{z - b}\right)^h = - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(z_c - b)^h f(z_c)}{(z - b)^{h+1}} \end{aligned}$$

L'integrale esteso alla circonferenza C_1' diventa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1'} \frac{f(z_c) dz_c}{z_c - z} &= - \oint_{C_1'} \left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \frac{(z_c - b)^h f(z_c)}{(z - b)^{h+1}} \right] dz_c = \\ &= - \sum_{h=0}^{\infty} \left[\oint_{C_1'} \frac{f(z_c) (z_c - b)^h}{2\pi j (z - b)^{h+1}} dz_c \right] = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(z - b)^{h+1}} \cdot \frac{-1}{2\pi j} \oint_{C_1'} f(z_c) (z_c - b)^h dz_c \right] = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \left[a_{-(h+1)} \cdot \frac{1}{(z - b)^{h+1}} \right] \end{aligned}$$

dove $a_{-(h+1)} = \frac{-1}{2\pi j} \oint_{C_1'} f(z_c) \cdot (z_c - b)^h dz_c$

Per l'integrale relativo al contorno C_2' vale quanto è stato dedotto nel caso della serie di Taylor e cioè:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2'} \frac{f(z_c) dz_c}{z_c - z} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - b)^k$$

dove $a_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2'} \frac{f(z_c) dz_c}{(z_c - b)^{k+1}}$

Sommando le espressioni ottenute per i due integrali si ottiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{h=0}^{\infty} a_{-(h+1)} (z - b)^{-(h+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - b)^k = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - b)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - b)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - b)^n \end{aligned}$$

Esempi.

92. Sviluppare in serie di Laurent la funzione $f(z) = \frac{1}{z-3}$ nei punti $|z| < 3$ e $|z| > 3$.

La $f(z)$ è analitica in tutto il piano eccetto il punto $z = 3$; quindi all'interno del cerchio con centro nell'origine e raggio 3 (fig. 4.7.2) è analitica e sviluppabile nella serie di Taylor che è una serie di Laurent senza la sua parte principale. Lo sviluppo si può

trovare in due modi:

a) In base alla formula di Taylor con $b = 0$:

$$f(0) = -\frac{1}{3}$$

$$f'(z) = \frac{-1}{(z-3)^2} \rightarrow f'(0) = -\frac{1}{3^2}$$

$$f^{(2)}(z) = \frac{2}{(z-3)^3} \rightarrow f^{(2)}(0) = -\frac{2}{3^3}$$

$$f^{(3)}(z) = \frac{-2 \cdot 3}{(z-3)^4} \rightarrow f^{(3)}(0) = -\frac{2 \cdot 3}{3^4}$$

$$f^{(n)}(0) = -\frac{n!}{3^{n+1}}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{n!}{3^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} = -\frac{1}{3} - \frac{z}{9} - \frac{z^2}{27} - \dots$$

b) In base alla serie geometrica si ha (1):

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \frac{z^3}{27} + \dots\right)$$

Nella corona circolare di raggi $R_1 = 3$ e $R_2 = \infty$ la funzione è analitica e quindi sviluppabile in serie di Laurent; in base alla serie geometrica si ha (1):

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^3} + \dots$$

93. Sviluppare in serie di Laurent la funzione $f(z) = \frac{-z}{(z-1)(z-2)}$ nei punti così definiti:

- a) $|z| < 1$
- b) $1 < |z| < 2$
- c) $|z| > 2$
- d) $|z-1| > 1$
- e) $0 < |z-2| < 1$

La funzione $f(z)$ è analitica in tutto il piano eccetto i punti $z = 1$ e $z = 2$; scomponiamola in elementi semplici col noto procedimento (1):

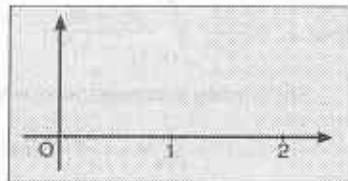


Fig. 4.7.3

(1) Quando si chiama in causa la serie geometrica le trasformazioni da effettuare sulla funzione devono essere tali da mettere in evidenza una ragione $q < 1$.

Nel caso dell'esempio 92, quando $|z| < 3$ è $\frac{|z|}{3} < 1$, quando $|z| > 3$ è $\frac{3}{|z|} < 1$.

Nel caso dell'esempio 93, poiché la funzione non è analitica nei due punti $z = 1$ e $z = 2$, per potersi ricondurre alla serie geometrica è necessario scindere la funzione nella somma di due frazioni elementari. Per ciascuna di esse, per quanto riguarda la ragione, vale quanto detto a proposito dell'esempio 92.

$$\frac{-z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2) + B(z-1)}{(z-1)(z-2)}$$

deve essere:

$$-z = A(z-2) + B(z-1)$$

Per $z = 2$ si ha $-2 = B$ e per $z = 1$ si ha $-1 = -A$, quindi:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z-2}$$

a) All'interno del cerchio $|z| < 1$ la funzione è analitica e quindi sviluppabile in serie di Taylor con $b = 0$ [vedere modo b) dell'esempio precedente]:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n = -1 - z - z^2 - z^3 - \dots$$

$$\frac{-2}{z-2} = \frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n =$$

$$= 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \dots$$

Sommando si ottiene:

$$f(z) = -\frac{z}{2} - \frac{3}{4}z^2 - \frac{7}{8}z^3 - \frac{15}{16}z^4 - \dots$$

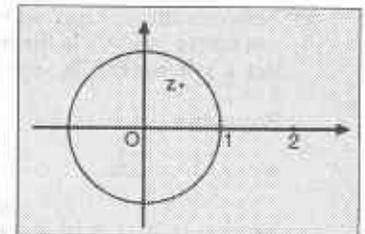


Fig. 4.7.4

b) Nella corona circolare di centro nell'origine e di raggi $R_1 = 1$ e $R_2 = 2$ la funzione è analitica e quindi sviluppabile in serie di Laurent con $b = 0$.

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots$$

$$\frac{-2}{z-2} = \frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \dots$$

Sommando si ha:

$$\dots \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \dots$$

c) All'interno della corona circolare di raggi $R_1 = 2$ e $R_2 = \infty$ la funzione è analitica e quindi sviluppabile in serie di Laurent con $b = 0$:

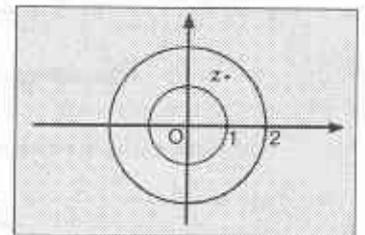


Fig. 4.7.5

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{-2}{z-2} &= \frac{-2}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = -\frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \\ &= -\frac{2}{z} \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \dots\right) \end{aligned}$$

Sommando si ha:

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} - \frac{7}{z^3} - \frac{15}{z^4} + \dots$$

- d) Nella corona di raggi $R_1 = 1$ e $R_2 = \infty$ e con centro in $z = 1$ la funzione $f(z)$ è analitica e sviluppabile in serie di Laurent con $b = 1$.

Ponendo $z - 1 = t$ si ha:

$$f(z) = \frac{1}{t} - \frac{2}{t-1}$$

Siccome $|z - 1| = |t| > 1$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{2}{t-1} &= \frac{2}{t\left(1-\frac{1}{t}\right)} = \frac{2}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^n = \frac{2}{t} \left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \dots\right) = \\ &= \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^3} + \dots = \frac{2}{(z-1)} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} + \dots \end{aligned}$$

Sostituendo si ha lo sviluppo in serie di Laurent:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2} - \dots = \frac{-1}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)^3} - \dots$$

- e) Nella corona di raggi $R_1 = 0$ e $R_2 = 1$ e centro in $z = 2$ la $f(z)$ è analitica e sviluppabile in serie di Laurent con $b = 2$.

Ponendo $z - 2 = t$ si ha:

$$f(z) = \frac{1}{1+t} - \frac{2}{t}$$

Siccome $|z - 2| = |t| < 1$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots = \\ &= 1 - (z-2) + (z-2)^2 - (z-2)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$f(z) = -\frac{2}{z-2} + 1 - (z-2) + (z-2)^2 - (z-2)^3 + \dots$$

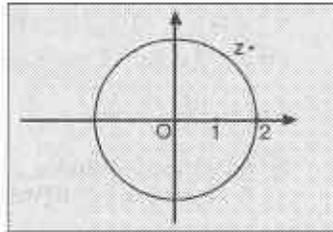


Fig. 4.7.6

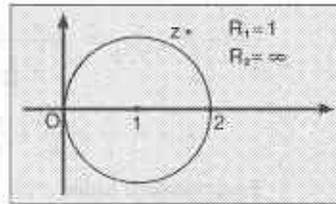


Fig. 4.7.7

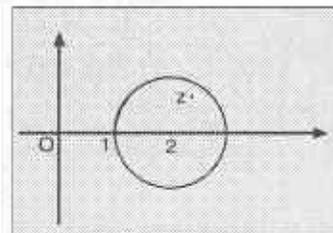


Fig. 4.7.8

4.8.- Serie trigonometrica

È una serie di funzioni del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sin \varphi_n \cos nx + A_n \cos \varphi_n \sin nx) \quad [4.8.1]$$

dove A_n, φ_n e x sono reali.

Ponendo $A_n \cos \varphi_n = b_n, A_n \sin \varphi_n = a_n$ per $n = 1, 2, \dots$ e $A_0 \sin \varphi_0 = \frac{a_0}{2}$ la [4.8.1] diventa:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad [4.8.2]$$

che si riduce alla serie di seni

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

se $a_n = 0$ per $n = 1, 2, \dots$, e alla serie di coseni

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

se $b_n = 0$ per $n = 1, 2, \dots$

Siccome il termine generale

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

è periodico di periodo 2π , la serie può essere studiata in un qualunque intervallo di ampiezza 2π e, se è convergente, la sua somma $S(x)$ è pure periodica di periodo 2π .

4.9.- Relazione tra coefficienti e somma in una serie trigonometrica

Se la serie [4.8.2] è uniformemente convergente in tutto l'intervallo $(-\pi, \pi)$ e ha somma $S(x)$, sono verificate le seguenti relazioni:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos nx dx \quad [4.9.1]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin nx dx \quad [4.9.2]$$

con $n = 1, 2, \dots$

Per ipotesi, infatti, si ha:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad [4.9.3]$$

Moltiplicando la [4.9.3] per $\cos kx$ con $k = 0, 1, 2, \dots$ e integrando tra $-\pi$ e π si ottiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos kx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx) dx$$

Siccome

$$|a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx| \leq |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \quad [\text{essendo } |\cos kx| \leq 1]$$

dalla uniforme convergenza della [4.9.3] e per la condizione necessaria e sufficiente (cfr. §1.4) consegue la convergenza uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)$$

per cui si può integrare per serie e scrivere:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos kx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos kx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \cos kx \, dx \right] \quad [4.9.4]$$

Tenendo presente che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2kx}{2} \, dx = \pi$$

e che quindi per $n \neq k$, per effetto dei primi due integrali si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = [1] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k+n)x + \cos(k-n)x}{2} \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx = [1] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+k)x + \sin(n-k)x}{2} \, dx = 0$$

la [4.9.4] permette di determinare le relazioni [4.9.1]; infatti per $k = 0, 1, 2, \dots$ la [4.9.4] diventa:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0 \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \cos x \cos x \, dx = a_1 \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos 2x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_2 \cos 2x \cos 2x \, dx = a_2 \pi$$

.....

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx \, dx = a_n \pi$$

e quindi:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos nx \, dx$$

Analogamente, se si moltiplica la [4.9.3] per $\sin kx$ con $k = 1, 2, \dots$ si ottiene:

(1) Cfr. P.11, *Corso propedeutico di matematica*, §4.5, formule di Werner.

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin kx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \sin kx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \sin kx \, dx \right] \quad [4.9.5]$$

Tenendo presente che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2kx}{2} \, dx = \pi$$

e che per $n \neq k$ si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k-n)x - \cos(k+n)x}{2} \, dx = 0$$

la [4.9.5] permette di determinare le [4.9.2]; infatti per $k = 1, 2, \dots$ la [4.9.5] diventa:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_1 \sin^2 x \, dx = b_1 \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin 2x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_2 \sin^2 2x \, dx = b_2 \pi$$

.....

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin^2 nx \, dx = b_n \pi$$

e quindi:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin nx \, dx$$

4.10.- Serie di Fourier

Supponiamo che la funzione $f(x)$, avente periodo 2π , ammetta nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ i seguenti integrali:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, \dots$$

detti coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$. La serie trigonometrica [4.8.2] avente per coefficienti i precedenti integrali viene detta serie di Fourier associata alla funzione $f(x)$; essa può essere:

- 1) divergente
- 2) convergente con somma $S(x) \neq f(x)$
- 3) convergente con somma $S(x) = f(x)$

Nel terzo caso si dice che la funzione $f(x)$ è la somma della serie di Fourier associata alla $f(x)$; più brevemente che la $f(x)$ è sviluppabile in serie di Fourier.

4.11.- Teorema fondamentale di convergenza

Si ricorda (cfr. P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*, §4.4) che per punto di discontinuità di prima specie di una funzione $f(x)$ si intende un punto $x = c$ in cui esistono finiti il limite destro e quello sinistro e tali che:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l_1 \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$ (1).

Ciò premesso possiamo enunciare, omettendone la dimostrazione, il seguente teorema, valido per una funzione periodica definita nell'intervallo $(-\pi, \pi)$:

Nei punti in cui la funzione $f(x)$ è continua e derivabile, o almeno è dotata di derivata destra e sinistra, la serie di Fourier associata:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2)$$

con

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

è convergente e la sua somma è $S = f(x)$.

Nei punti di discontinuità di prima specie in cui esistono finiti i limiti:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

la serie converge a

$$S = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

cioè alla media dei limiti destro e sinistro nel punto di discontinuità.

Si ricorda che i due limiti considerati sono, rispettivamente, la pseudoderivata sinistra $f^*(x)$ e la pseudoderivata destra $f^*(x)$. Si ricordi inoltre che la pseudoderivata destra [sinistra] coincide con la derivata destra [sinistra] se è $f(x) = f(x+0)$ [$f(x) = f(x-0)$].

Il precedente teorema fornisce condizioni sufficienti ma non necessarie per la convergenza.

Esempi.

(1) Nel seguito, per brevità, indicheremo con $f(x-0)$ il valore del limite sinistro della funzione in un generico punto x e con $f(x+0)$ il valore del limite destro.

(2) Il termine $\frac{a_0}{2}$ è il valore medio della $f(x)$ che è dato da $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

94. La funzione periodica, di periodo 2π , definita da

$$f(x) = x \quad -\pi < x \leq \pi$$

avente il diagramma indicato in fig. 4.11.2 è continua in tutto l'intervallo esclusi gli estremi ove presenta discontinuità di prima specie. Essa quindi ammette lo sviluppo in serie di Fourier.

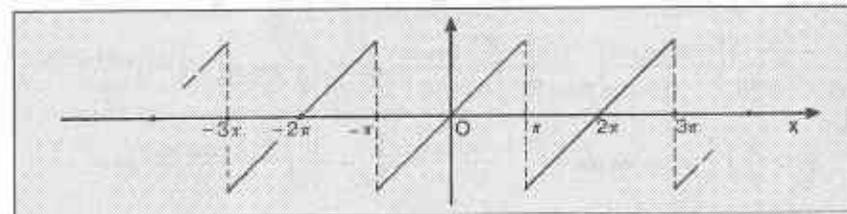


Fig. 4.11.2

I coefficienti dello sviluppo sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx = -\frac{2 \cos n\pi}{n} = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

La serie è perciò:

$$2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + \dots \right) \quad [4.11.1]$$

e vale $f(x) = x$ nei punti dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e zero negli estremi $x = \mp \pi$ dove è nulla la media aritmetica dei limiti destro e sinistro, cioè $\frac{-\pi + \pi}{2} = 0$.

Se consideriamo invece la funzione così definita:

$$\begin{cases} \varphi(x) = x & \text{per } -\pi < x < \pi \\ \varphi(x) = 0 & \text{per } x = \pm \pi \end{cases}$$

essa ha come sviluppo ancora la [4.11.1] che però converge a $\varphi(x)$ in tutto l'intervallo chiuso $(-\pi, \pi)$, in quanto la somma della serie agli estremi vale zero come la funzione.

95. La funzione periodica, di periodo 2π , definita da

$$f(x) = x^2 \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

avente il diagramma di fig. 4.11.3 è continua nell'intervallo chiuso, derivabile nell'intervallo aperto e dotata di derivate destra e sinistra agli estremi, e quindi ammette lo

sviluppo in serie di Fourier i cui coefficienti sono dati da:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[x^2 \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x \sin nx}{n} dx = \\ &= \frac{-2}{n\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx = \frac{4}{n^2} \cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-x^2 \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x \cos nx}{n} dx = \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx = 0 \end{aligned}$$

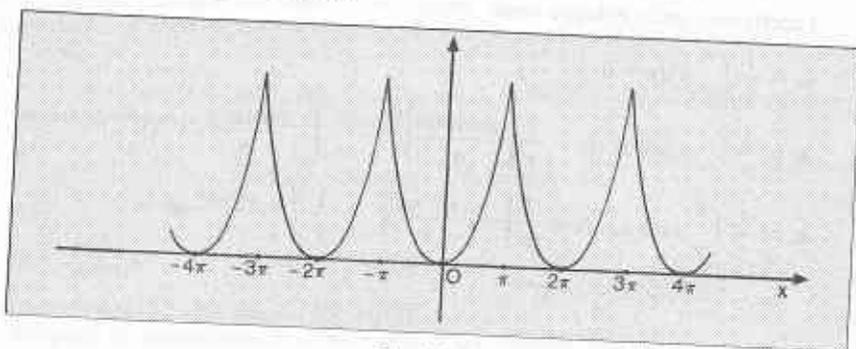


Fig. 4.11.3

Siccome la $f(x) = x^2$ non ha punti di discontinuità, la serie di Fourier dà, in ogni punto dell'intervallo chiuso $(-\pi, \pi)$, il valore della funzione; si può quindi scrivere:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

Si osservi che:

1) per $x = \pi$ si ottiene:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

cioè il valore della serie armonica generalizzata per $p = 2$;

2) per $x = 0$ si ottiene:

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{n+1}$$

che è la serie precedente con segni alterni.

4.12.- Intervallo di integrazione di funzione periodica

Se una funzione $f(x)$, definita su tutto l'asse reale, è periodica di periodo T , l'integrale esteso a qualunque intervallo di ampiezza T , non dipende dalla posizione dell'intervallo sull'asse reale ossia l'integrale

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

non dipende dal valore di a .

Nel calcolo dei coefficienti di Fourier l'intervallo di integrazione $(-\pi, \pi)$ può essere perciò sostituito con un qualunque intervallo $(a, a + 2\pi)$ di ampiezza 2π .

4.13.- Serie di Fourier di funzioni pari e dispari

Una funzione $f(x)$ è pari nell'intervallo $(-a, a)$ quando $f(-x) = f(x)$ (vedi fig. 4.13.1); per essa si ha:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Una funzione è dispari nell'intervallo $(-a, a)$ quando $f(-x) = -f(x)$ (vedi fig. 4.13.2); per essa si ha:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

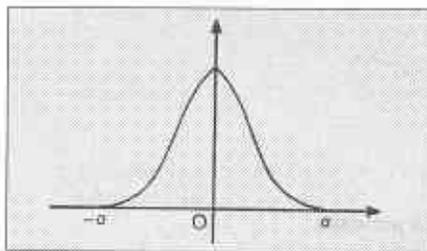


Fig. 4.13.1

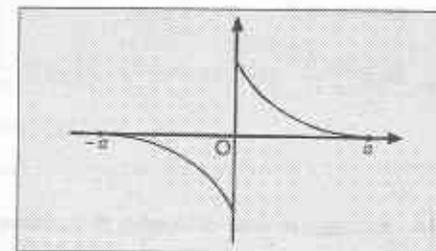


Fig. 4.13.2

Pertanto se si sviluppa in serie di Fourier una funzione pari, tenendo presente che $f(x) \cos nx$ è pari mentre $f(x) \sin nx$ è dispari, si ha:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0$$

ossia lo sviluppo è costituito da una serie di coseni.

Analogamente, se $f(x)$ è dispari, $f(x) \cos nx$ è dispari mentre $f(x) \sin nx$ è pari, per cui

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

ossia lo sviluppo è costituito da una serie di seni.

Esempi.

96. La funzione dell'esempio 95 è pari e quindi sviluppabile in serie di coseni con i coefficienti dati da:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = [\text{cfr. es. 95}] = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = 0$$

97. La funzione dell'esempio 94 è dispari e quindi sviluppabile in serie di seni con i coefficienti dati da:

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = [\text{cfr. es. 94}] = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

4.14.- Sviluppo in serie di Fourier di funzione non periodica

Una funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $(0, \pi)$ può essere sviluppata sia in serie di coseni sia in serie di seni. Infatti è possibile definirla in $(-\pi, 0)$ in modo che risulti pari in $(-\pi, \pi)$ [basta porre $f(-x) = f_1(x)$]:

$$f_1(x) = f(x) \quad \text{in } (0, \pi)$$

$$f_1(x) = f(-x) \quad \text{in } (-\pi, 0)$$

e, analogamente, è possibile definirla in $(-\pi, 0)$ in modo che risulti dispari [basta porre $f(-x) = -f_2(x)$]:

$$f_2(x) = f(x) \quad \text{in } (0, \pi)$$

$$f_2(x) = -f(-x) \quad \text{in } (-\pi, 0)$$

È poi possibile prolungare la definizione di $f_1(x)$ o $f_2(x)$ su tutto l'intervallo $[-\infty, +\infty]$ in modo da ottenere una funzione periodica. Nel primo caso (funzione pari) alla $f(x) = f_1(x)$ è associabile una serie di Fourier di soli coseni:

$$f(x) = f_1(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (1)$$

e nel secondo caso (funzione dispari) una serie di soli seni:

$$f(x) = f_2(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

In questi casi si parla, rispettivamente, di prolungamento pari e di prolungamento dispari della $f(x)$.

Esempi.

98. La funzione $f(x) = x^2$ con $0 \leq x \leq \pi$ può essere sviluppata sia in serie di coseni sia in serie di seni; infatti la funzione $f_1(x) = x^2$ con $-\pi \leq x \leq \pi$ è pari e quindi sviluppabile in serie di coseni (esempi 95 e 96).

La funzione:

$$f_2(x) = x^2 \quad \text{in } 0 \leq x \leq \pi$$

$$f_2(x) = -x^2 \quad \text{in } -\pi < x < 0$$

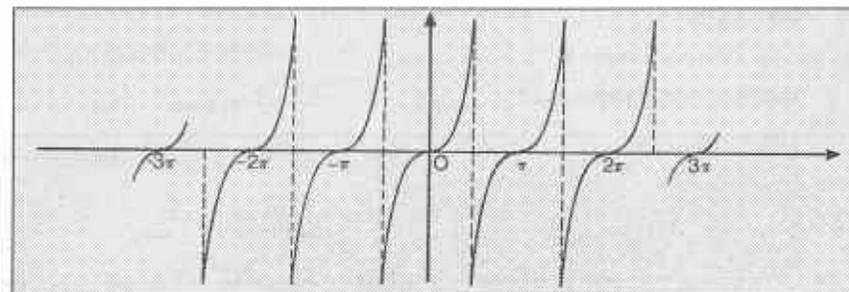


Fig. 4.14.1

è dispari in $(-\pi, \pi)$ (fig. 4.14.1) e quindi sviluppabile in serie di seni i cui coefficienti sono dati da:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[-x^2 \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \frac{\cos nx}{n} dx = \\ &= \frac{2}{n\pi} (-\pi^2 \cos n\pi) + \frac{4}{n\pi} \left[x \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx = \\ &= -\frac{2\pi}{n} \cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \\ &= -\frac{2\pi}{n} \cos n\pi - \frac{4}{n^3\pi} (-\cos n\pi + 1) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{n} & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{2\pi}{n} - \frac{8}{n^3\pi} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

(1) Il simbolo \sim usato al posto del simbolo $=$ evidenzia il fatto che la serie coincide con la funzione solo nei punti in cui quest'ultima è derivabile. Nei punti, ad esempio, di discontinuità di prima specie l'uguaglianza non sussiste.

Quindi lo sviluppo in serie per $0 \leq x < \pi$ è dato da:

$$x^2 = \left(2\pi - \frac{8}{\pi}\right) \text{sen } x - \frac{2\pi}{2} \text{sen } 2x + \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{3^3\pi}\right) \text{sen } 3x - \dots =$$

$$= 2\pi \left(\text{sen } x - \frac{\text{sen } 2x}{2} + \frac{\text{sen } 3x}{3} - \dots \right) - \frac{8}{\pi} \left(\text{sen } x + \frac{\text{sen } 3x}{3^3} + \frac{\text{sen } 5x}{5^3} + \dots \right)$$

In $x = \pi$ si ha una discontinuità di prima specie, esistono le derivate destra e sinistra, e quindi la serie converge a $S = 0$, media dei limiti destro e sinistro della funzione in π .

99. La funzione $f(x) = \text{sen } x$, definita in $(0, \pi)$, può essere sviluppata sia in serie di seni sia in serie di coseni. Infatti con un prolungamento dispari della $f(x)$ si ottiene $f_1(x) = \text{sen } x$ in $(-\pi, \pi)$ che è dispari e quindi sviluppabile in serie di seni avente per coefficienti:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } x \text{sen } nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq 1 \\ 1 & \text{per } n = 1 \end{cases}$$

per cui si ha:

$$f_1(x) = b_1 \text{sen } x = \text{sen } x$$

risultato noto in partenza.

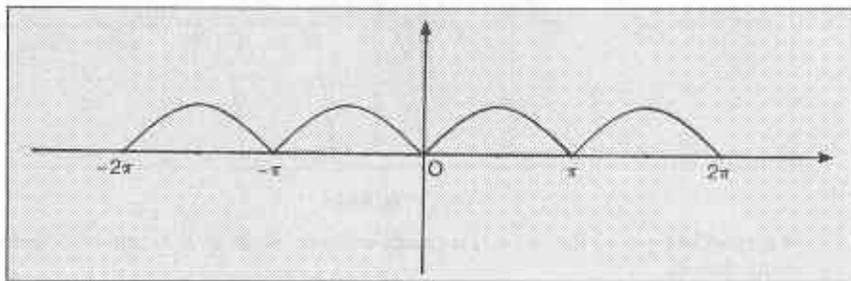


Fig. 4.14.2

Con un prolungamento pari della $f(x)$ si ottiene $f_2(x) = \text{sen } |x|$ in $(-\pi, \pi)$ (fig. 4.14.2) sviluppabile in serie di coseni avente per coefficienti:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } x \, dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } 2x \, dx = 0$$

e per $n \neq 1$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(1+n)x + \text{sen}(1-n)x}{2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{-1 + \cos(n-1)\pi}{n-1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 + \cos n\pi}{n+1} - \frac{1 + \cos n\pi}{n-1} \right) =$$

$$= \frac{-2(1 + \cos n\pi)}{\pi(n^2 - 1)} = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ dispari} \\ -4 & \text{per } n \text{ pari} \end{cases} \frac{1}{\pi(n^2 - 1)}$$

Quindi per $0 \leq x \leq \pi$ si ha:

$$\text{sen } x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \dots \right)$$

4.15.- Serie di Fourier in forma complessa

Dalle formule di Eulero:

$$e^{jx} = \cos x + j \text{sen } x \quad e^{-jx} = \cos x - j \text{sen } x$$

sommando e sottraendo si ottiene:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \text{sen } x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

per cui, sostituendo, la serie di Fourier diventa:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2} - j b_n \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2} \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - j b_n}{2} e^{jnx} + \frac{a_n + j b_n}{2} e^{-jnx} \right)$$

Ponendo ora: $\frac{a_0}{2} = c_0$ $\frac{a_n - j b_n}{2} = c_n$ $\frac{a_n + j b_n}{2} = c_{-n}$

si ottiene:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jnx} + c_{-n} e^{-jnx}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

che è appunto la serie di Fourier in forma complessa.

4.16.- Serie di Fourier di funzione periodica di periodo 2λ

Per sviluppare in serie di Fourier una funzione $f(x)$ periodica di periodo 2λ definita nell'intervallo $(-\lambda, \lambda)$ si opera il cambiamento di variabile

$$x = \frac{\lambda}{\pi} t$$

in base al quale si ottiene la funzione di t

$$f\left(\frac{\lambda}{\pi} t\right)$$

di periodo 2π e definita nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ per la quale valgono tutte le considerazioni precedenti. In particolare si ha il solito sviluppo

$$f\left(\frac{\lambda}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\lambda}{\pi} t\right) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\lambda}{\pi} t\right) \cos nt dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\lambda}{\pi} t\right) \sin nt dt$$

Essendo $t = \frac{\pi}{\lambda} x$ e $dt = \frac{\pi}{\lambda} dx$, le precedenti formule, sostituendo, diventano:

$$a_0 = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\lambda} dx \quad [4.16.1]$$

$$b_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\lambda} dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\lambda} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\lambda} \right)$$

che è appunto la serie di Fourier associata a una funzione periodica di periodo 2λ .

Esempi.

100. Vediamo dove è sviluppabile in serie di Fourier la funzione periodica, di periodo $2\lambda = 6$, così definita:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{per } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{per } -3 < x < 0 \end{cases}$$

Il diagramma della funzione è quello rappresentato in fig. 4.16.1. Da esso si può osservare che la funzione è continua in $[-3, 3]$ e agli estremi presenta discontinuità di prima specie.

I coefficienti della serie sono dati dalle [4.16.1]:

$$a_0 = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 ax dx = [\text{essendo } f(x) = 0 \text{ in } (-3, 0)] = \frac{a}{3} \int_0^3 x dx = \frac{3}{2} a$$

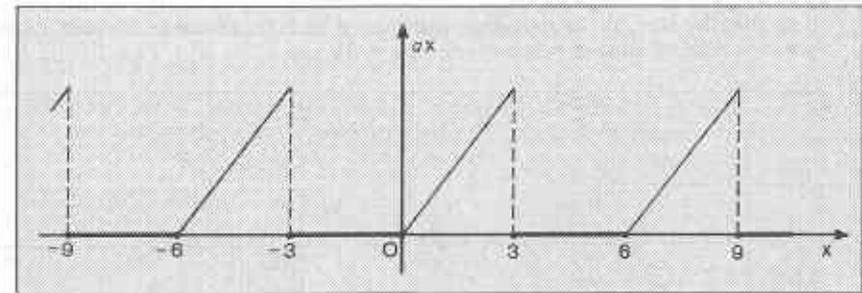


Fig. 4.16.1

$$a_n = \frac{1}{3} \int_0^3 ax \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{a}{3} \left\{ \left[\frac{x \sin \frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}} \right]_0^3 - \frac{3}{n\pi} \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right\} =$$

$$= -\frac{3a}{n^2 \pi^2} \left[-\cos \frac{n\pi x}{3} \right]_0^3 = \frac{3a}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1)$$

$$b_n = \frac{1}{3} \int_0^3 ax \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{a}{3} \left\{ \left[\frac{-x \cos \frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}} \right]_0^3 + \frac{3}{n\pi} \int_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right\} =$$

$$= -\frac{3a \cos n\pi}{n\pi} + \frac{a}{n\pi} \left[\frac{\sin \frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}} \right]_0^3 = -\frac{3a}{n\pi} \cos n\pi$$

quindi lo sviluppo in serie per $-3 < x < 3$ è dato da:

$$f(x) = \frac{3}{4} a + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3a(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{3} - \frac{3a \cos n\pi}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \right]$$

In $x = \pm 3$ esistono finite le pseudoderivate

$$f^*(\pm 3) = a \quad f^*(\pm 3) = 0$$

pertanto la serie di Fourier associata alla funzione è convergente e ha per somma

$$S = \frac{f(\pm 3 - 0) + f(\pm 3 + 0)}{2} = \frac{3a + 0}{2} = \frac{3}{2} a$$

che è diverso dal valore che la funzione assume in tali punti [$y(-3) = 0, y(3) = 3a$]. Pertanto in $x = \pm 3$ la funzione non è sviluppabile in serie di Fourier.

101. Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione periodica, di periodo 2λ , così definita:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{per } 0 \leq x \leq \lambda \\ -a & \text{per } \lambda < x < 2\lambda \end{cases}$$

il cui diagramma è quello rappresentato in fig. 4.16.2. Da esso si vede che la funzione presenta discontinuità di prima specie in $x = 0$ e $x = \lambda$.

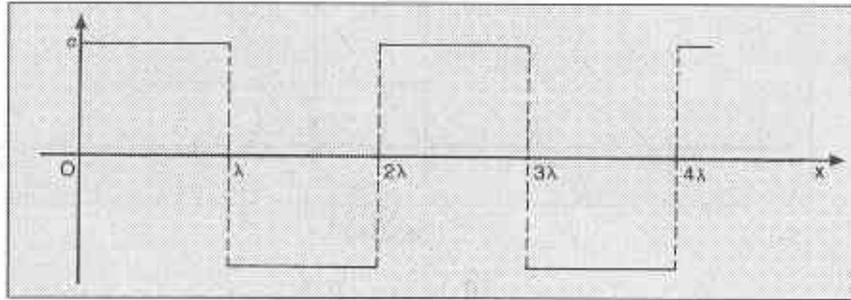


Fig. 4.16.2

In base a quanto detto al §4.12 sull'intervallo di integrazione i coefficienti [4.16.1] diventano:

$$a_0 = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\lambda} f(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} a dx - \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda}^{2\lambda} a dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} a \cos \frac{n\pi x}{\lambda} dx - \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda}^{2\lambda} a \cos \frac{n\pi x}{\lambda} dx = \frac{a}{\lambda} \left[\frac{\text{sen } \frac{n\pi x}{\lambda}}{\frac{n\pi}{\lambda}} \right]_0^{\lambda} - \frac{a}{\lambda} \left[\frac{\text{sen } \frac{n\pi x}{\lambda}}{\frac{n\pi}{\lambda}} \right]_{\lambda}^{2\lambda} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} a \text{sen } \frac{n\pi x}{\lambda} dx - \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda}^{2\lambda} a \text{sen } \frac{n\pi x}{\lambda} dx = \frac{a}{n\pi} \left[-\cos \frac{n\pi x}{\lambda} \right]_0^{\lambda} - \frac{a}{n\pi} \left[-\cos \frac{n\pi x}{\lambda} \right]_{\lambda}^{2\lambda} = \frac{2a}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{4a}{n\pi} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi si ha:

$$f(x) = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} \text{sen } \frac{n\pi x}{\lambda} = \frac{4a}{\pi} \left(\text{sen } \frac{\pi x}{\lambda} + \frac{1}{3} \text{sen } \frac{3\pi x}{\lambda} + \frac{1}{5} \text{sen } \frac{5\pi x}{\lambda} + \dots \right)$$

che è lo sviluppo in serie di Fourier di un'onda rettangolare negli intervalli $[0, \lambda]$ e $[\lambda, 2\lambda]$.

Vediamo cosa succede in $x = 0$ e in $x = \lambda$.

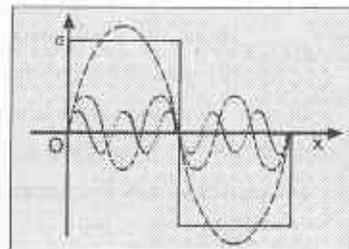


Fig. 4.16.3

In entrambi i punti esistono finite le pseudoderivate:

$$f^{*}(0) = f^{*}(0) = f^{*}(\lambda) = f^{*}(\lambda) = 0$$

quindi la serie di Fourier associata alla funzione è convergente ed ha somma $S = 0$, pari alla media dei limiti destro e sinistro della funzione in ciascuno dei due punti. Poiché

$$f(0) = f(\lambda) = a \neq S$$

in detti punti la funzione non è sviluppabile in serie di Fourier.

SERIE DI FOURIER DI FUNZIONI PARI E DISPARI

Se la funzione $f(x)$ è pari in $(-\lambda, \lambda)$ le [4.16.1] diventano:

$$a_0 = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) dx \quad a_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\lambda} dx \quad b_n = 0 \quad [4.16.2]$$

e la serie di Fourier associata è una serie di soli coseni:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\lambda}$$

Se la $f(x)$ è dispari in $(-\lambda, \lambda)$ si ha:

$$a_0 = a_n = 0 \quad b_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{\lambda} dx \quad [4.16.3]$$

e la serie di Fourier associata è una serie di soli seni:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } \frac{n\pi x}{\lambda}$$

La funzione dell'esempio 101 è dispari per cui si ha:

$$b_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} a \text{sen } \frac{n\pi x}{\lambda} dx = \frac{2a}{\lambda} \left[\frac{-\cos \frac{n\pi x}{\lambda}}{\frac{n\pi}{\lambda}} \right]_0^{\lambda} = \frac{2a}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

SERIE DI FOURIER DI FUNZIONI NON PERIODICHE

Una funzione $f(x)$ non periodica in $(0, \lambda)$ può essere sviluppata in serie di coseni definendo la funzione pari

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) & \text{in } (0, \lambda) \\ f_1(x) &= f(-x) & \text{in } (-\lambda, 0) \end{aligned}$$

oppure in serie di seni definendo la funzione dispari

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f(x) & \text{in } (0, \lambda) \\ f_2(x) &= -f(-x) & \text{in } (-\lambda, 0) \end{aligned}$$

e passando ai corrispondenti sviluppi.

Esempio.

102. La funzione $f(x) = a$ per $0 \leq x \leq \lambda$ può essere sviluppata nella serie di soli seni della funzione $f_1(x)$ dispari così definita:

$$f_1(x) = a \quad \text{in } 0 \leq x \leq \lambda$$

$$f_1(x) = -a \quad \text{in } -\lambda < x < 0$$

che è la funzione dell'esempio 101.

FORMA COMPLESSA

Sostituendo

$$\cos \frac{n\pi x}{\lambda} = \frac{e^{j \frac{n\pi x}{\lambda}} + e^{-j \frac{n\pi x}{\lambda}}}{2} \quad \text{sen} \frac{n\pi x}{\lambda} = \frac{e^{j \frac{n\pi x}{\lambda}} - e^{-j \frac{n\pi x}{\lambda}}}{2j}$$

nella

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\lambda} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{\lambda} \right)$$

e, procedendo in modo del tutto analogo a quanto visto nel §.4.15, si ottiene lo sviluppo in forma complessa:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{n\pi x}{\lambda}}$$

dove

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

4.17.- Esercizi proposti

103. Sviluppare $f(x) = \cos x$ in $0 < x < \pi$ in serie di seni.

104. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione periodica (periodo $2\lambda = 8$):

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per } -4 \leq x \leq 0 \\ x & \text{per } 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

105. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione avente periodo $2\lambda = 10$:

$$f(x) = ax \quad 0 \leq x < 10 \quad a > 0$$

106. Sviluppare in serie di Fourier l'onda, costituita dai triangoli isosceli aventi base λ e altezza $h = a\lambda/2$, rappresentata in figura 4.17.1.

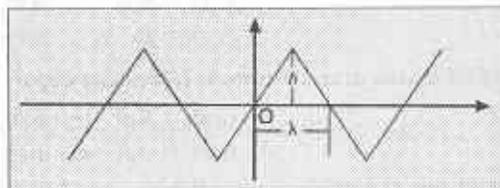


Fig. 4.17.1

Soluzioni degli esercizi proposti

103. Effettuando un prolungamento dispari di $f(x)$ si ha:

$$f_1(x) = \cos x \quad \text{in } 0 < x < \pi$$

$$f_1(x) = -\cos x \quad \text{in } -\pi < x < 0$$

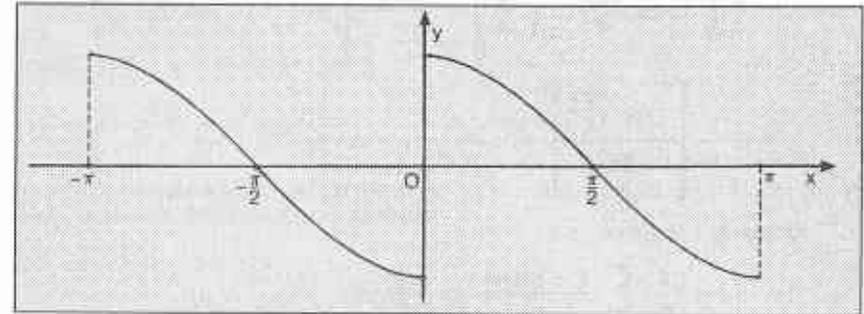


Fig. 4.17.2

e quindi i coefficienti dello sviluppo sono dati da:

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \text{sen} nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}(1+n)x + \text{sen}(n-1)x}{2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-\cos(1+n)\pi + 1}{1+n} + \frac{-\cos(n-1)\pi + 1}{n-1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos n\pi + 1}{1+n} + \frac{\cos n\pi + 1}{n-1} \right) = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ dispari} \\ \frac{4n}{\pi(n^2 - 1)} & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$$

Quindi per $0 < x < \pi$ si ha:

$$\cos x = \frac{4}{\pi} \left(\frac{2}{3} \text{sen} 2x + \frac{4}{15} \text{sen} 4x + \dots \right) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \text{sen} 2nx}{4n^2 - 1}$$

104. Il diagramma della funzione è quello rappresentato in fig. 4.17.3.

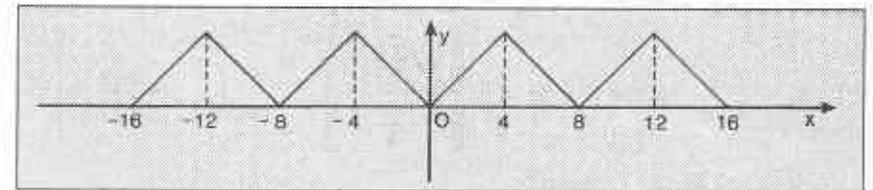


Fig. 4.17.3

Siccome la funzione è pari valgono le formule [4.16.2]:

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_0^4 x \, dx = 4$$

$$a_n = \frac{2}{4} \int_0^4 x \cos \frac{n\pi x}{4} \, dx = \frac{2}{4} \left(\left[\frac{x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}} \right]_0^4 - \frac{4}{n\pi} \int_0^4 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4} \, dx \right) =$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \left[\frac{-\cos \frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}} \right]_0^4 = -\frac{8}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi)$$

Quindi lo sviluppo è:

$$f(x) = 2 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{4} =$$

$$= 2 - \frac{16}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi}{4} x + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{4} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{4} + \dots \right)$$

nell'intervallo chiuso $(-4, 4)$ perché la funzione è continua.

105. Il diagramma della funzione è quello rappresentato in fig. 4.17.4.

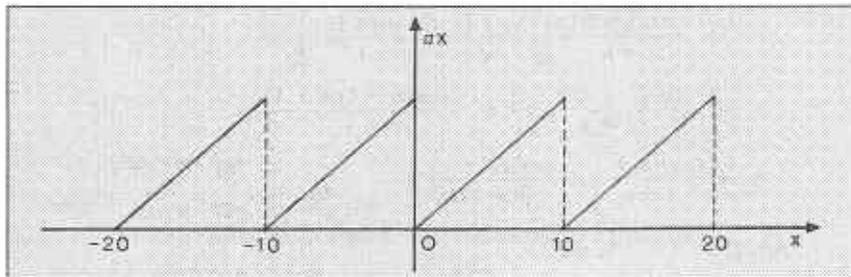


Fig. 4.17.4

In base alla proprietà delle funzioni periodiche (cfr. §4.12) si ha:

$$a_0 = \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\lambda} f(x) \, dx = \frac{1}{5} \int_0^{10} ax \, dx = 10a$$

$$a_n = \frac{1}{5} \int_0^{10} ax \cos \frac{n\pi x}{5} \, dx = \frac{a}{5} \left(\left[\frac{x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{5}}{\frac{n\pi}{5}} \right]_0^{10} - \frac{5}{n\pi} \int_0^{10} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{5} \, dx \right) =$$

$$= -\frac{5a}{n^2 \pi^2} \left[-\cos \frac{n\pi x}{5} \right]_0^{10} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{5} \int_0^{10} ax \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{5} \, dx = \frac{a}{5} \left(\left[\frac{-x \cos \frac{n\pi x}{5}}{\frac{n\pi}{5}} \right]_0^{10} + \frac{5}{n\pi} \int_0^{10} \cos \frac{n\pi x}{5} \, dx \right) =$$

$$= -\frac{10a}{n\pi}$$

Quindi per $0 < x < 10$ lo sviluppo è:

$$f(x) = 5a - \frac{10a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{5}$$

Per $x = 0$, estremo sinistro del campo di definizione della $f(x)$, la serie vale $5a$ cioè la media aritmetica dei limiti destro e sinistro:

$$\frac{10a + 0}{2}$$

Se consideriamo invece la funzione così definita:

$$\begin{cases} \varphi(x) = ax & \text{per } 0 < x < 10 \\ \varphi(x) = 5a & \text{per } x = 0 \\ \varphi(x) = 5a & \text{per } x = 10 \end{cases}$$

essa ha lo stesso sviluppo in serie della precedente che però in questo caso converge a $\varphi(x)$ in tutti i punti dell'intervallo chiuso $(0, 10)$.

106. Nell'intervallo $(0, \lambda)$ la spezzata si può definire con la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{\lambda}{2} \\ -ax + a\lambda & \text{per } \frac{\lambda}{2} < x \leq \lambda \end{cases}$$

per cui l'onda è una funzione periodica dispari, di periodo 2λ , sviluppabile in serie di seni.

$$\text{Si osservi che la derivata della funzione è: } \begin{cases} f'(x) = a & \text{in } (0, \lambda/2) \\ f'(x) = -a & \text{in } [\lambda/2, \lambda) \end{cases}$$

I coefficienti dello sviluppo sono allora:

$$b_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\lambda} \, dx = -\frac{2}{n\pi} \left(\left[f(x) \cos \frac{n\pi x}{\lambda} \right]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} f'(x) \cos \frac{n\pi x}{\lambda} \, dx \right) =$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \left(\left[f(x) \cos \frac{n\pi x}{\lambda} \right]_0^{\lambda} - \frac{\lambda}{n\pi} \left[f'(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\lambda} \right]_0^{\lambda} \right) =$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \left(\left[ax \cos \frac{n\pi x}{\lambda} \right]_0^{\lambda/2} + \left[(a\lambda - ax) \cos \frac{n\pi x}{\lambda} \right]_{\lambda/2}^{\lambda} + \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda}{n\pi} \left(\left[a \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\lambda} \right]_0^{\lambda/2} + \left[-a \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\lambda} \right]_{\lambda/2}^{\lambda} \right) \right) =$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \left[\frac{a\lambda}{2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{a\lambda}{2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{\lambda}{n\pi} \left(a \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + a \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{4a\lambda}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = \frac{8h}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

Si ha: $b_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n = 2k \\ \frac{8h}{n^2\pi^2} & \text{per } n = 4k + 1 \\ -\frac{8h}{n^2\pi^2} & \text{per } n = 4k + 3 \end{cases}$ con $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Lo sviluppo della funzione è quindi:

$$f(x) = \frac{8h}{\pi^2} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{\lambda} - \frac{1}{9} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{\lambda} + \frac{1}{25} \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{\lambda} - \dots \right)$$

4.18. Temi d'esame

107. Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^n (x - e)^n$ determinare il suo intervallo di convergenza precisandone il comportamento anche agli estremi di detto intervallo. Calcolare poi la somma di tale serie in tutto il suo intervallo di convergenza.

108. Determinare (nel piano x, y) il campo di convergenza della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+6}{2z-9j} \right)^n \quad (z = x + jy).$$

109. Trovare, per ogni determinazione di j^i , i cerchi di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{j^{i+n}} (z - e^{\frac{3}{2}\pi})^n \quad (z = x + jy)$$

e dire se esiste una determinazione di j^i per cui il corrispondente cerchio di convergenza risulti tangente all'asse y . In corrispondenza della determinazione principale di j^i precisare poi il carattere della serie nei punti di intersezione della circonferenza di convergenza con l'asse x .

110. Determinare (nel piano x, y) l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{n(z^2-1)} \quad (z = x + jy)$$

precisando se è aperto o chiuso. Dire poi dove la serie converge uniformemente.

111. Determinare il campo di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\operatorname{Th} z)^{2n+1}}{2n+1}$$

e disegnarlo nel piano di Gauss. Utilizzando una nota serie di Mac Laurin, calcolare, ove esiste, la somma della serie data.

112. Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n} \left(\frac{\sqrt{2}z+1}{z+\sqrt{2}} \right)^n$$

e disegnarlo nel piano x, y precisando se è aperto o chiuso.

113. Studiare, per $x \neq 0$ reale, il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x-1}{x^n}$$

e determinarne la somma nei punti di convergenza. Disegnare poi il grafico di tale somma e dire se la serie converge uniformemente nell'intervallo $(1, 2)$ (sì, no, perché).

114. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(x+1)^n}$$

determinare il carattere della serie per $x = 1$; dire se è lecito applicare il teorema di derivazione per serie nell'intervallo $(1, 2)$ e, in caso affermativo, calcolare la derivata della somma in $x = 1$.

115. Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}z+1}{z+\sqrt{2}} \right)^n \cdot \frac{1}{n^2}$

- a) determinare, nel piano x, y , l'insieme di convergenza;
- b) dire, giustificando la risposta, se la serie converge uniformemente nel quadrato T :

$$0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

116. Determinare nel piano x, y l'insieme di convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z+j}{1+j} \right)^n \quad (z = x + jy)$$

e precisare, in particolare, se $z = -1$ appartiene a tale insieme. Dire poi dove la serie converge uniformemente.

117. Determinare il campo di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(\frac{2n}{n+1} \right) \cdot \left(\frac{z-j-1}{2+j} \right)^n \quad (z = x + jy)$$

e dire se tale serie converge per $z = -1$. Indicare poi sull'asse immaginario un intervallo di convergenza uniforme.

118. Date le due serie

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\pi} \right)^n \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4 \operatorname{sen}^2 x)^n}{n+1}$$

- a) precisare gli insiemi di convergenza e di assoluta convergenza;
- b) dire per quali valori di x è lecito eseguirne il prodotto alla Cauchy;
- c) per tali valori di x scrivere la serie prodotto (scrivere esplicitamente l'espressione dei primi tre termini) e calcolarne la somma.

119. Verificare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nx-1}{n(nx+1)} = \varphi(x)$$

converge per $x = 2$, e che la serie delle derivate converge uniformemente in $(1, 3)$. Calcolare $\varphi'(2)$ (applicando il teorema di derivazione per serie) con un errore minore di 10^{-1} .

120. Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1} \left(\frac{z-2j}{j} \right)^n \quad (z = x + jy)$$

determinarne il cerchio di convergenza. Dire se la serie converge assolutamente nel punto $z = j$. Verificare che la serie converge nel punto $z = 5j/2$ e dare un valore approssimato della somma con un errore minore di 10^{-2} .

121. In quale insieme del piano x, y converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz^2} \quad (z = x + jy)$$

e quanto vale la sua somma? Dire inoltre dove tale somma è reale.

122. Utilizzando i noti teoremi sulle serie di potenze, studiare, per $0 < x < \pi$, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n} \left(\frac{1}{\sin x} - 1 \right)^n$$

determinando gli intervalli di convergenza semplice ed assoluta. Precisare se tali intervalli sono aperti o chiusi.

123. Determinare, nel piano di Gauss, il campo di convergenza della serie

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n + n} \left(\frac{z-8j}{z} \right)^n \quad (z = x + jy)$$

verificare che $\varphi(16j)$ è reale e calcolarla con un errore minore di 10^{-3} .

124. Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{1}{n} \left(\frac{e^z - 1}{e^z + 1} \right)^n$$

e disegnarlo nel piano di Gauss. Precisare inoltre il comportamento della serie anche sulla frontiera di tale insieme e determinare l'insieme di convergenza uniforme.

125. Data la serie trigonometrica: $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n!}$

- verificare che la somma $f(x)$ è continua su tutto l'asse reale e determinarne il periodo; dire inoltre dove essa è dotata di derivate prima e seconda continue utilizzando successivamente il teorema di derivazione per serie;
- ricordando una nota serie di potenze calcolare il valore di $f(x)$ per $x = 2k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) e disegnarne il grafico in un intorno di tali punti;

c) verificare infine che risulta $\int_0^m f(x) dx = m \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$

È lecito dedurre da questo che $f(x)$ non è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $(0, +\infty)$?

126. Determinare l'insieme (aperto) di convergenza della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+jn) \left(1 + \frac{z}{z} \right)^n \quad (z = x + jy, \bar{z} = x - jy)$$

e disegnarlo nel piano di Gauss.

127. Data la funzione $f(x)$ dispari, avente periodo 2π , definita ponendo $f(x) = x(x - \pi)$ per $0 \leq x \leq \pi$, disegnarne il grafico in $(-2\pi, 2\pi)$, e svilupparla in serie di Fourier calcolandone i coefficienti. Dire infine (giustificando i risultati) se la serie ottenuta converge semplicemente e uniformemente.

128. Data la funzione $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ per $0 \leq x \leq \pi$, pari, periodica di periodo 2π , disegnarne il grafico in $(-\pi, 3\pi)$. Svilupparla in serie di Fourier scrivendo l'espressione dei coefficienti e calcolandone i primi due. Dire infine, in base al teorema fondamentale, se la serie di Fourier converge in $(0, 2\pi)$ precisandone la somma in $x = 5\pi/4$.

129. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{per } 0 < x \leq \pi/2 \\ \sin x & \text{per } \pi/2 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

periodica di periodo 2π , disegnarne il grafico nell'intervallo $(-2\pi, 4\pi)$; scrivere la serie di Fourier ad essa associata indicando l'espressione dei coefficienti e calcolando a_0 e b_1 . Dire, in base al teorema fondamentale, se la serie scritta è convergente nei punti $x = \pi/2, x = 7\pi/3$. In caso affermativo precisarne la somma.

130. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{per } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{per } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

pari, periodica di periodo 2π , disegnarne il grafico nell'intervallo $(-\pi, 3\pi)$; scrivere la serie di Fourier associata indicando l'espressione dei coefficienti e calcolando a_0 . Dire (in base al teorema fondamentale) se si può affermare che la serie scritta è convergente nei punti $x = 0, x = \pi/2, x = 9\pi/4$. In caso affermativo precisarne la somma.

131. Disegnare nell'intervallo $(-3, 6)$ il grafico della funzione periodica dispari, di periodo 6, definita ponendo per $0 < x < 3$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{per } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{per } 2 < x < 3 \end{cases}$$

Riconoscere che esiste la serie di Fourier associata alla funzione data e scrivere tale serie indicando l'espressione dei coefficienti. Dire poi se la serie converge nei punti $0 \leq x \leq 3$ e in caso affermativo determinarne la somma.

132. Sia data la seguente funzione periodica di periodo 3:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ x-1 & \text{per } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Disegnarne il grafico nell'intervallo $(-3, 3)$, verificare che alla $f(x)$ è associabile una serie di Fourier, indicare inoltre l'espressione dei coefficienti di sviluppo, calcolandone il primo. In base al teorema fondamentale studiare la convergenza della serie nell'intervallo $[0, 3)$; dire infine nell'intorno di quali punti dell'intervallo $[0, 3)$ la $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor.

Soluzioni dei temi proposti

107. Posto $\frac{x-e}{e} = -t$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

cioè risulta, a meno del segno, lo sviluppo in serie di Mac Laurin della funzione $\log(1+t)$ (cfr. [2.11.1]). Quindi la serie data nell'intervallo $-1 < t \leq 1$, cioè:

$$-1 < \frac{e-x}{e} \leq 1 \rightarrow -e < e-x \leq e \rightarrow -2e < -x \leq 0 \rightarrow 0 \leq x < 2e$$

converge ed ha per somma:

$$S = -\log(1+t) = -\log\left(1 + \frac{e-x}{e}\right) = -\log \frac{2e-x}{e} = \log e - \log(2e-x) = 1 - \log(2e-x)$$

In particolare, nell'estremo $x=0$ la somma risulta $S = -\log 2$; nell'altro estremo $x=2e$ la serie diverge.

108. Posto $\frac{z+6}{2z-9j} = t$

la serie data diventa $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ cioè una serie geometrica convergente, come è noto, per $|t| < 1$. Il campo di convergenza è quello per cui è:

$$\left| \frac{z+6}{2z-9j} \right| < 1 \rightarrow |x+jy+6| < |2x+2jy-9j|$$

$$(x+6)^2 + y^2 < 4x^2 + (2y-9)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 12y + 15 > 0$$

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 - 25 > 0$$

cioè è l'insieme dei punti esterni al cerchio avente centro nel punto di coordinate $x_0 = 2$ e $y_0 = 6$ e raggio $R = 5$.

109. È una serie di potenze (cfr. §4.5). Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left| \frac{(z - e^{\frac{3}{2}\pi})^{n+1}}{j^{1+n}} \cdot \frac{j^{1+nj}}{(z - e^{\frac{3}{2}\pi})^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z - e^{\frac{3}{2}\pi})}{j} \right|$$

Perché la serie converga questo limite deve essere minore di 1, cioè:

$$\left| z - e^{\frac{3}{2}\pi} \right| < |j| = \left| e^{j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \right| = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

Quindi ad ogni valore di k corrisponde un cerchio di convergenza della serie avente

centro nel punto di coordinate $x_0 = e^{\frac{3}{2}\pi}$ e $y_0 = 0$ e raggio $R = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$

Poiché tutte le circonferenze di convergenza hanno il centro sull'asse x , quella di esse tangente all'asse y deve avere il raggio uguale all'ascissa del centro:

$$\frac{3}{2}\pi = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

$$\frac{3}{2}\pi = -\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \rightarrow k = -1$$

La determinazione principale di j^j si ha per $k=0$; in tale caso l'equazione della circonferenza di convergenza è:

$$\left| x + jy - e^{\frac{3}{2}\pi} \right| = e^{-\frac{\pi}{2}} \rightarrow (x - e^{\frac{3}{2}\pi})^2 + y^2 = e^{-\pi}$$

e le sue intersezioni con l'asse x si ottengono ponendo $y=0$:

$$x - e^{\frac{3}{2}\pi} = \pm e^{-\frac{\pi}{2}} \begin{cases} x_1 = e^{\frac{3}{2}\pi} + e^{-\frac{\pi}{2}} \\ x_2 = e^{\frac{3}{2}\pi} - e^{-\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

Per $z = x_1$ e $z = x_2$ la serie data dà luogo alle seguenti due serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n e^{-\frac{\pi}{2}n}}{j^{1+nj}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n e^{-\frac{\pi}{2}n}}{e^{j\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}n}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n$$

nessuna delle quali è convergente; infatti $\sum_{n=0}^{\infty} (+1)^n$ è divergente in quanto ha il termine generale che non tende a zero e $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ è indeterminata in quanto ha le somme parziali che non ammettono limite ($s_0 = 1, s_1 = 0, s_2 = 1, \dots$).

110. Posto $t = e^{z^2-1}$ ci si riconduce ad una serie di potenze del tipo [4.3.1]. Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{t^{n+1} n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}} t^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{3}{2}} |t| = |t|$$

Per $|t| < 1$ tale limite è < 1 e la serie espressa nella variabile t ha raggio di convergenza $R = 1$; per il teorema di Abel (cfr. §2.1) la serie è uniformemente convergente all'interno di tale cerchio. Per trovare l'insieme di convergenza e di uniforme convergenza della serie data risolviamo la disequazione:

$$|t| = |e^{z^2-1}| < 1 \rightarrow |e^{x^2-y^2+2jxy-1}| < 1 \rightarrow e^{x^2-y^2-1} < 1 \rightarrow x^2 - y^2 - 1 < 0$$

Pertanto tale insieme è la regione aperta compresa tra i due rami dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$

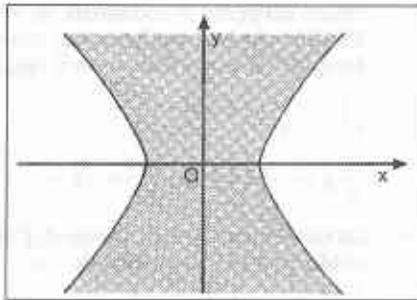
Nei punti $|t| = 1$ della circonferenza di convergenza, che corrispondono ai punti dell'iperbole, la serie dei moduli diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che è la serie aritmetica generalizzata con $p = \frac{3}{2} > 1$, convergente.

Quindi l'insieme di convergenza è chiuso, quello di uniforme convergenza aperto.

Fig. 4.18.1



111. Posto $Thz = t$ la serie data diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} (-1)^n$$

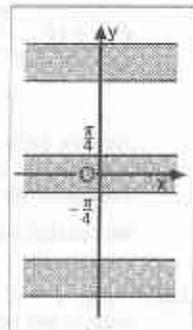
che è lo sviluppo in serie di $\operatorname{arctg} t$ il cui raggio di convergenza è $R = 1$ (cfr. es. 20). La serie data converge per

$$|Thz| \leq 1 \rightarrow \left| \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \right| \leq 1 \rightarrow |e^{2z} - 1| \leq |e^{2z} + 1|$$

$$\begin{aligned} |e^{2x}(\cos 2y + j \operatorname{sen} 2y) - 1| &\leq |e^{2x}(\cos 2y + j \operatorname{sen} 2y) + 1| \\ (e^{2x} \cos 2y - 1)^2 + e^{4x} \operatorname{sen}^2 2y &\leq (e^{2x} \cos 2y + 1)^2 + e^{4x} \operatorname{sen}^2 2y \\ -2e^{2x} \cos 2y &\leq 2e^{2x} \cos 2y \\ 4e^{2x} \cos 2y &\geq 0 \\ \cos 2y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{e quindi per } -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq y \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Fig. 4.18.2



112. Posto $\frac{\sqrt{2}z + 1}{z + \sqrt{2}} = t$ la serie data diventa la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n \log^2 n}$$

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{t^{n+1}}{(n+1) \log^2(n+1)} \frac{n \log^2 n}{t^n} \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \frac{\log^2 n}{\log^2(n+1)} |t| = |t|$$

Quindi la serie converge per $|t| < 1$, da cui:

$$\left| \frac{\sqrt{2}z + 1}{z + \sqrt{2}} \right| < 1 \rightarrow |\sqrt{2}x + j\sqrt{2}y + 1| < |x + jy + \sqrt{2}|$$

$$(\sqrt{2}x + 1)^2 + 2y^2 < (x + \sqrt{2})^2 + y^2 \rightarrow x^2 + y^2 < 1$$

cioè la serie converge all'interno del cerchio di raggio unitario e centro nell'origine. Per $|t| = 1$ la serie dei moduli diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$$

che è convergente in quanto:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n \log^2 n}{(n+1) \log^2(n+1)} < 1$$

(si osservi che il limite del rapporto dà 1 e quindi il criterio del rapporto, applicato in tal senso sarebbe inefficace. Cfr. P.29, §3.4) per cui la serie data converge anche sulla circonferenza di convergenza.

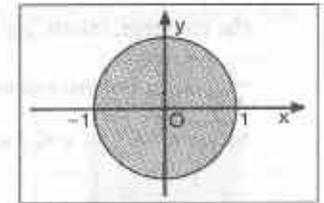


Fig. 4.18.3

113. La serie data può essere scritta

$$(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

Quale serie geometrica di ragione $\frac{1}{x}$ essa converge per

$$\left| \frac{1}{x} \right| < 1 \rightarrow x < -1, x > 1$$

e ha per somma:

$$S = (x-1) \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = (x-1) \frac{x}{x-1} = x \quad [4.18.1]$$

Per $x = 1$ tutti i termini della serie si annullano e quindi la serie ha somma zero, mentre la [4.18.1] è definita per $x \neq 1$.

La somma è quindi discontinua e la serie non può essere uniformemente convergente in $(1, 2)$, come in ogni altro intervallo che contenga $x = 1$ (cfr. §1.7, N.B.). Per $x = -1$ la serie è indeterminata perché la successione delle somme parziali non ammette limite (si ha infatti: $s_0 = -2, s_1 = 0, s_2 = -2, s_3 = 0, \dots$).

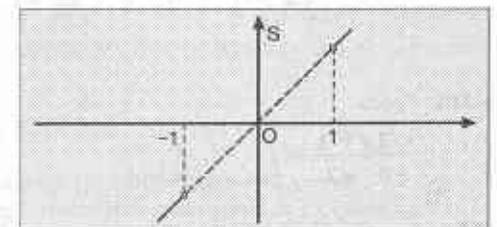


Fig. 4.18.4

Quale serie di potenze diverge per

$$\left| \frac{1}{x} \right| > 1 \rightarrow -1 < x < 1$$

Il grafico delle somme è quello riportato in fig. 4.18.4.

114. Per $x = 1$ la serie diventa la seguente serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$$

che converge, infatti, per il criterio del confronto, si ha:

$$\frac{1}{n 2^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad [= \text{termine generale serie geometrica di ragione } \frac{1}{2} < 1]$$

Siccome per $1 \leq x \leq 2$ si ha

$$\frac{1}{n(x+1)^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

la serie di funzioni è convergente nell'intervallo $(1, 2)$. In tale intervallo le funzioni $u_n(x)$ hanno derivate

$$u_n'(x) = -\frac{1}{(x+1)^{n+1}}$$

continue e la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^{n+1}}$$

è uniformemente convergente per il teorema di Weierstrass (cfr. §1.5), in quanto

$$\left| \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right| < \frac{1}{2^n}$$

per cui (cfr. §1.9) risulta lecita la derivazione per serie che dà:

$$S'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^{n+1}}$$

$$S'(1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = -\left(-\frac{3}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right) = -\left[-\frac{3}{2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{1}{2}$$

115. Posto

$$\frac{\sqrt{2}z+1}{2+\sqrt{2}} = t$$

la serie data diventa la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2}$

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{t^{n+1} n^2}{(n+1)^2 t^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 |t| = |t|$$

Quindi la serie converge per $|t| < 1$, da cui (vedi es. 112) $x^2 + y^2 < 1$, cioè la serie converge all'interno del cerchio di raggio unitario con centro nell'origine.

Per $|t| = 1$ la serie dei moduli diventa la serie armonica generalizzata con $p = 2 > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che è convergente; la serie data converge perciò anche sulla circonferenza di convergenza. Per il criterio di convergenza uniforme di Weierstrass (cfr. §§ 1.5, 4.2) la serie data è uniformemente convergente nel cerchio chiuso; infatti:

$$\left| \frac{\sqrt{2}z+1}{z+\sqrt{2}} \right|^n \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad [= \text{termine generale serie convergente}]$$

Si osservi che il quadrato T ha un vertice sulla circonferenza di convergenza (vedi fig. 4.18.5) cioè appartiene al cerchio di convergenza, quindi al suo interno la serie converge uniformemente.

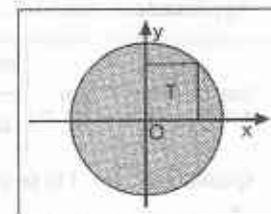


Fig. 4.18.5

116. Posto

$$\frac{z+j}{1+j} = t$$

la serie data diventa la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} t^n$$

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{t^{n+1} n^2}{(n+1)^2 t^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 |t| = |t|$$

Quindi per $|t| < 1$ la serie converge. Siccome per $|t| = 1$ la serie dei moduli è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad [= \text{serie armonica generalizzata con } p = 2 > 1, \text{ convergente}]$$

si può affermare che la serie data è assolutamente convergente per $|t| \leq 1$, per cui si ha:

$$|t| = \left| \frac{z+j}{1+j} \right| \leq 1 \rightarrow |x+jy+j| \leq |1+j| \rightarrow x^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

Quindi l'insieme di convergenza è il cerchio chiuso di raggio $\sqrt{2}$ e centro nel punto di coordinate $x_0 = 0, y_0 = -1$; esso interseca l'asse x nei punti ± 1 e quindi $z = -1$ appartiene all'insieme. Per il criterio di Weierstrass (cfr. §§ 1.5, 4.2) in tale insieme la serie è uniformemente convergente; infatti si ha:

$$\left| \frac{1}{n^2} \frac{z+j}{1+j} \right| \leq \frac{1}{n^2} [= \text{termine generale di serie convergente}]$$

117. Posto

$$\frac{z-j-1}{2+j} = t$$

la serie diventa la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(\frac{2n}{n+1} \right) t^n$$

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\log \frac{2n+2}{n+2} t^{n+1}}{\log \frac{2n}{n+1} t^n} \right| = \frac{\log 2}{\log 2} |t| = |t|$$

Quindi per $|t| < 1$ la serie converge; siccome per $|t| = 1$ la serie dei moduli diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{2n}{n+1}$$

che diverge perché il suo termine generale non tende a zero (il limite è $\log 2$) si può affermare che la serie data è assolutamente convergente per $|t| < 1$, da cui si ha:

$$\left| \frac{z-j-1}{2+j} \right| < 1 \rightarrow |x+jy-j-1| < |2+j| \rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 < 5$$

Quindi l'insieme di convergenza è il cerchio aperto di raggio $\sqrt{5}$ e centro nel punto di coordinate $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

$z = -1$, cioè $x = -1$, $y = 0$, è un punto della circonferenza di convergenza e quindi non appartiene all'insieme di convergenza.

La circonferenza di convergenza interseca l'asse immaginario nei punti:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 1 + (y-1)^2 = 5 \rightarrow y_1 = -1, y_2 = 3$$

per cui l'intervallo (aperto) di convergenza uniforme è $[-1, 3]$.

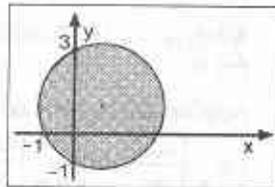


Fig. 4.18.6

118. La serie A è geometrica di ragione $\frac{x}{\pi}$ per cui è assolutamente (e quindi anche semplicemente) convergente per $\left| \frac{x}{\pi} \right| < 1 \rightarrow -\pi < x < \pi$ e ha per somma

$$S_A = \frac{1}{1 - \frac{x}{\pi}}$$

Posto $4 \sin^2 x = t$ la serie B diventa la serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n+1}$$

assolutamente convergente per $|t| < 1$, infatti, per il criterio del rapporto, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{t^{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{t^n} \right| = |t|$$

Vediamo ora il comportamento della serie B agli estremi dell'intervallo di convergenza e cioè per $t = 1$ e per $t = -1$.

Per $t = 1$ la serie B diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots [= \text{serie armonica a segni alterni, semplicemente converg.}]$$

Per $t = -1$ la serie B diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} [= \text{serie armonica (divergente)}]$$

In conclusione la serie B è semplicemente convergente per $-1 < t \leq 1$, cioè per

$$-1 < 4 \sin^2 x \leq 1 \rightarrow \sin^2 x \leq \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{\pi}{6} \leq x + k\pi \leq \frac{\pi}{6} \text{ con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

e assolutamente convergente per $-1 < t < 1$, cioè per

$$-1 < 4 \sin^2 x < 1 \rightarrow -\frac{\pi}{6} < x + k\pi < \frac{\pi}{6}$$

La somma della serie B vale 1 per $t = 0$ (cioè per $x = k\pi$); negli altri punti dell'intervallo $[-1, 1)$ e quindi per $-\frac{\pi}{6} \leq x + k\pi \leq \frac{\pi}{6}$ si ha:

$$\begin{aligned} S_B &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n+1} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} (-1)^n = \frac{1}{t} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r} (-1)^{r-1} = [\text{cfr. [2.11.1]}] = \\ &= \frac{1}{t} \log(1+t) = \frac{\log(1+4 \sin^2 x)}{4 \sin^2 x} \end{aligned}$$

Il prodotto delle due serie è lecito negli intervalli in cui esse sono entrambe convergenti ed almeno una delle due lo è assolutamente.

Detta C la serie prodotto, con riferimento alla fig. 4.18.7, si ha che è possibile effettuare il prodotto negli intervalli:

$$-\pi < x \leq -\frac{5}{6}\pi \quad -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \quad \frac{5}{6}\pi \leq x < \pi$$

nei quali la serie prodotto C risulta convergente.

In particolare negli intervalli:

$$-\pi < x < -\frac{5}{6}\pi \quad -\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} \quad \frac{5}{6}\pi < x < \pi$$

la serie C risulta assolutamente convergente.

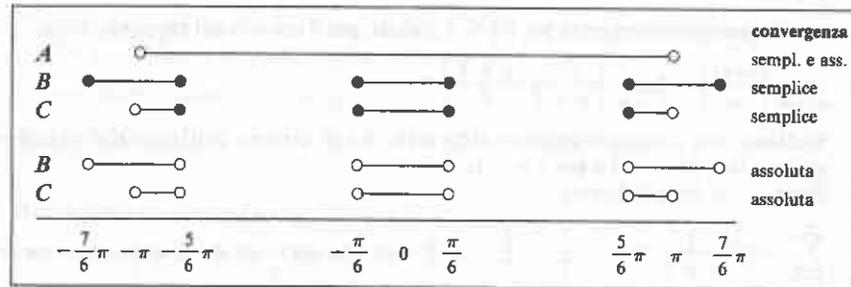


Fig. 4.18.7

La serie prodotto ha per somma S_C il prodotto $S_A \cdot S_B$ per $x \neq k\pi$ e vale $S_A \cdot 1$ per $x = k\pi$. I suoi primi tre termini sono (cfr. P.29, §2.7):

$$c_0 = a_0 b_0 = 1$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = -2 \operatorname{sen}^2 x + \frac{x}{\pi}$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = \frac{16}{3} \operatorname{sen}^4 x - \frac{2x}{\pi} \operatorname{sen}^2 x + \frac{x^2}{\pi^2}$$

119. Per $x = 2$ la serie data diventa la serie numerica a segni alterni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{n(2n+1)}$$

la quale, essendo verificate entrambe le condizioni del teorema di Leibnitz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n(2n+1)} = 0 \quad \text{e} \quad u_n \geq u_{n+1} \quad (1)$$

risulta convergente.

La serie delle derivate è:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(nx+1)^2}$$

Applicando il criterio di Weierstrass, nell'intervallo $1 \leq x \leq 3$, si ha:

$$\left| (-1)^n \frac{2}{(nx+1)^2} \right| < \frac{2}{n^2} = 2 \cdot (\text{termine generale serie armonica generalizzata con } p > 1, \text{ convergente})$$

La serie delle derivate risulta perciò uniformemente convergente.

(1) Cioè la funzione è decrescente per qualunque n intero maggiore di 1. Infatti, detta

$$f(n) = \frac{2n-1}{n(2n+1)} \quad \text{è} \quad f'(n) = \frac{-4n^2 + 4n + 1}{n^2(2n+1)^2} < 0$$

Poiché il punto $x = 2$ è interno all'intervallo di uniforme convergenza della $\varphi(x)$, per il teorema di derivazione per serie si ha che la derivata della somma è uguale alla serie delle derivate:

$$\varphi'(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n+1)^2}$$

Si tratta ancora di una serie a segni alterni. Vediamo per quale valore di n risulta $u_n < 10^{-1}$ (1):

$$\frac{2}{(2n+1)^2} < 10^{-1} \rightarrow 20 < (2n+1)^2 \rightarrow n > \frac{\sqrt{20}-1}{2} < 2$$

Se si approssima quindi $f'(2)$ con la somma parziale $s_1 = u_0 + u_1 = \frac{2}{9}$ si commette un errore inferiore a 10^{-1} .

120. Posto

$$\frac{z-2j}{j} = t$$

la serie data diventa la serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1} t^n$$

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{(n+1)^3+1} t^{n+1} \frac{n^3+1}{n t^n} \right| = |t|$$

Quindi per $|t| < 1$ la serie converge.

Per $|t| = 1$ la serie dei moduli

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

è convergente, infatti, per il criterio del confronto, si ha:

$$\frac{n}{n^3+1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \quad [\text{= termine generale serie armonica generalizzata con } p > 1, \text{ convergente}]$$

Quindi la serie data converge assolutamente per $|t| \leq 1$, cioè per:

$$\left| \frac{z-2j}{j} \right| \leq 1 \rightarrow |z-2j| \leq 1$$

L'insieme di convergenza è perciò il cerchio chiuso avente il centro nel punto di coordinate $x_0 = 0, y_0 = 2j$ e raggio unitario.

Siccome i punti $z = j$ e $z = \frac{5}{2}j < 3j$ appartengono al

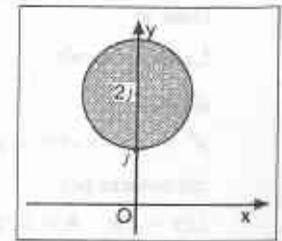


Fig. 4.18.8

(1) Cfr. P.29, Serie numeriche, §4.1, punti a) e b).

cerchio, in essi la serie è assolutamente (e quindi semplicemente convergente).
Per $z = \frac{5}{2}j$ la serie data diventa la serie numerica a segni alterni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3 + 1} \frac{1}{2^n}$$

la cui somma approssimata richiesta si ha per:

$$u_n = \frac{n}{n^3 + 1} \frac{1}{2^n} < 10^{-2}$$

Si ha: $u_1 = \frac{1}{4} > 10^{-2}$

$$u_2 = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{18} > 10^{-2}$$

$$u_3 = \frac{3}{28} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{224} > 10^{-2}$$

$$u_4 = \frac{4}{65} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{230} < 10^{-2}$$

Quindi la somma parziale

$$s_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = \dots = \frac{643}{2016}$$

si discosta dalla somma della serie per meno di 10^{-2} .

121. Posto $e^z = t$ la serie data diventa la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

che converge per $|t| < 1$ e ha somma $\frac{1}{1-t}$; dalla condizione $|t| < 1$ si ha:

$$|e^z| = |e^{x^2 - y^2 + 2jxy}| = e^{x^2 - y^2} < 1 \text{ per } x^2 - y^2 < 0 \rightarrow (x-y)(x+y) < 0$$

cioè la serie converge nella regione aperta delimitata dalle bisettrici degli assi e contenente l'asse y .

La somma vale $\frac{1}{1-e^z}$ ed è reale se tale è e^z ;

siccome

$$e^z = e^{x^2 - y^2} \cdot e^{2jxy} = e^{x^2 - y^2} (\cos 2xy + j \sin 2xy)$$

ciò avviene per

$$2xy = k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

cioè nei punti dell'asse y e nei punti delle iperboli equilateri appartenenti alla regione aperta sopra indicata.

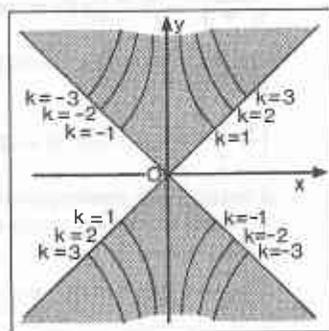


Fig. 4.18.9

122. Posto $\frac{1}{\sin x} - 1 = t \rightarrow t \geq 0$

la serie data diventa la serie di potenze:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{\log n}$$

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{t^{n+1}}{\log(n+1)} \cdot \frac{\log n}{t^n} \right| = t$$

quindi per $0 \leq t < 1$ la serie converge assolutamente.

Per $t = 1$ la serie diventa numerica a segni alterni:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$$

e, in accordo con il teorema di Leibnitz, converge perché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{\log(n+1)} < \frac{1}{\log n} = u_n$$

In conclusione la serie è assolutamente convergente per $0 \leq t < 1$ e semplicemente convergente per $0 \leq t \leq 1$.

In funzione di x si ha:

$$0 \leq \frac{1}{\sin x} - 1 < 1$$

Trascurando la disequazione di sinistra in quanto ovvia ($\sin x \leq 1$ sempre), si ha:

$$\frac{1}{\sin x} < 2 \rightarrow \sin x > \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6} \pi$$

cioè la serie data è assolutamente convergente nell'intervallo aperto $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6} \pi \right]$ ed è semplicemente convergente nell'intervallo chiuso $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6} \pi \right)$.

123. Posto

$$\frac{z - 8j}{z} = t$$

la serie data diventa la serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n + n} t^n$$

il cui raggio di convergenza è $R = 3$; infatti per il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n}{3^{n+1} + n + 1} |t| = \frac{1}{3} |t|$$

La serie è quindi assolutamente (ed anche semplicemente) convergente per

$$\frac{1}{3}|z| < 1 \rightarrow |z| < 3$$

cioè per:

$$\left| \frac{z-8j}{z} \right| < 3 \rightarrow |z-8j| < 3|z| \rightarrow |x+jy-8j| < 3|x+jy|$$

$$x^2 + (y-8)^2 < 9(x^2 + y^2) \rightarrow x^2 + y^2 + 2y - 8 > 0$$

$$x^2 + (y+1)^2 > 9$$

ossia il campo di convergenza è all'esterno della circonferenza di raggio 3 e di centro in $x_0 = 0, y_0 = -1$.

Siccome il punto $z = 16j$ appartiene al campo, la serie data è in esso convergente; la sua espressione diventa:

$$\varphi(16j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n + n} \left(\frac{16j-8j}{16j} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(3^n + n)}$$

che è una serie a termini reali positivi e quindi con somma S reale.

Ricordando che $S = s_n + R_n$ per determinare S con l'approssimazione richiesta bisogna trovare un $R_n < 10^{-3}$. Si ha:

$$R_n = \frac{1}{2^{n+1}(3^{n+1} + n + 1)} + \frac{1}{3^{n+2}(3^{n+2} + n + 2)} + \dots < \frac{1}{6^{n+1}} + \frac{1}{6^{n+2}} + \frac{1}{6^{n+3}} + \dots =$$

$$= \frac{1}{6^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) = \frac{1}{6^{n+1}} \cdot (\text{serie geometrica con } q = \frac{1}{6} < 1) =$$

$$= \frac{1}{6^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{5 \cdot 6^n}$$

Se quindi è $\frac{1}{5 \cdot 6^n} < 10^{-3}$ a maggior ragione è $R_n < 10^{-3}$. Si ha:

$$\frac{1}{5 \cdot 6^n} < 10^{-3} \rightarrow 6^n > 200 \rightarrow n \geq 3$$

e la somma approssimata è data da:

$$s_3 = \sum_{n=0}^3 u_n = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{44} + \frac{1}{240} = \frac{3041}{2640}$$

124. Posto

$$\frac{e^{z^2} - 1}{e^{z^2} + 1} = t$$

la serie data diventa la serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{1}{n} t^n$$

il cui raggio di convergenza è $R = 1$; infatti per il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{1}{n+1} t^{n+1}}{\frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{1}{n} t^n} \right| = |t|$$

e quindi la serie converge per $|t| < 1$.

Vediamo ora cosa succede sulla frontiera. Siccome per $|t| = 1$ la serie dei moduli diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$$

i cui termini possono essere maggiorati con i termini $\frac{1}{n^2}$ della serie armonica generalizzata con $p = 2 > 1$, si può affermare che la serie data è convergente per $t \leq 1$ e quindi anche sulla circonferenza di convergenza.

Siccome per $|t| \leq 1$ si ha:

$$\left| \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{1}{n} t^n \right| < \frac{1}{n^2}$$

per il criterio di Weierstrass la serie data è uniformemente convergente nel cerchio chiuso $|t| \leq 1$, da cui si deduce:

$$|t| = \left| \frac{e^{z^2} - 1}{e^{z^2} + 1} \right| \leq 1 \rightarrow |e^{z^2} - 1| \leq |e^{z^2} + 1|$$

e passando alla forma trigonometrica:

$$|e^{x^2-y^2} (\cos 2xy + j \operatorname{sen} 2xy) - 1| \leq |e^{x^2-y^2} (\cos 2xy + j \operatorname{sen} 2xy) + 1|$$

$$|(e^{x^2-y^2} \cos 2xy - 1) + j(e^{x^2-y^2} \operatorname{sen} 2xy)| \leq |(e^{x^2-y^2} \cos 2xy + 1) + j(e^{x^2-y^2} \operatorname{sen} 2xy)|$$

$$(e^{x^2-y^2} \cos 2xy - 1)^2 + (e^{x^2-y^2} \operatorname{sen} 2xy)^2 \leq (e^{x^2-y^2} \cos 2xy + 1)^2 + (e^{x^2-y^2} \operatorname{sen} 2xy)^2$$

$$4e^{x^2-y^2} \cos 2xy \geq 0 \rightarrow \cos 2xy \geq 0$$

ossia la serie data è assolutamente e uniformemente convergente nell'insieme

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq xy \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$$

con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

che nel piano di Gauss è rappresentato dalla zona in grigio della fig. 4.18.10.

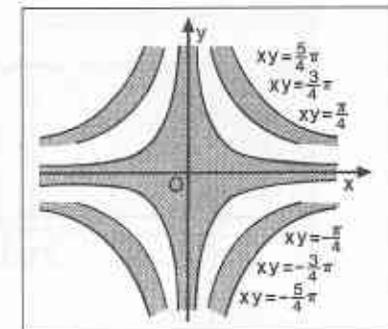


Fig. 4.18.10

125. a) Poiché per ogni x si ha:

$$\left| \frac{\cos n\pi x}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}$$

la serie data è uniformemente convergente su tutto l'asse reale per il criterio di Weierstrass; siccome le funzioni $\frac{\cos n\pi x}{n!}$ sono continue, la somma $f(x)$ della serie data è continua su tutto l'asse reale (cfr. §1.7). Poiché la serie è costituita da funzioni periodiche aventi periodo $T = 2$ (1), anche la somma $f(x)$ ha lo stesso periodo.

Per poter applicare il teorema di derivazione per serie (cfr. §1.9) dobbiamo dimostrare che le serie delle derivate prime e seconde sono uniformemente convergenti; tali serie sono rispettivamente:

$$-\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{(n-1)!} \quad -\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi x}{(n-1)!}$$

e risultano uniformemente convergenti per il criterio di Weierstrass, in quanto si ha:

$$\left| \frac{\sin n\pi x}{(n-1)!} \right| \leq \frac{1}{(n-1)!} \quad [= \text{termine generale di serie convergente}]$$

$$\left| \frac{n \cos n\pi x}{(n-1)!} \right| \leq \frac{n}{(n-1)!} \quad [= \text{termine generale di serie convergente}]$$

Allora possiamo affermare che le due serie convergono uniformemente su tutto l'asse reale alle due funzioni continue $f'(x)$ e $f''(x)$.

- b) Il grafico di $f(x)$ per $x = 2k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) si deduce dalle seguenti considerazioni:

$$f(2k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \quad [\text{valore della funzione per } k = 0, \pm 1, \dots] \quad (2)$$

$$f'(2k) = 0 \quad [\text{punto di stazionarietà della funzione}]$$

$$f''(2k) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} < 0 \quad [\text{punto di massimo relativo}]$$

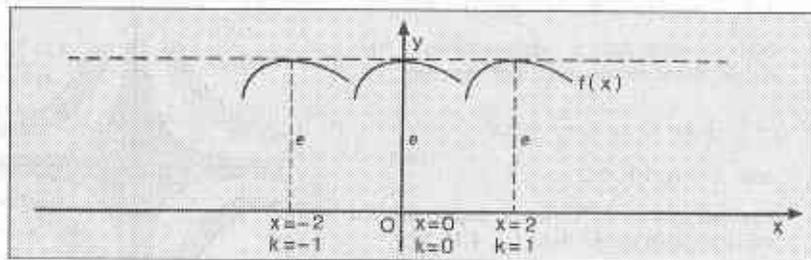


Fig. 4.18.11

- c) Poiché la $f(x)$ soddisfa alle condizioni di integrabilità (cfr. §1.8) ed è una funzione periodica (cfr. §4.12), si ha:

(1) Infatti $\cos\{n\pi(x+2)\} = \cos(n\pi x + 2n\pi) = \cos n\pi x$

(2) Si ricordi lo sviluppo in serie di e^x per $x = 1$.

$$\begin{aligned} \int_m^{m+2} f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n!} \right) dx = \\ &= \int_0^2 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^2 \frac{\cos n\pi x}{n!} dx = 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

Siccome, poi, la funzione è pari si ha:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = \dots = \int_{m-1}^m f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = 1 \quad [\text{valore medio di } f(x) \text{ in } T]$$

e quindi

$$\int_0^m f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = \dots = \int_{m-1}^m f(x) dx = m \cdot 1 = m$$

$$\text{Poiché } \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^m f(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} m = +\infty$$

si può concludere che non esiste l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx$$

126. Posto

$$1 + \frac{z}{z} = t$$

la serie data diventa la serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + jn) t^n$$

il cui raggio di convergenza è $R = 1$; infatti per il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + (n+1)j}{1 + nj} \frac{t^{n+1}}{t^n} \right| = |t|$$

ed il limite risulta ovviamente minore di 1 per $|t| < 1$.

Vediamo come si trasforma il cerchio di convergenza $|t| < 1$ nel piano di Gauss:

$$|t| = \left| 1 + \frac{z}{z} \right| < 1 \rightarrow |\bar{z} + z| < |z|$$

$$|x - jy + x + jy| < |x - jy|$$

$$4x^2 < x^2 + y^2$$

$$y^2 > 3x^2$$

$$y < -\sqrt{3}|x| \text{ e } y > \sqrt{3}|x|$$

L'insieme di convergenza è quello in grigio nella figura 4.18.12.

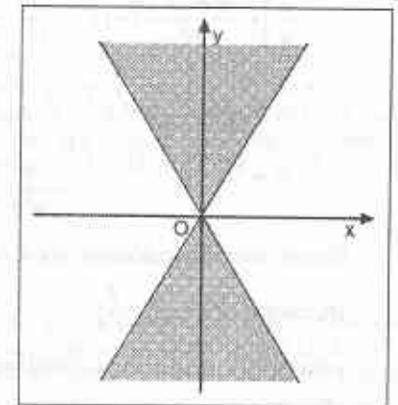


Fig. 4.18.12

127. Il diagramma della funzione nell'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$ è quello rappresentato in fig. 4.18.13.

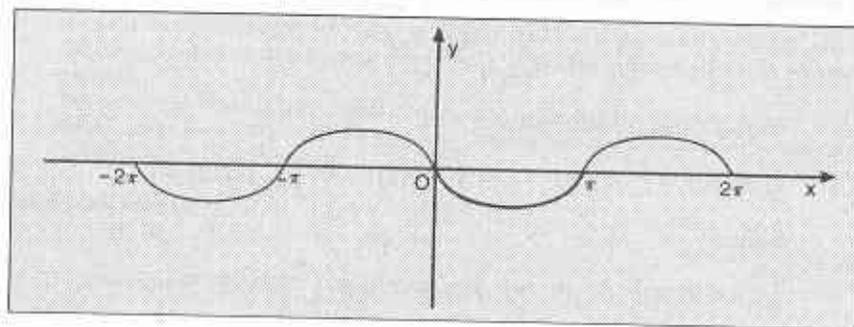


Fig. 4.18.13

Poiché la funzione è continua insieme con la sua derivata prima, è possibile scrivere la serie di Fourier ad essa associata che, essendo la funzione $f(x)$ dispari, sarà costituita da una serie di soli seni:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

Calcoliamo i coefficienti b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(x - \pi) \operatorname{sen} nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} nx \, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi x \operatorname{sen} nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{2x}{n^2} \operatorname{sen} nx - \frac{n^2 x^2 - 2}{n^3} \cos nx \right]_0^{\pi} - 2 \left[\frac{1}{n^2} \operatorname{sen} nx - \frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{n^2 \pi^2 - 2}{n^3} (-1)^n - \frac{2}{n^3} \right] - 2 \left[-\frac{\pi}{n} (-1)^n \right] = \\ &= -\frac{2\pi}{n} (-1)^n + \frac{4}{n^3 \pi} (-1)^n - \frac{4}{n^3 \pi} + \frac{2\pi}{n} (-1)^n = \\ &= \frac{4}{n^3 \pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ -\frac{8}{n^3 \pi} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

Osserviamo che, qualunque sia n , è:

$$|b_n \operatorname{sen} nx| \leq |b_n| \leq \frac{8}{n^3 \pi}$$

e che la serie numerica a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^3 \pi}$$

è convergente in quanto $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^3}{(n+1)^3} < 1$ (criterio di D'Alembert).

Si può concludere pertanto che la serie di Fourier associata alla funzione data è semplicemente ed uniformemente convergente.

128. Il grafico della funzione nell'intervallo $(-\pi, 3\pi)$ è rappresentato in fig. 4.18.14.

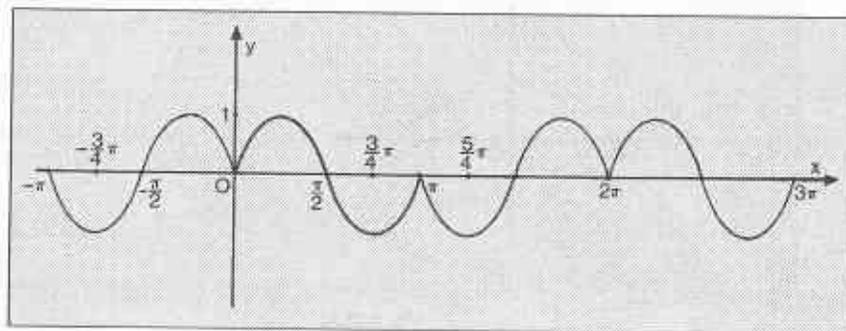


Fig. 4.18.14

Poiché la $f(x)$ nell'intervallo $(-\pi, 3\pi)$ è generalmente continua e dotata di derivata destra e sinistra in ogni punto, può essere sviluppata in serie di Fourier. Inoltre, essendo la funzione pari, nello sviluppo mancheranno i termini in seno, cioè saranno nulli tutti i coefficienti b_n . La serie è del tipo:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

I primi due coefficienti dello sviluppo sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2x \, dx = 0$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2x \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx = -\frac{4}{3\pi} [\cos^3 x]_0^{\pi} = \frac{8}{3\pi}$$

Nell'intervallo $(0, 2\pi)$ la $f(x)$, oltre che continua, è derivabile tranne che nei punti $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$. In questi punti, però, esistono finite le pseudoderivate destre e sinistre (che coincidono con le rispettive derivate):

$$f'(0+0) = 2$$

$$f'(\pi-0) = 2 \quad f'(\pi+0) = -2$$

$$f'(2\pi-0) = -2$$

e quindi, in base al teorema fondamentale (cfr. §4.11), la serie converge in tutto l'intervallo. In particolare la sua somma è $f(x)$ negli intervalli aperti $[0, \pi]$ e $[\pi, 2\pi]$ ed è zero nei punti $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$ (media dei limiti destro e sinistro in ciascun punto).

Quindi il punto $x = \frac{5}{4}\pi$ cade nel suddetto intervallo di convergenza e la somma

della serie di Fourier in esso vale (1):

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = f\left(\frac{5}{4}\pi - 2\pi\right) = f\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin \frac{3}{2}\pi = -1$$

129. Il grafico della funzione nell'intervallo $(-2\pi, 4\pi)$ è rappresentato in fig. 4.18.15.

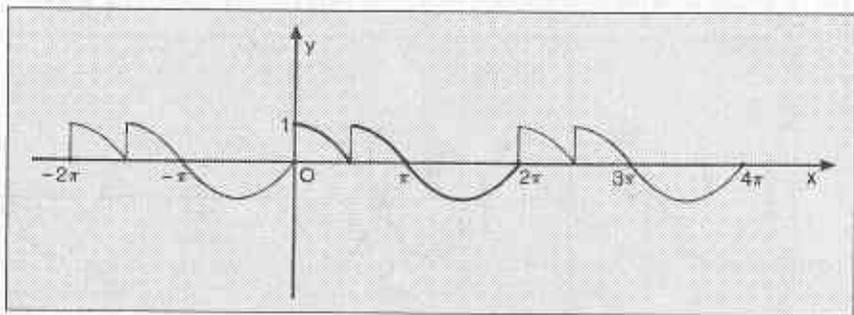


Fig. 4.18.15

Poiché la $f(x)$ soddisfa le condizioni del teorema fondamentale, può essere sviluppata in serie di Fourier. Non trattandosi di funzione pari né di funzione dispari, lo sviluppo conterrà sia termini in seno che termini in coseno:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dove i coefficienti a_n e b_n hanno le seguenti espressioni:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{2\pi} \sin x \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{2\pi} \sin x \sin nx \, dx$$

In particolare si ha:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{2\pi} \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} [\sin x]_0^{\pi/2} - \frac{1}{\pi} [\cos x]_{\pi/2}^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \sin x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin^2 x \right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_{\pi/2}^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} + \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2\pi} + \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

(1) Si osservi che la $f(x)$ è definita in $(0, \pi)$ e $5\pi/4$ cade al di fuori di questo intervallo. Per determinare il valore della funzione in tale punto bisogna riportarsi all'intervallo di definizione sfruttando le caratteristiche della funzione, nel nostro caso la periodicità di 2π ed il fatto che essa è pari.

Vediamo cosa succede nei punti $x = \pi/2$ e $x = 7\pi/3$.

In $x = \pi/2$ la funzione $f(x)$ presenta una discontinuità di prima specie. Poiché in tal punto esistono finite le pseudoderivate destra e sinistra:

$$f^*(\pi/2) = -1$$

$$f^*(\pi/2) = 0$$

per il teorema fondamentale possiamo affermare che la serie è ivi convergente e la sua somma vale:

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

In $x = 7\pi/3$ la funzione è continua insieme con la sua derivata prima, pertanto la serie è convergente e la sua somma vale:

$$f\left(\frac{7}{3}\pi\right) = f\left(\frac{7}{3}\pi - 2\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

130. Il grafico della funzione $f(x)$ nell'intervallo $(-\pi, 3\pi)$ è rappresentato nella fig. 4.18.16.

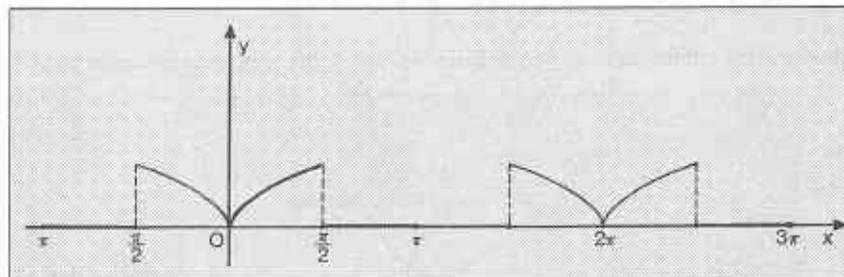


Fig. 4.18.16

Poiché la funzione assegnata soddisfa le condizioni del teorema fondamentale, può essere sviluppata in serie di Fourier. Inoltre, essendo la funzione pari, nello sviluppo mancheranno i termini in seno, cioè sono nulli i coefficienti b_n :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

dove i coefficienti a_n hanno l'espressione seguente:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{x} \cos nx \, dx$$

In particolare si ha:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{3\pi} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Vediamo ora cosa succede nei tre punti $x = 0$, $x = \pi/2$, $x = 9\pi/4$.

In $x = 0$ la funzione è continua ma non derivabile, quindi non si può dire nulla per quanto riguarda la convergenza della serie.

In $x = \pi/2$ la funzione presenta una discontinuità di prima specie e poiché esistono le pseudoderivate destra e sinistra:

$$f^*\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

$$f^*\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

possiamo affermare (teorema fondamentale) che in $x = \pi/2$ la serie converge e la sua somma è data da:

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

In $x = 9\pi/4$ la funzione è continua insieme con la sua derivata prima, pertanto la serie è convergente e la sua somma vale:

$$f\left(\frac{9}{4}\pi\right) = f\left(\frac{9}{4}\pi - 2\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

131. Il grafico della funzione $f(x)$ nell'intervallo $(-3, 6)$ è rappresentato nella fig. 4.18.17.

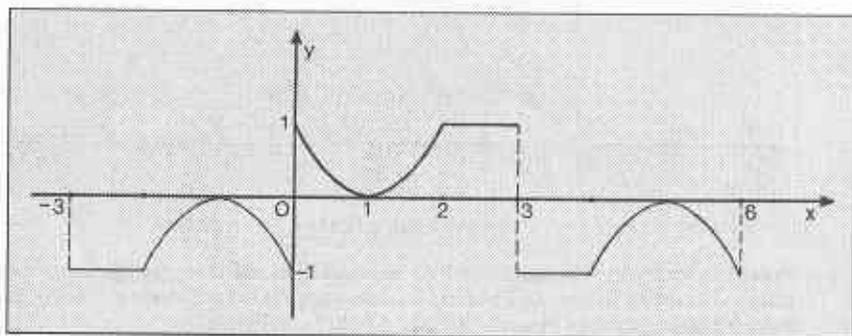


Fig. 4.18.17

Poiché la $f(x)$ in $(-3, 3)$ soddisfa le condizioni del teorema fondamentale, può essere sviluppata in serie di Fourier. Inoltre, poiché la funzione è dispari, lo sviluppo conterrà solo termini in seno:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3}$$

dove i coefficienti b_n hanno l'espressione:

$$b_n = \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{2}{3} \int_0^2 (x-1)^2 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} dx + \frac{2}{3} \int_2^3 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} dx$$

Esaminiamo l'intervallo $(0, 3)$. Negli intervalli aperti $[0, 2]$ e $[2, 3]$ la $f(x)$ è continua e derivabile, pertanto in detti intervalli la serie converge a $f(x)$.

In $x = 2$ esistono le derivate destra e sinistra della $f(x)$:

$$f'(2+0) = 0$$

$$f'(2-0) = 2$$

pertanto la serie è ivi convergente e la sua somma vale $f(2) = 1$.

In $x = 0$ e in $x = 3$ la $f(x)$ presenta discontinuità di prima specie. Poiché esistono le pseudoderivate destra e sinistra:

$$f^*(0) = f^*(0) = -2$$

$$f^*(3) = f^*(3) = 0$$

la serie risulta convergente anche in questi due punti e la sua somma vale zero.

132. Il grafico della funzione $f(x)$ nell'intervallo $(-3, 3)$ è rappresentato in fig. 4.18.18.

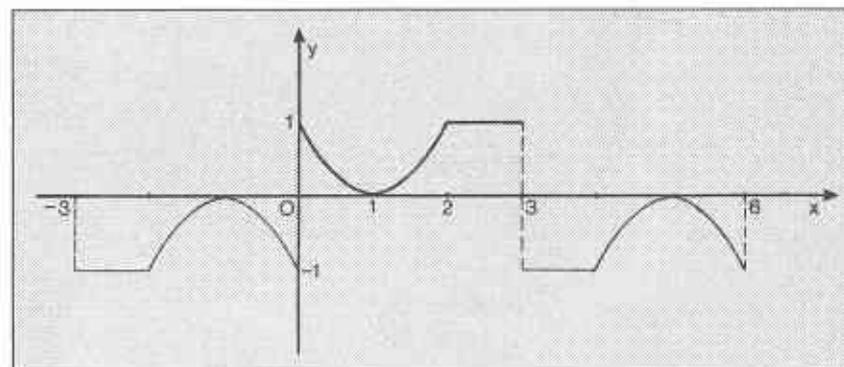


Fig. 4.18.18

I coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della $f(x)$ sono:

$$a_0 = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \frac{2}{3} \int_1^3 (x-1) dx = \frac{7}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{2n\pi x}{3} dx + \frac{2}{3} \int_1^3 (x-1) \cos \frac{2n\pi x}{3} dx$$

$$b_n = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{3} dx + \frac{2}{3} \int_1^3 (x-1) \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{3} dx$$

La serie di Fourier associata è data da:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{3} + b_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{3} \right)$$

Il punto $x = 3$ non soddisfa le condizioni del teorema fondamentale perché non esiste finita la pseudoderivata destra.

Il punto $x = 1$ è di discontinuità di prima specie; esistono finite le pseudoderivate destra e sinistra, quindi la serie è convergente ed ha per somma:

$$\frac{f(1-0) + f(1+0)}{2} = \frac{1}{2}$$

Negli altri punti di $[0, 3]$ la serie converge a $f(x)$.

In qualunque intervallo (a, b) con $0 < a \leq x \leq b < 1$ e (c, d) con $1 < c \leq x \leq d < 3$ la $f(x)$ soddisfa le condizioni per il suo sviluppo in serie di Taylor (cfr. §2.9).



61 IL MOTO IN UNA DIMENSIONE. Problemi
58 problemi conducono ad una conoscenza approfondita su velocità, accelerazione, moto armonico semplice.

62 IL MOTO IN DUE E TRE DIMENSIONI. Problemi
86 problemi conducono ad una conoscenza approfondita su vettori, moto di un proiettile, moto circolare uniforme, moti relativi, composizione dei movimenti.

63 LE FORZE E IL MOTO. Problemi
79 problemi conducono ad una conoscenza approfondita sulle leggi di Newton, le loro applicazioni, le forze in generale, i moti conseguenti.

64 LAVORO ED ENERGIA. Problemi
85 problemi conducono ad una conoscenza approfondita di lavoro, potenza, energia, sistemi conservativi.

65 QUANTITÀ DI MOTO ED ENERGIA NELLA FISICA CLASSICA E NELLA FISICA MODERNA. Problemi
118 problemi conducono ad una conoscenza approfondita di quantità di moto, energia e loro conservazione nella teoria classica e in quella relativistica.

66 CINEMATICA E DINAMICA ROTAZIONALE. Problemi
84 problemi conducono ad una conoscenza approfondita del moto traslatorio, rotatorio e rototraslatorio dei corpi rigidi.

67 EQUILIBRIO DEI CORPI RIGIDI. Problemi
52 problemi conducono ad una conoscenza approfondita della statica dei corpi.

68 LE OSCILLAZIONI. Problemi
37 problemi conducono ad una conoscenza approfondita dei moti oscillatori.

69 LA GRAVITAZIONE. Problemi
42 problemi conducono ad una conoscenza approfondita della gravitazione e dei moti di pianeti e satelliti.

70 I FLUIDI. Problemi
65 problemi conducono ad una conoscenza approfondita della statica e della dinamica dei fluidi.

71 LE ONDE. Problemi
65 problemi conducono alla conoscenza del moto ondulatorio in generale e, in particolare, delle onde sonore.

72 LA TEMPERATURA NEI SOLIDI, NEI LIQUIDI E NEI GAS. Problemi
70 problemi conducono alla conoscenza della temperatura e ai suoi effetti, macroscopici e microscopici, su solidi e fluidi.

73 LA TERMODINAMICA. Problemi
114 problemi conducono alla conoscenza del primo e del secondo principio della termodinamica e delle loro applicazioni.

74 L'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE. Teoria ed esercizi
33 esercizi sulle applicazioni lineari o non lineari dell'amplificatore operazionale. Dopo una rapida e completa descrizione delle proprietà dell'amplificatore (reale e ideale), si introduce il suo schema equivalente distinguendo tra zona di linearità e saturazione. Si risolvono quindi, tra i circuiti retrorazionali contenuti l'amplificatore operazionale, quelli più comunemente usati, vale a dire derivatori, integratori, combinatori lineari, comparatori, ... e i temi di esame più impegnativi proposti ai corsi di elettronica e teoria dei circuiti. Della maggior parte dei circuiti proposti vengono calcolate le impedenze di ingresso e uscita e la funzione di trasferimento in forma complessa, rappresentandone i diagrammi di Bode.

75 ELETTROSTATICA. Teoria ed esercizi
87 esercizi sui principi fondamentali dell'elettrostatica. Una prima parte è dedicata allo studio dei campi scalari e vettoriali introducendo le proprietà dei campi conservativi, irrotazionali, solenoidali. Si passa quindi alla risoluzione dei temi d'esame riguardanti il campo elettrico e il potenziale delle più svariate distribuzioni discrete e continue di carica, gli strati e doppi strati di carica, i gusci sferici, l'energia elettrostatica di sistemi di cariche distribuite o puntiformi.

76 GEOMETRIA DELLE MASSE E GEOMETRIA DELLE AREE. Esercizi
10 esercizi svolti sia graficamente che numericamente, preceduti da una parte introduttiva, per la piena comprensione dell'elisse e del nocciolo centrale d'inerzia.

77 CONDENSATORI. Teoria ed esercizi
58 esercizi riguardanti gli argomenti comunemente richiesti (e non solo) nei temi d'esame di Elettrostatica sui condensatori, piani, sferici, cilindrici; del calcolo della carica e/o differenza di potenziale ai capi di condensatori collegati tra loro nel modo più svantaggiato allo studio delle variazioni di energia causate dall'isolamento totale o parziale, tra le loro armature, di lastre di uno o più dielettrici e/o di lamina metalliche, distinguendo a seconda che tali operazioni vengano effettuate a carica o a potenziale costante. Vengono infine risolti problemi relativi alla scarica elettrica che può capitare nel dielettrico interposto tra le armature di un condensatore e sulla rigidità dielettrica.

78 LE STRUTTURE ISOSTATICHE. Esercizi
32 esercizi svolti completamente, per la piena comprensione delle strutture isostatiche e dei diagrammi di sollecitazione, preceduti da una parte introduttiva.

79 LA DEFORMAZIONE DELLE STRUTTURE. Esercizi
25 esercizi svolti con più metodi: la linea elastica, i corollari di Mohr, il Principio dei Lavori Virtuali, il principio di sovrapposizione degli effetti, considerazioni intuitive sul comportamento strutturale, per una piena comprensione del calcolo delle deformazioni.

80 MATEMATICA FINANZIARIA. Volume primo
100 esercizi svolti e considerazioni teoriche per illustrare in modo efficace la capitalizzazione, semplice e composta, il concetto di tasso equivalente, i diversi tipi di sconto e il confronto tra essi, la scindibilità, una rassegna esemplare dei diversi tipi di rendita, gli indici finanziari più importanti (duration, scadenza media finanziaria, dollar duration, real convexity) e l'applicazione di essi a una successione di incassi o di esborsi.

43 MANUALE PRATICO PER LA RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI
Sono sinteticamente esaminati gli argomenti implicati nella risoluzione dei problemi di Scienza delle Costruzioni: strutture isostatiche ed iperstatiche; cedimenti di vincoli e dilatazioni termiche; diagrammi delle azioni interne in strutture con carichi distribuiti.

44 TERMODINAMICA DELLE REAZIONI CHIMICHE. Parte prima
47 esercizi ed esempi concernenti l'energia interna di un sistema, la capacità termica delle sostanze e l'entalpia associata ad una trasformazione termodinamica.

45 TERMODINAMICA DELLE REAZIONI CHIMICHE. Parte seconda
51 esempi ed esercizi concernenti entropia, energia libera, costanti di equilibrio.

46 ACIDI E BASI. Parte prima
79 esercizi ed esempi concernenti il calcolo del pH di acidi e basi forti; acidi e basi deboli monovalenti; acidi poliprotici; basi poliacide; anfotili.

47 ACIDI E BASI. Parte seconda
79 esercizi ed esempi concernenti l'idrolisi, le soluzioni tampone, le miscele di acidi e basi, gli acidi e le basi in solventi non acquosi.

48 CIRCUITI ELETTRICI IN CORRENTE CONTINUA. Parte prima
33 esercizi sulle reti elettriche lineari per illustrare i principi di Kirchhoff, il principio di sovrapposizione degli effetti, i teoremi di Thevenin, Norton e Millman, il metodo dei potenziali ai nodi, il metodo delle correnti cicliche, il principio di dualità, i teoremi di reciprocità e di sostituzione.

49 CIRCUITI ELETTRICI IN CORRENTE CONTINUA. Parte seconda
41 esercizi concernenti la potenza elettrica di un bipolo, le perdite ed il rendimento di un sistema; la risoluzione di circuiti elettrici contenenti generatori pilotati; lo studio di reti contenenti resistori non lineari e diodi ideali.

50 CIRCUITI ELETTRICI IN CORRENTE ALTERNATA
65 esercizi concernenti la risoluzione di reti elettriche in regime sinusoidale e l'utilizzo dei diagrammi vettoriali; potenze e teorema di Boucherot; rendimento di una linea elettrica in regime sinusoidale e rifasamento del carico.

51 LIMITI E CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI. Esercizi
44 esempi ed esercizi risolti per mostrare vari metodi di calcolo di limiti di funzioni di più variabili reali; per risolvere problemi inerenti alla continuità in un punto ed al prolungamento per continuità di funzioni di due variabili reali.

52 ESERCITAZIONI DI ANALISI CHIMICA DEI PRODOTTI ALIMENTARI
54 esperimenti pratici di laboratorio: analisi centesimale; analisi del latte e dei formaggi, delle bevande analcoliche, dei vini e degli oli; analisi strumentale: spettrofotometria UV e di assorbimento atomico e di emissione; cromatografia liquida ad alta pressione; gascromatografia; metodi elettrochimici.

53 INTRODUZIONE AI PROCESSI STOCASTICI: LE CATENE DI MARKOV
12 esercizi e numerosi esempi per meglio comprendere le catene di Markov, modello matematico naturale per molti fenomeni fisici, biologici, economici e sociali. I processi di Markov si ritrovano nella pianificazione a breve e a lungo termine di una produzione industriale di complessi interdipendenti.

54 ELETTROCHIMICA. Esercizi
31 esempi ed esercizi completamente svolti, concernenti la conducibilità degli elettroliti; le leggi di Faraday e i processi elettrolitici; gli equilibri di ossidoriduzione e i potenziali elettronici; il calcolo della f.e.m. di cella.

55 LA TRASFORMATTA DI LAPLACE. Parte prima. Proprietà e applicazioni
40 esempi per descrivere l'uso della trasformata di Laplace nell'analisi dei sistemi differenziali lineari e stazionari, in risposta a segnali di ingresso anche non causali. L'integrale di definizione viene applicato ad un unico esempio da cui poi, applicando elegantemente le proprietà, si deducono le trasformate dei segnali più comuni. Come istante iniziale nell'integrale di definizione e nella formula di derivazione viene specificato $t=0^-$, anziché semplicemente $t=0$, illustrando nei dettagli le conseguenze che derivano da tale precisazione.

56 LA TRASFORMATTA DI LAPLACE. Parte seconda. La funzione di trasferimento
23 esempi di calcolo della funzione di trasferimento per sistemi fisici di vario genere, elettrici e non. Partendo dal significato di funzione di trasferimento si arriva alla descrizione delle sue proprietà e ai metodi di rappresentazione grafica, ovvero i diagrammi di Bode, i diagrammi polari e quelli di Nyquist.

57 DOPPI E MULTI-BIPOLI
49 esercizi sulla risoluzione delle reti in continua e alternata utilizzando la rappresentazione di circuiti a 2 o n porte. Vengono descritte le matrici caratteristiche e le trasformazioni di rappresentazione per un doppio bipolo, i circuiti equivalenti e i possibili collegamenti tra doppi bipoli. Una particolare attenzione è dedicata ai circuiti contenenti il trasformatore ideale e il doppio bipolo induttivo. Infine, per i multi-bipoli, viene introdotta la matrice delle ammettenze indefinite che permette di calcolare molto velocemente, partendo dai parametri di un (n-1)-polo ricavato da un n-polo in cui si è definito un morsetto come riferimento, i parametri di un qualunque altro (n-1)-polo ottenuto sempre dallo stesso n-polo cambiando però la scelta del morsetto di riferimento.

58 STUDIO AVANZATO DELLE FUNZIONI. Parte prima. I quesiti da esame più impegnativi
95 esempi. Dopo una rapida descrizione dei grafici delle funzioni elementari più comuni si descrive come, con semplici traslazioni, simmetrie, e applicazioni di valori assoluti, si possa ricondurre a semplici modifiche di tali grafici lo studio delle proprietà di funzioni anche di notevole complessità. Viene poi approfondito il metodo di studio di una funzione facendo opportuni richiami ai teoremi della teoria e affrontando i problemi più difficili richiesti in sede di esame scelti tra i temi di analisi I.

59 STUDIO AVANZATO DELLE FUNZIONI. Parte seconda. Scomposizione in sequenze di operatori
85 esempi per capire come il grafico di una funzione viene modificato dall'applicazione degli operatori più comuni, tipo reciproco, esponenziale, radice, logaritmo, potenza, ... e per saper riconoscere le sequenze di tali operatori nell'espressione di una funzione da esame risalendo al suo grafico solamente tramite le loro proprietà.

60 STUDIO AVANZATO DELLE FUNZIONI. Parte terza. Composte e primitive
36 esempi. Nella prima sezione viene illustrato il metodo di composizione che permette di rappresentare il grafico di una funzione da esame quando risulta composta da una sequenza di operatori di espressione qualsiasi (non necessariamente tra quelli trattati nella Parte seconda), studiando solamente le proprietà degli operatori componenti. Segue una sezione dedicata alla risoluzione dei quesiti più richiesti nei temi d'esame riguardanti la deduzione, dal grafico di una funzione, dell'andamento di una sua primitiva, cioè le modifiche che l'operatore INTEGRALE apporta al diagramma di una assegnata funzione.

L'elenco aggiornato dei volumi della Collana Esami è disponibile nel sito:
www.edizionitecnos.it

In esso potrai anche trovare informazioni dettagliate circa il contenuto di ciascun volume: indice degli argomenti, numero di pagine, prezzo di copertina. Potrai inoltre scaricare sul tuo computer l'ultima versione del *Catalogo* in formato pdf.