ESERCIZI SULLE SERIE NUMERICHE

1)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\cdot \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ ⇒ la serie è a term positivi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\text{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

⇒ la serie diverge positivamente

---

2)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n \, 2^{\frac{4n}{3}}$$

$a_n = \left(2\sqrt[3]{2}\right)^n$ il criterio di Leibnitz non va bene e neanche quello dell'assoluta converg.

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$s_{2n} \to +\infty$

$s_{2n+1} \to -\infty$

considero i termini negativi e positivi pari e dispari

la serie è indeterminata

---

3)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n \cdot (\text{sen}\,\alpha)^n = (-1\cdot \text{sen}\,\alpha)^n$$

serie geometrica di ragione $-\text{sen}\,\alpha$

SE ⇒ converg

$|-\text{sen}\,\alpha| = |\text{sen}\,\alpha| < 1 \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ converge

sempre tranne quando è = 1

$-\text{sen}\,\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ div. pos.

$-\text{sen}\,\alpha = -1 \Rightarrow$ oscillante

ESERCIZI SULLE SUCCESSIONI DI FUNZIONI

$(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ $\qquad X = \underbrace{X_m}_{\text{dominio}} = \mathbb{R}$ bisogna studiare a parte la funzione in 0 $f_m(0)$

1) $f_m(x) = \dfrac{mx}{1+m^2x^2}$, $m\in\mathbb{N}$

- Insieme di convergenza

$x_0 \in \mathbb{R}$, $?\exists \lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x_0) = ?$

$\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{mx_0}{1+m^2x_0^2}$?

$x_0 = 0 \quad \lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{0}{1} = 0$

$x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{mx_0}{1+m^2x_0^2} = 0$

$\Rightarrow X' = \mathbb{R}$ (insieme di convergenza)

$f \equiv 0$ conv. punt a 0 in tutto $\mathbb{R}$

$f_m \overset{?}{\underset{c.u.}{\rightrightarrows}} f \equiv 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{m\to+\infty} \sup\limits_{x\in X} |f_m(x) - f(x)| = 0$

$\lim\limits_{m\to+\infty} \sup\limits_{x\in X} |f_m(x) - \overset{=0}{f(x)}| = \lim\limits_{m\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x)| =$ la f_m è pari $\Rightarrow$ considero solo $[0,+\infty[$, in cui è positiva $\Rightarrow$ tolgo le | |

$= \lim\limits_{m\to+\infty} \left(\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} f_m(x)\right)$

$m\in\mathbb{N} \quad f_m(0) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = 0$ asintoto orizzontale

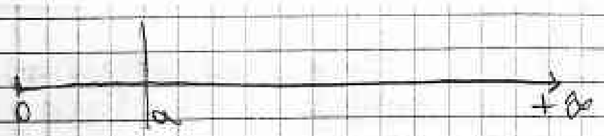
vedo la crescenza

$f_m'(x) = \dfrac{m(1+m^2x^2) - mx(2m^2x)}{(1+m^2x^2)^2} = \dfrac{m+m^3x^2-2m^3x^2}{(1+m^2x^2)^2} = \dfrac{m-m^3x^2}{(1+m^2x^2)^2}$

$1+m^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{m^2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{m}; \; x = \dfrac{1}{m}$ max

$f_m\left(\dfrac{1}{m}\right) = \dfrac{m\cdot\frac{1}{m}}{1+m^2\cdot\frac{1}{m^2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \neq 0$

$\Rightarrow$ non ho conv unif su tutto $\mathbb{R}$



$A=[0,a]$ $a>0$

$f_n \overset{?}{\rightrightarrows} 0$ in A non è uni ~~conv~~ perchè il sup è $\frac{1}{2}$

$A=[a,+\infty[$

$\sup\limits_{x\in A} f_n(x) = \frac{na}{1+n^2a^2} \to 0$ $a>1$

è uniforme in $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$

• 17/10/2005

2) $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$

dominio; pari o dispari; cont punt e l'insieme di conv X e in X

Studiare la convergenza uniforme

Studiare la validità o meno del passaggio al lim sotto il segno d'integrale

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx \overset{?}{=} \int_{-1}^{1}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx$$

• dominio

$1+n^2x^2 \neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

• $f_n(-x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2} = f_n(x) \Rightarrow$ si tratta di funzioni pari e continue ✱

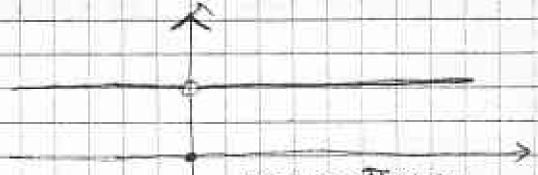
• convergenza puntuale

$x_0 \in]0,+\infty[$

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2x_0^2}{1+n^2x_0^2} = 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x_0 = 0 \quad f_n(0) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{0}{1} = 0$ succ. costante $= 0$

$f_n \xrightarrow{p} \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x\in]0,+\infty[\end{cases}$



non continua ✱

• convergenza uniforme

$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \overset{?}{=}$

$f_n'(x) = \dfrac{2n^2x(1+n^2x^2) - (n^2x^2)\cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \dfrac{2n^2x(1+n^2x^2-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = \dfrac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$

$f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x>0$

$\Rightarrow f_n$ non può convergere in alcun intervallo che contiene 0 $\Rightarrow]-\delta,\delta[\quad \delta\in\mathbb{R}^+$ ✱ , per il Teo sulla continuità

$f_n \rightrightarrows f$ in $[a,+\infty[\quad a>0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[} \left|f_n(x) - f(x)\right| = 0$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} - 1\right| = \left|\frac{\cancel{n^2x^2} - 1 - \cancel{n^2x^2}}{1+n^2x^2}\right| = \frac{1}{1+n^2x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\overset{\sup}{\frac{1}{1+a^2n^2}}\right) = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\lim_{1>\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \overset{=1}{f(x)}\,dx =$$

$$2\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\left[x\right]_\varepsilon^1\right) = 2\lim_{\varepsilon\to0^+}(1-\varepsilon) = 2$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}\,dx = 2\int_0^1\frac{n^2x^2+1-1}{1+n^2x^2}\,dx = 2\int_0^1\left(1 - \frac{1}{n^2x^2+1}\right)dx =$$

$$2\left(\int_0^1 1\,dx - \int_0^1\frac{1}{n^2x^2+1}\,dx\right) = 2 - 2\int_0^1\frac{1}{n^2x^2+1}\,dx$$

$t = nx$

$t_0 = 0$

$t_1 = n$

sostituzione di T.

$dt = n\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow -\frac{2}{n}\int_0^n\frac{1}{1+t^2}\,dt = -\frac{2}{n}\left[\operatorname{arctg} t\right]_0^n$$

$$\Rightarrow\left(\int_{-1}^{1} f_n\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(2 - \frac{2}{n}\operatorname{arctg} n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2 - \underbrace{\frac{2}{n}\overset{\text{limitata}}{\operatorname{arctg} n}}_{\to0}\right) = 2$$

ESERCIZI SULLE SERIE DI FUNZIONI

$$f = \lim_{m\to+\infty} s_m = \lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$$

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} f_m \overset{u}{=} f \overset{def.}{\iff} s_m \rightrightarrows f$$

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} f_m \text{ c.a.} \overset{def.}{\iff} \sum |f_m| \text{ conv punt}$$

c.a. $\Rightarrow$ c.p.

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} |f_m(x)|,\ |f_m(x)| \le M_m \ge 0\ \forall x\in X,\ \sum_{m\in\mathbb{N}} M_m \text{ conv} \Rightarrow f_m \text{ u.c.}$$

• Studiare la serie e, se possibile, determinare la f somma

3) $$\sum_{m=0}^{+\infty} e^{mx}$$

determinare il termine n-esimo e il dominio di qst funzioni

$$f_m(x) = \underset{>0}{e^{mx}} \quad \forall m\in\mathbb{N} \qquad D = x\in\mathbb{R}$$

vediamo come si comporta la succ generatrice

non conv per la c.n.

$$\lim_{m\to+\infty} f_m(x_0) = \lim_{m\to+\infty}\begin{cases} e^{mx_0} & x_0>0 \\ 1 & x_0=0 \\ \dfrac{1}{e^{m|x_0|}} & x_0<0 \end{cases} = \begin{pmatrix} +\infty \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

conv può esserlo solo per qsti x

$x \in]-\infty, 0[$

serie geom di ragione $\frac{1}{e^{|x|}}$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} e^{mx} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{m|x|}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(e^{|x|})^m} = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e^{|x|}}\right)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} (e^{x})^m =$$

$$= \frac{1}{1-e^{x}}$$

di solito si usa la conv tot

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\sup_{x\in]-\infty,0[}\left|f(x) - \overbrace{\sum_{k=0}^{m} f_k(x)}^{s_m}\right|\right)$$

$$\sum_{k=0}^{m} f_k(x) = 1 + e^{x} + e^{2x} + \ldots + e^{mx} = \frac{1-e^{x(m+1)}}{1-e^{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in]-\infty,0[}\left|\frac{1}{1-e^x}-\frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}\right|\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in]-\infty,0[}\left\|\frac{e^{(n+1)x}}{1-e^{\underset{\to 0}{x<0}}}\right\|\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\sup\frac{e^{(n+1)x}}{1-e^x}\right)$$

$N \to$ cresce
$D \to$ dec $\Rightarrow e^{(n+1)x} \nearrow$ e $\frac{1}{1-e^x}\nearrow$

$\Rightarrow \sup = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{(n+1)x}}{1-e^x}$ per il teo sulle funzioni

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(+\infty) = +\infty \neq 0 \quad \text{non c.u.}$$

considero un intervallo $]-\infty,a]$ $a<0$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in]-\infty,a]}\frac{e^{(n+1)x}}{1-e^x}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{(n+1)a}}{1-e^a}\right)=0$$

24.10.2005

Studiare la serie

4/ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5\,\mathrm{sen}(n^2x)}{n\sqrt{n}}$ è dispari

è possibile derivarla e integrarla termine a termine?

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5\,\mathrm{sen}(n^2x)}{n\sqrt{n}} = 0$$

$f_n(x) = \frac{5\,\mathrm{sen}(n^2x)}{n\sqrt{n}} = 0$ Dom $= \mathbb{R}\setminus\{0\}$

ESERCIZI SULLE SERIE DI POTENZE

$x_0 - \rho,\ x_0 + \rho$ serie di ...

$$\begin{cases} f_n : x \in \mathbb{R} \rightarrow a_n(x-x_0)^n & a_n \in \mathbb{R} : (x-x_0)^0 = 1 \\ \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n (x-x_0)^n & \text{polinomio di grado } n \text{ per } n \to +\infty \end{cases}$$

- Studiare l'insieme di convergenza di

5) $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{\sqrt{n}} \cdot x^n$ $\qquad a_n = n^{\sqrt{n}}$

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{\sqrt{n}}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 1$$

$x^\alpha = e^{\alpha \log x}$

$n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \overset{(1)}{=} e^{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \log n}$

$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{n}}$

derivo

$f = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$

lim =

$X = (-1, 1)$

per $x = 1$ ho

$\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{\sqrt{n}} \cdot 1^n \qquad \lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{n}} \overset{=+\infty}{\neq} 0$ diverge

per $x = -1$ ho

$\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \cdot n^{\sqrt{n}}$ serie a segni alterni $\Rightarrow$ criterio di Leibnitz

è oscillante $\Rightarrow \nexists$ perché $n^{\sqrt{n}}$ è >1 o è $+\infty \Rightarrow (-1)^n \cdot n^{\sqrt{n}}$ oscilla

$\Rightarrow X =]-1, 1[$

- Studiare l'insieme di convergenza

6) $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\sqrt{n})^n \cdot x^n \qquad a_n = (\sqrt{n})^n,\ x_0 = 0$

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(\sqrt{n})^n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}} = 0$$

$X = \{0\}$

• Studiare l'insieme di convergenza

7) $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(2^{3n}+3^{2n}\right)}_{a_n>0} x^n$$

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^{3n}+3^{2n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{8^n+9^n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{9^n\left(1+\frac{8^n}{9^n}\right)}}$$

$$= \frac{1}{9\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+\left(\frac{8}{9}\right)^n}} = \frac{1}{9}$$

$$X = \left(-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$$

per $x=\frac{1}{9}$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(2^{3n}+3^{2n}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2^{3n}+3^{2n}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{8^n+9^n}{9^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{8}{9}\right)^n+1\right) = 1 \Rightarrow$$ diverg

per $x=-\frac{1}{9}$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\left(2^{3n}+3^{2n}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\cdot\underbrace{\left(\left(\frac{8}{9}\right)^n+1\right)}_{\searrow 1}$$ è oscillante

$$X = \left]-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right[$$

• Studiare l'insieme di convergenza

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \qquad a_n = \sum_{k=1}^{n} k^7 = 1+2^7+3^7+\dots+n^7$$

$$\rho = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n+1} k^7}{\sum_{k=1}^{n} k^7}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2^7+\dots+(n+1)^7}{1+2^7+\dots+n^7}} = $$

polinomi dello stesso grado $\to 1$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^7\left(\frac{1}{(n+1)^7}+\frac{2^7}{(n+1)^7}+\dots+1\right)^{\to 1}}{n^7\left(\frac{1}{n^7}+\frac{2^7}{n^7}+\dots+1\right)^{\to 1}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^7} = 1$$

$x = (-1, 1)$

per $x = 1$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^7\right)$ non infinitesima $\Rightarrow$ diverge.

per $x = -1$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n} k^7\right)$ oscillante

$X =]-1, 1[$

• Studiare l'insieme di convergenza

9) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{(1-x)^{2n}}$

dipende da x ⇓ non serie di pot — mi posso ricondurre alla serie di pot

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)^n \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

(serie geom)

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = y \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} y^n \qquad a_n = 1$$

$x = \underset{\text{oscilla}}{]-1}, \underset{\text{diverge}}{1[} \Rightarrow f(x) \in]-1, 1[$

$x \in X \Leftrightarrow -1 < \frac{x}{(1-x)^2} < 1 \quad \text{con } x \neq 1$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ -(1-x)^2 < x < (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x < (1-x)^2 \\ x > -(1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x < 1-2x+x^2 \\ x > -1+2x-x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2-3x+1 > 0 \\ x^2-x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cup x > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \left]-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$$

07-11-2005

Trovare il raggio di convergenza di

10) $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^n \cdot x^{n^2}$

$k = n^2 \Rightarrow a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ non è un quadrato perfetto} \\ \sqrt{k}^{\sqrt{k}} \end{cases}$

$\rho = 1$

$a_k \to +\infty$

$(-1)^k a_k$ oscillante $\Rightarrow x =]-1, 1[$

ESERCIZI SULLA SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI TAYLOR

$f \in C^\infty(A)$,

$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ e $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m = f(x)$ $\Rightarrow$ f è sviup. in serie di Tay.

sia $x_0 \in A$

se $\exists M>0$: $\sup_{]x_0-r, x_0+r[} |f^{(m)}(x)| \leq M \cdot m! \frac{1}{r^m}$ $\Rightarrow$ f è svile in serie di Tay in $]x_0-r, x_0+r[$

- $f(x) = e^x$

se il dominio $= \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ uso la serie di McLaurin

$\forall m \in \mathbb{N}$, $f^{(m)}(x) = e^x$

-serie di McLaurin ($x_0 = 0$)

$a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!} = \frac{1}{m!} \cdot x^m$, $f^{(m)}(0) = e^0$

$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!} \stackrel{?}{=} e^x$

$\sup_{]-r,r[} |e^x| = \sup_{]-r,r[} e^x = e^{r_0} = M$, $\frac{m!}{r^m} > 1$ OK

è crescente

non dip da x $\quad \forall x \in]-r, r[$

$= e^x \Rightarrow$ è sviup. in serie di Taylor.

$\rho = +\infty \Rightarrow$ si ha conv in ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$

- $f(x) = e^{-x^2}$

vedi sopra

$y = -x^2 \Rightarrow e^{-x^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot x^{2m}$

$y \in [-r, r] \Leftrightarrow -x^2 \in [-r, r] \Leftrightarrow x^2 \in [0, r] \Leftrightarrow x^2 < r \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{r}, \sqrt{r}[$

$\Rightarrow$ ho conv TOT.

- sviluppabilità di senx e cosx

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$f''(x) = -\cos x$

$f'''(x) = \operatorname{sen} x$

$f^{IV}(x) = \cos x$

cosx — si ripete ogni 4

se $x=0 \Rightarrow$ ho solo le derivate pari perché le dispari si annullano

↳ serie Mac Laurin di cosx

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \cos x$$

è svilupp. in serie di M.L.

e la conv è totale $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$

$\sup |f^{(k)}(0)| \leq 1 = M$ limitate

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x$

senx — si ripete ogni 4

se $x=0 \Rightarrow$ le derivate pari si annullano, quindi ho solo le dis

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \operatorname{sen} x$$

come prima (le der. sono limitate)

• $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ $\qquad$ $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

se fisso x^2

$\Downarrow$

$$x^2 \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{è svilupp.}$$

$$x^{2n+3} = x^{2n+1} \cdot x^2$$

•

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$\shortparallel$

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to 0} g_n(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

14·11·2005

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x=0 \end{cases}$

2) Studiare la serie di funzioni

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!\,x^{2m+1}}$$

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(1-\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{2m!}\right)=\dfrac{1}{x^2}\left(\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{2m!}\right)=$

$=\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\frac{x^{2m-2}}{2m!}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{[2(k+1)]!}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1}{2}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{\infty} f_m(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{x\to 0} g_m(x)=\frac{1}{2}$

2) $=\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\cdot\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{2m+1}}{(2m+1)!}$

$y=\dfrac{1}{x}$ $\quad=\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\cdot\frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}=\operatorname{sen} y \quad \forall y\in\mathbb{R}$

converge Tot $\forall\ [-a,a]$ con $a>0$

$\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!\,x^{2m+1}}=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$

conv. punt. in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

conv Tot in $]-\infty,-b]\cup[b,+\infty[$ $b>$

infatti $x\in]-\infty,-b]\cup[b,+\infty[$

$-\dfrac{1}{b}\leq\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{1}{b}$

ESERCIZI SULLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI

$$\begin{cases} f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \longrightarrow f(x,y) \\ G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in X \subseteq \mathbb{R}^2,\ z = f(x,y)\} \end{cases}$$

il dominio è il piano xy

- determinare il dominio

12) • $f(x,y) = \arcsin(xy - y - 2x)$

$(x,y) \in \mathrm{dom} f \iff -1 \le xy - y - 2x \le 1$ Trovo y in funzione di x

$$\iff \begin{cases} -1 \le xy - y - 2x \\ xy - y - 2x \le 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 1 \le xy - y \\ xy - y \le 1 + 2x \end{cases}$$

$$\iff \cancel{\begin{cases} y \ge \frac{2x-1}{x-1} \\ y \le \frac{1+2x}{x-1} \end{cases}} \iff \begin{cases} 2x - 1 \le y(x-1) \\ y(x-1) \le 1 + 2x \end{cases}$$

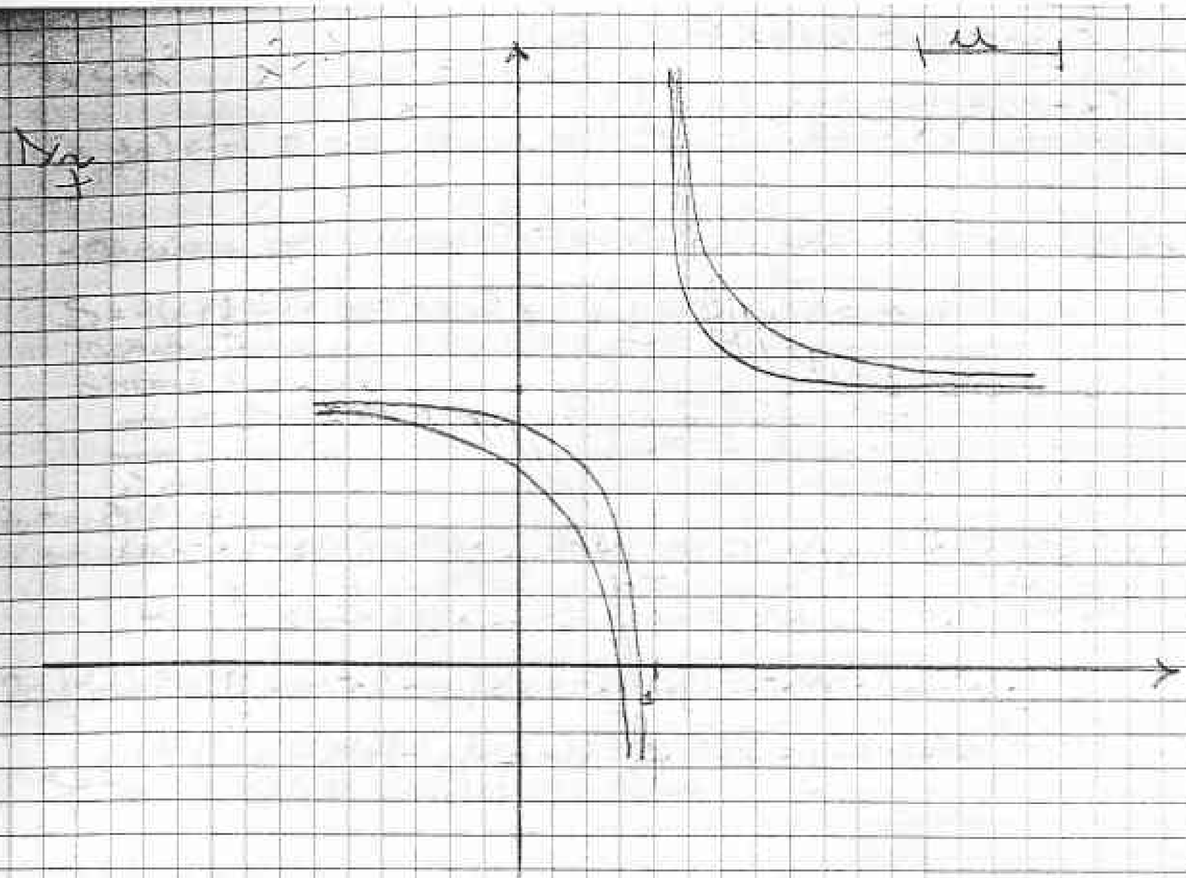
$$\overset{x-1<0}{\begin{cases} x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-1} \ge y \\ y \ge \frac{1+2x}{x-1} \end{cases}} \qquad \overset{x-1=0}{\begin{cases} x = 1 \\ 2x - 1 \le 0 \quad (x \le \frac{1}{2}) \\ 0 \le 1 + 2x \end{cases}} \ \emptyset \qquad \overset{x-1>0}{\begin{cases} x > 1 \\ y \ge \frac{2x-1}{x-1} \\ y \le \frac{1+2x}{x-1} \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ \frac{1+2x}{x-1} \le y \le \frac{2x-1}{x-1} \end{cases} \cup \begin{cases} x > 1 \\ \frac{2x-1^{\,-2x+2}}{x-1} \le y \le \frac{1+2x^{\,-2x+2}}{x-1} \end{cases}$$

sono iperboli. [illegible] grado e [illegible]

$$\begin{cases} x < 1 \\ 2 + \frac{3}{x-1} \le y \le 2 + \frac{1}{x-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 1 \\ \lim = 2 \\ 2 + \frac{1}{x-1} \le y \le 2 + \frac{3}{x-1} \end{cases} \quad \lim = 2 \ \text{ovvio}$$

$y = 2$ asintoto orizzontale



13)

$$\bullet\ f(x,y)=\frac{\sqrt{(x^2-2x+y)(x^2-2x-y)}}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}+\log\left(\frac{x+1}{2-x}\right)$$

$$(x,y)\in \operatorname{dom} f \iff \begin{cases} {}^{*}(x^2-2x+y)(x^2-2x-y)\geq 0 \\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\neq 0 \iff (x,y)\neq\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \\ \frac{x+1}{2-x}>0 \iff \frac{x+1}{x-2}<0 \iff -1<x<2 \end{cases}$$

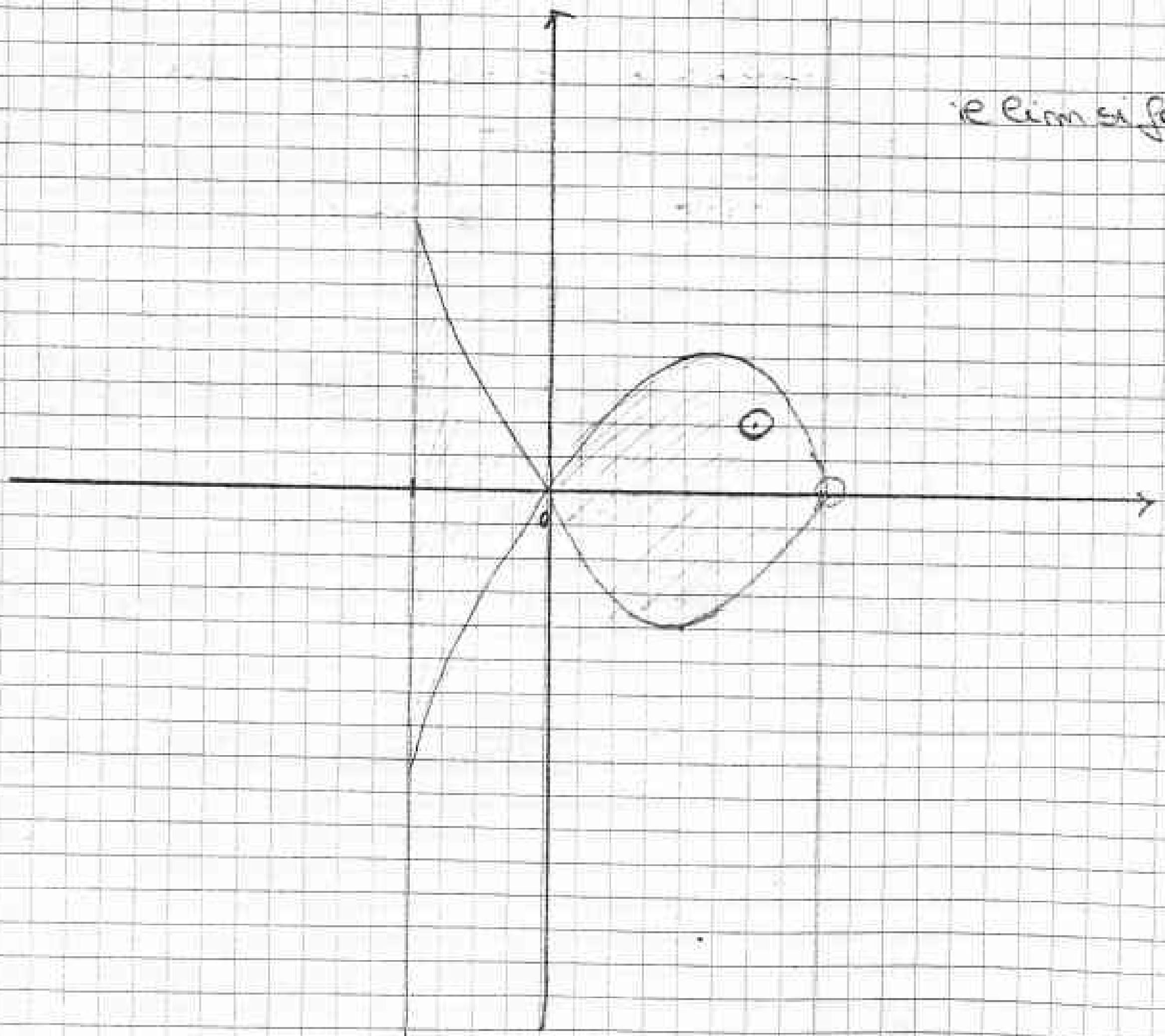
dist tra (x,y) e $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ ⇒ i punti devono essere distinti

$$^{*}\begin{cases} x^2-2x+y\geq 0 \\ x^2-2x-y\geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-2x+y\leq 0 \\ x^2-2x-y\leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y\geq -(x^2-2x) \\ y\leq x^2-2x \end{cases} \cup \begin{cases} y\leq -(x^2-2x) \\ y\geq x^2-2x \end{cases}$$

$$\left[-(x^2-2x)\leq y\leq x^2-2x\right]\cup\left[x^2-2x\leq y\leq -(x^2-2x)\right]$$

$\varphi(x)=x^2-2x$ $\quad -\varphi(x)\leq y\leq\varphi(x) \cup \varphi(x)\leq y\leq -\varphi(x)$

$\varphi(x)\geq 0$ $\quad \varphi(x)\leq 0$



il lim si fa per $\frac{1}{x}$ $\frac{3}{2}$

$X \subseteq \mathbb{R}^2$

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è p.a. per $X \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad X \cap \big(B((x_0,y_0), r) \setminus (x_0, y_0)\big) \neq \emptyset$ (intorno del cerchio, raggio)

- Studiare gli insiemi

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$

Un insieme è limitato se è contenuto in un cerchio

S chiuso $\Leftrightarrow$ S $\cup$ $\partial(S)$ = $\emptyset$

S non è limitato
non è finito
non è aperto
è chiuso

frontiera $\partial(S) = S$
i sono punti di S e del complementare

21/11/2005

14) $S = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$

$P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è interno? NO perché in ogni intorno cadono pti irrazionali

$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è esterno? NO perché $P \in$ al quadrato $[0,1] \times [0,1]$ è in ogni su intorno cadono pti di S

$\partial(S) = [0,1] \times [0,1]$

S è chiuso? SI

I pti di $\partial(S)$ non sono di accumulazione.

ESERCIZI SUL CALCOLO DEL LIMITE

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \to f(x,y)$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ è possibile solo se (x_0,y_0) è di accumulo

$f(x,y) \to \ell \in \mathbb{R}$ per $(x,y) \to (x_0,y_0)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0: |f(x,y)-\ell|<\varepsilon \quad \forall (x,y)\in X: 0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$

15) calcolare i seguenti limiti:

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0$ dom f $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. $(0,0)$ pto accumul

$\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0: |f(x,y)-0|<\varepsilon \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \quad 0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$

$\varepsilon>0$

$\left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2+y^2}<\varepsilon$

$\frac{x^4}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1}\cdot x^2 \leq x^2 \leq x^2+y^2<\varepsilon \qquad \delta_\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = 0$ dom $f = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$\varepsilon>0$

$\left|\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{\cancel{(x^2+y^2)}(x^2-y^2)}{\cancel{(x^2+y^2)}}\right|<\varepsilon$

$|x^2-y^2| \leq |x^2|+|y^2| = x^2+y^2<\varepsilon \qquad \delta_\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}$

ESERCIZI SULLA CONTINUITA'

- $f(x,y)=xy$ continua in $(0,0)$

$\varepsilon>0$

$|x^2|+|y^2|\geq 2|x|\cdot|y|$

$|xy|=|x|\cdot|y| \leq \frac{1}{2}(|x^2|+|y^2|)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)<\varepsilon \qquad \delta_\varepsilon=\sqrt{2\varepsilon}$

- $f(x,y)=\operatorname{sen}(xy)$, è cont in $(0,0)$ perché composta di funzioni continue.

- $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(2x-2y)}{x-y}$ dominio $=\mathbb{R}^2\setminus$ bisettrice 1°-3° quad.

i pti della bisett sono di accumul $\Rightarrow$ di frontiera
$\Rightarrow$ posso prolungare per continuità se $\exists$ finito

16)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{2\operatorname{sen}(2(x-y))}{2(x-y)}=2.$$

$$\tilde{f}=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(2x-2y)}{x-y} & \forall x\in\mathbb{R}^2\setminus(\text{bisett } 1°-3°)\\ 2 & \forall (x=y)\end{cases}$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}=2 \qquad \operatorname{dom} f=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

$\varepsilon>0$

$$\left|\frac{3x^3+2x^2+2y^2-2x^2-2y^2}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{3x^3}{x^2+y^2}\right|=\left|3x\cdot\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1}\right|\leq|3x|\leq$$

$$\leq|9x^2|\leq 9x^2\leq 9x^2+9y^2=9(x^2+y^2)<\varepsilon \qquad \delta_\varepsilon=\sqrt{\frac{\varepsilon}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon}$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2\cos\frac{1}{xy}=0 \qquad \operatorname{dom} f=\mathbb{R}^2\setminus\text{assi}$$

$\varepsilon>0$

$$\left|y^2\cdot\underbrace{\cos\frac{1}{xy}}_{\leq 1}\right|\leq y^2\leq x^2+y^2\leq\varepsilon \qquad \delta_\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}$$

• $f(x,y) = \frac{xy}{|xy|}$ dom f = $\mathbb{R}$ - gli assi

prolungamento in $(0,y)$ e $(x,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y^+)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{(x,y)\to(x^+,0)} \frac{xy}{|xy|} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y^-)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{(x,y)\to(x^-,0)} \frac{xy}{|xy|} = -1$$

$1 \neq -1 \Rightarrow$ il prolungamento non è possibile

(17)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

dominio $= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\,\text{sen}\,\theta$
$\rho \neq 0$

(introduco le forme polari (lo posso fare $\forall$ punto $\neq 0$)

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{\rho^2(\cos^2+\text{sen}^2)}$$

questo limite deve esistere e non deve dipendere da θ, ovvero deve valere $\forall\theta$

$$= \lim_{\rho\to 0} \cos\theta\,\text{sen}\,\theta \quad \nexists$$

perchè dipende da θ

se uso la retta:

$y = ax$, $a\in\mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\to 0}} \frac{x^2 a}{x^2+ax^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{a}{1+a} \quad \nexists$$

perchè dipende da a

---

18)

$$f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^4} \qquad \text{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

è conveniente per i polinomi dello stesso grado

$x=0$, $y=mx$

vedo il comportamento lungo le rette passanti per l'origine

$y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^4x^4}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^4x^{4^2}}{\cancel{x^2}(1+m^4x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m^4x^2}{1+m^4x^2} = 0$$

se mi restringo a $x=0$ ho che:

$x=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{y^4} = 1 \qquad \neq \quad \text{il limite non esi}$$

---

19)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^6} \qquad \text{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\,\text{sen}\,\theta$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^6\text{sen}^6\theta} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2\left(\frac{\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta+\rho^4\text{sen}^6\theta}\right) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^4+y^4} \qquad \text{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}}_{\to\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \quad \nexists$$

$y = mx$ dipende da m

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \quad \text{sull'asse } y \text{ è } =0 \end{cases}$$

• f è continua in $(0,0)$? posso considerare la restrizione a una curva che mi rende costante la f, con una costante $\neq 0$
$x=y^2$ [illegible] $y=\sqrt{x}$ [illegible]

$x=y^2$ $\quad \lim_{y\to 0} \dfrac{y^2}{y^2} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ non è continua in $(0,0)$.

• $f_{|D}$ $\quad D=\{(x,y) \mid |y| \leq x \leq 1\}$
è continua in $(0,0)$?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{y^2}{x}}_{\geq 0} = 0$$

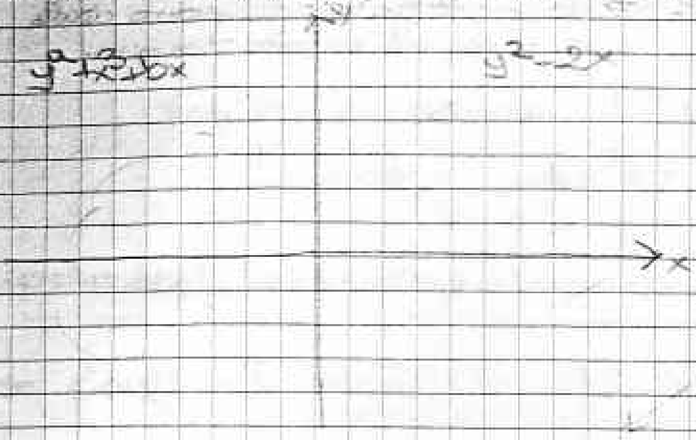
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|\,|y|}{x} \to 0$$

$$\underbrace{\frac{|y|}{x}}_{\text{limitato}} \; \underbrace{|y|}_{0} \to 0$$

ESERCIZIO

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 - 2x & x \geq 0 \\ y^a + x^3 + bx & x < 0 \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

- determinare i coeff reali "a" e "b" in modo tale che f sia continua $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $\exists f_x, f_y \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$



le due funzioni devono "unirsi" affinché f sia continua

lo stesso vale per la derivata

sono continue

i punti di frontiera sono i punti $P_0 = (0, y_0)$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ x<0}} f(x,y) = f(P_0) = y_0^2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} (y^a + x^3 + bx) = y_0^2 \Rightarrow y_0^a = y_0^2 \Rightarrow a = 2$$

der parz in x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{h\to 0^{+-}} \frac{f(h,y_0) - f(0,y_0)}{h}$$

si poteva anche derivare direttamente

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{y_0^2} - 2h - \cancel{y_0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}} = -2 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{y_0^2} + h^3 + bh - \cancel{y_0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} (h^2 + b) = b \end{array}\right\} \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \begin{cases} y^{2} - 2x & x \geq 0 \\ y^{2} + x^3 - 2x & x < 0 \end{cases}$$

devono essere uguali (per la continuità)

vale la x con la potenza più bassa (per la deriv)

- calcolare il dom f

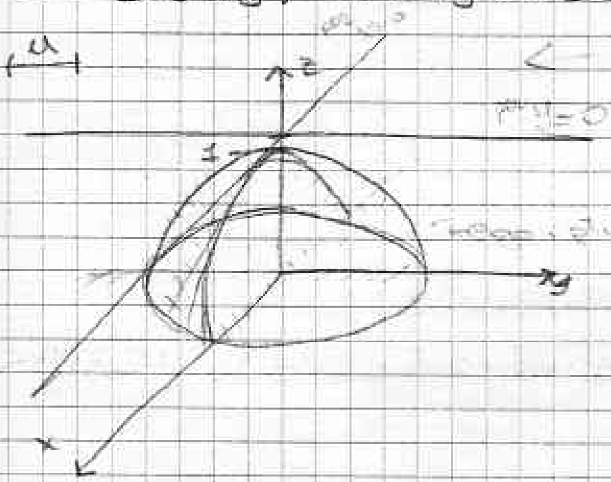
21) $f = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 2 & x=0 \text{ opp } y=0 \end{cases}$

$\text{dom} f \Leftrightarrow 1-(x^2+y^2) \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow$ sto considerando l'intorno circolare di raggio 1 e centro l'origine

grafico

$z = f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)} \geq 0,\ \leq 1$ assume il max in 0 perché assume valore 2

$z^2 = 1-(x^2+y^2) \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 1$ sfera



se un punto $\in (0,y,z) \Rightarrow$ ha $(0,y,2)$

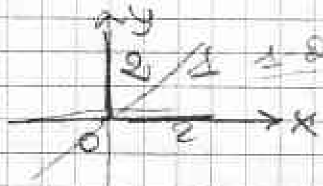
- esistono le derivate parziali in 0?

$f(x,0) = 2 \Rightarrow f_x(0,0) = 0$

$f(0,y) = 2 \Rightarrow f_y(0,0) = 0$

- f è continua in 0?

consideriamo direzioni diverse: lim agli assi e alle rette



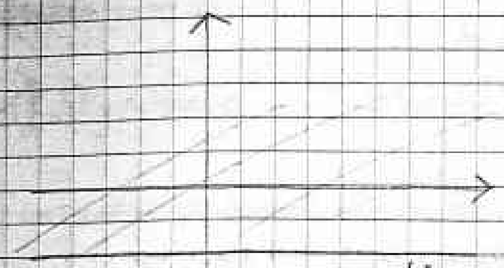
non è continua

$f(x,y) = |x| \log(1+y)$ — Prodotto di 2 funzioni una con x e una con y

$\Downarrow$

la continuità di x e y $\Rightarrow$ cont. e cont[illegible]

è differenziabile in $(0,0)$?



$y = -1$

$(0,0) \in \operatorname{dom} f$ ed è interno (basta prendere un raggio < 1)

se f diff in P_0 $\Rightarrow \left(\exists f_x(P_0),\ \exists f_y(P_0) \right)$, $df(P_0) = \left(f_x(P_0), f_y(P_0)\right)$

$f(x,0) = 0$
$f(0,y) = 0$
$\Big|$ f ammette deriv parz in $(0,0)$ e valgono 0.

$$\frac{f(\underline{x}) - f(x_0) - \langle \overset{=0}{\nabla f(x)}, \overset{=0}{\underline{x - x_0}} \rangle}{\|x - x_0\|} \longrightarrow 0 \quad \text{per la diff}$$

$$\frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \longrightarrow 0$$

$y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\log(1+y) - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\log(1+mx)}{\sqrt{(1+m^2)x^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{|x|}\log(1+mx)}{\cancel{|x|}\sqrt{1+m^2}} = 0$$

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1 \Rightarrow \left| \frac{|x|\log(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le |\log(1+y)| \to 0$$

oppure $\quad x = \rho\cos\theta$, $\quad y = \rho\sin\theta$ $\quad \lim_{\rho\to 0^+}$, $\rho \not\to 0^-$.

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\cancel{\rho}|\cos\theta|\log(1+\rho\sin\theta)}{\cancel{\rho}} = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ è diff in $(0,0)$

5.12.2005

21. $f(x,y) = \sqrt{x^2(y-1)} + 1$

- f è differenziabile in $(0,1)$?

ESERCIZI SUI MASSIMI E MINIMI RELATIVI

vedere se è deriv e continua ⇒ è differenz. → libero: interni al dominio non sulla frontiera

- Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione:

1) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2$. polinomio

· calcolo il dominio e la regolarità (se è continua)

$\text{dom} f = \mathbb{R}^2$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ è differenziabile.

· calcolo i punti stazionari tramite il Teo di Fermat:

gli eventuali punti di min o max relativo devono essere soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - x + y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y^3 = -x^3 \Rightarrow y = -x \\ x^3 - x - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ x = 0, \ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0, \ y = \mp\sqrt{2} \\ x = 0, \ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

i punti stazionari sono $O = (0,0)$, $P_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $P_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

· considero l'hessiano (che calcolato nei pti stazionari, se è $\neq 0$ e < 0 ok)

devo considerare

$f_{xx} = 12x^2 - 4$

$f_{xy} = f_{yx} = 4$

$f_{yy} = 12y^2 - 4$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} \qquad \det H(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (12x^2-4)(12y^2-4) - 16$$

$\det H(P_1) = \det H(P_2) = 384 > 0 \Rightarrow P_1, P_2$ pti min rel

$\det H(O) = 0$ non posso dire niente ma devo considerare il segno dell'incremento

affinché il pto è di min o max

$f(x) \lesseqgtr f(x_0) \iff \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\Delta f} \begin{matrix} \leq 0 \ \text{max} \\ \geq 0 \ \text{min} \end{matrix} \quad \forall x \in B(x_0, r)$

O è un pto di sella

$\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

restringo l'incremento alla $x=y$ — quando $\leq 0 \iff -2 \leq x \leq 2$ max, intorno di O

$\Delta f|_{\ldots} = 2x^4 \geq 0$ sempre; $\Delta f|_{\ldots} = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2-4) \geq 0 \iff x \leq -2, \ x \geq 2$

2) $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$, $\frac{x \cdot y}{x^2+y^2}$ dom $f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

avremo un'infinità di pti min e max. $y = x, 0$, $y = -x$ ...

dom $f = \mathbb{R}^2$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2+6x+4y=0 \\ 4x+2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2+6x-8x=0 \Rightarrow 3x^2-2x=0 \\ y=-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0, \ x=\frac{2}{3} \\ y=0, \ y=-\frac{4}{3} \end{cases} \qquad P_1(0,0) \quad P_2\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \quad f_{xx} = 6x+6; \quad f_{xy} = 4; \quad f_{yy} = 2$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x+6 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(6x+6)-16 = 12x+12-16 = 12x-4$$

$H(P_1) = -4 < 0$, [illegible] non è né di min né di max

$H(P_2) = \cancel{12}^{4} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} - 4 = 4 > 0$, $f_{xx}(P_2) = \cancel{6}^{2} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} + 6 = 10 > 0 \Rightarrow$ pto di min

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ 24 $x^2+y^2 \neq 0 \iff (x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = 0 \\ \frac{x(x^2+y^2)-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} yx^2+y^3-2x^2y = 0 \\ x^3+xy^2-2xy^2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y^3-x^2y=0 \\ x^3-xy^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(y^2-x^2)=0 \\ x(x^2-y^2)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}, \begin{cases} y=0 \\ x^2-y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} y^2-x^2=0 \\ x=0 \end{cases} \begin{cases} y^2-x^2=0 \\ x^2-y^2=0 \end{cases}$$

$P_1(0,0)$ $\begin{cases} y^2 = x^2 \\ x^2=y^2 \end{cases} \Rightarrow y = \pm x$

$$f_{xx} = \frac{(2xy-4xy)(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)[y(x^2+y^2)-2x^2y]}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2+y^2)[-yx^2-y^3-yx^2-y^3-2x^2y]}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{2x(-2yx^2-2y^3-2x^2y)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{4xy(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_{xy} = \frac{[(x^2+y^2)+2y^2-2x^2](x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)[y(x^2+y^2)-2x^2y]}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)-4y(-x^2y+y^3)}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{3y^2x^2+3y^3-x^4-x^2y^2+4x^2y^2-4y^4}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3y^3-4y^4-x^4-6x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_{yy} = \frac{(\overset{=-2xy}{2xy-4xy})(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)[\overset{x^3-xy^2}{x(x^2+y^2)-2xy^2}]}{(x^2+y^2)^4} = \frac{4xy(2y^2+x^2)}{}$$

$$= +2y(x^2+y^2)(-xy^2+x^3-x^2y+ \quad = \frac{3x^3-4x^4-y^4-6x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$H(x,y) = \frac{16x^2y^2(2x^2+y^2)(2y^2+x^2)}{(x^2+y^2)^3},$$

$f(x,y) = x \cdot y \log(x \cdot y^2) + x^2 y \quad C^\infty$

$\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x y^2 > 0\} =]0, +\infty[\times \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

$(x y^2 > 0 \iff x > 0)$

$f(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$f_x = y \log(xy^2) + xy \cdot \frac{1}{xy^2} \cdot y^2 + 2xy = y \log(xy^2) + y + 2xy$

$f_y = x \log(x \cdot y^2) + xy \cdot \frac{1}{xy^2} \cdot 2xy + x^2 = x \log(xy^2) + 2x + x^2$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y \log(xy^2) + y + 2xy = 0 \\ x \log(xy^2) + 2x + x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y[\log(xy^2) + 1 + 2x] = 0 \\ x[\log(xy^2) + 2 + x] = 0 \end{cases} \underset{(x,y) \in \operatorname{dom} f}{\iff}$$

$$\iff \begin{cases} \log(xy^2) + 1 + 2x = 0 \\ \log(xy^2) + 2 + x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \log(xy^2) = -1 - 2x \\ \log(xy^2) = -2 - x \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \log(xy^2) = -1 - 2x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ \log(y^2) = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm e^{-\frac{3}{2}} \end{cases} \quad P_1 (1, e^{-\frac{3}{2}}), \; P_2 (1, -e^{-\frac{3}{2}})$$

$2 \log y = -3 \quad \log y = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = e^{-\frac{3}{2}}$

$f_{xx} = y \cdot \frac{1}{xy^2} \cdot y^2 + 2y = y \cdot \frac{1}{x} + 2y = y\left(\frac{1}{x} + 2\right)$

$f_{xy} = f_{yx} = \log(xy^2) + y \cdot \frac{1}{xy^2} \cdot 2xy + 1 + 2x = \log(xy^2) + 3 + 2x$

$f_{yy} = x \frac{1}{xy^2} \cdot 2xy = \frac{1}{y} \cdot 2x$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} y\left(\frac{1}{x} + 2\right) & \log(xy^2) + 3 + 2x \\ \log(xy^2) + 3 + 2x & \frac{2x}{y} \end{pmatrix}$$

$\det Hf(x,y) = 2x\left(\frac{1}{x} + 2\right) - [\log(xy^2) + 3 + 2x]^2 = 2 + 4x - [\log$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

è una relazione che coinvolge una variabile x, una funzione in essa variabile e le derivate della suddetta funzione

- del primo ordine

$y'(x) + a_0(x)\, y(x) = 0$

soluz.

$y_0(x) = c \cdot e^{-A_0(x)} = c \cdot e^{-\int a_0(t)\,dt}$

$y'(x) + a_0(x) y(x) = f(x)$

soluz.

$y_0(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)_{\text{integ. partic.}} \qquad \bar{y}(x) = e^{-A_0(x)} \cdot \int e^{A_0(x)} \cdot f(x)$

- esercizio

trovare l'integrale generale di:

$y' + (\operatorname{sen}x)\, y = (1+\cos x)\operatorname{sen}x$

$y_0(x) = c \cdot e^{-\int \operatorname{sen}t\, d(t)} = c \cdot e^{\cos x}$

$\bar{y}(x) = e^{\cos x} \cdot \int e^{-\cos x}(1+\cos x)\operatorname{sen}x\, dx$ sostituzione per l'integrale dell'esp

$-\cos x = t \Rightarrow$

$dt = \operatorname{sen}x\, dx$

~~$\bar{y}(x) = e^{\cos x} \cdot \int e^{t}(1+t)\sqrt{1+t^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) dt = e^{\cos x} \int e^{t}(1+t)\, dt$~~

$\bar{y}(x) = e^{\cos x} \cdot \int e^{t}(1-t)\, dt = \int e^{t} dt + \int t e^{t} dt$

$= e^{t} - te^{t} + e^{t} = e^{t}(2-t) = e^{-\cos x}(2+\cos x)$

$\Rightarrow Y(x) = c \cdot e^{\cos x} + e^{\cos x} \cdot e^{-\cos x}(2+\cos x) = c\, e^{\cos x} + \cos x + 2$

• trovare l'integrale generale

1) $y' - e^x y = e^{2x}$

determino una soluz dell'equaz omog.

$y_0(x) = c\cdot e^{-\int -e^x dt} = c\cdot e^{e^x}$ $\qquad c\in\mathbb{R}$

$\bar{y}(x) = e^{e^x}\cdot\int e^{-e^x}\cdot e^{2x}\,dx \qquad -e^x = t \quad dt = -e^x dx$

$\int e^{-e^x}\cdot e^{2x}\,dx = -\int e^{-e^x}\cdot\underbrace{(-e^x)}_{D(e^{-e^x})}\cdot e^x\,dx =$

per parti

$= e^{-e^x}\cdot e^x - \int e^{-e^x}\cdot e^x\,dx = e^{-e^x}\cdot e^x + \int -e^{-e^x}\cdot e^x\,dx =$

$= e^{-e^x}\cdot e^x + e^{-e^x} = e^{-e^x}(e^x+1)$

$\Rightarrow Y(x) = ce^{e^x} + e^{e^x}\cdot e^{-e^x}(e^x+1) = ce^{e^x} + e^x + 1$

2) $y' - \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}\,y = \operatorname{sen}x$

per tutti i pti il cui seno è $\neq -1$ $\Rightarrow$ ci sono degli intervalli

$y_0(x) = c\cdot e^{\int\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}dx} = c\cdot e^{\log(1+\operatorname{sen}x)} = c\cdot(1+\operatorname{sen}x)$

$\bar{y}(x) = (1+\operatorname{sen}x)\cdot\int\frac{\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}\,dx$

$\int\frac{\operatorname{sen}x+1-1}{1+\operatorname{sen}x}\,dx = \int dx - \int\frac{1}{1+\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\,dx = x+c - \int\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\,dx =$

$= x+c - \left(\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\,dx\right) = x+c - \operatorname{tg}x - \frac{1}{\cos x}$

$\Rightarrow Y(x) = c\cdot(1+\operatorname{sen}x) + (1+\operatorname{sen}x)\left(x+c-\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos x}\right)$

27.01.2006

Risolvere:

1) $y' + \frac{2}{x} y = e^{x} + 2$

2) $y' - \frac{1}{1+e^{x}} y = e^{x}$

3) $y' - \frac{2}{1-3e^{x}} y = x$

Risolvere le equaz a coeffic costanti

$y'' - 6y' + 5y = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

eq caratt.

$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ ha sempre soluz $\lambda \in \mathbb{C}$

$\lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 1$

$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{5x}$

$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{x}$

$y_0(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{x}$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y'' - 2y' + 2y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ $\quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{}$ $\Rightarrow \Delta < 0, \ \lambda = 1 \pm i$

$y_1 = e^{x}\cos x, \ y_2 = e^{x}\operatorname{sen} x$

$Y(x) = c_1 e^{x}\cos x + c_2 e^{x}\operatorname{sen} x$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$= e^{x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$

espo per combinazione di seno e coseno

$y'' - 2y' + y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{1-1} \Rightarrow \lambda = 1$

$y_1 = e^{x}, \ \ y_2 = x e^{x}$

$Y(x) = e^{x}(c_1 + c_2 x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ → esponenziale per un polin di 1° grado al variare dei coeff

Le soluzioni sono definite in tutto $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ per il prob di Cauchy posso usare qualsiasi punto

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''-y'-2y=0 \\ y(0)=0 \quad \text{stato iniziale} \\ y'(0)=3 \quad \text{velocità iniziale} \end{cases}$$

⇒ determino la legge nel pto

$$\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$y_1(x)=e^{2x}, \quad y_2(x)=e^{-x}$$

$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

$$y'(x)=2c_1e^{2x}-c_2e^{-x}$$

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \Rightarrow c_1=-c_2 \Rightarrow c_2=-1 \\ 2c_1-c_2=3 \Rightarrow 3c_1=3 \Rightarrow c_1=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x)=e^{2x}-e^{-x}$$

23-01-2006

$$\begin{cases} y''-2y'-y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\lambda^2-2\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=1\pm\sqrt{1+1} \begin{cases} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

Risolvere

$$y'' \underbrace{- 3y' + 2y}_{Ly} = (2x^3 - x^2 + 1) \cdot e^{0x}$$

Ly $\quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

$$Y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} \quad , C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ devo trovare a, b, c, d per le quali ... $v(x)$

$v'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$v''(x) = 6ax + 2b$

$$6ax + 2b - 9ax^2 - 6bx - 3c + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d = 2x^3 - x^2 + 1$$

$$2ax^3 + (-9a + 2b)x^2 + (6a - 6b + 2c)x + 2b - 3c + 2d = 2x^3 - x^2 + 1$$

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ -9a + 2b = -1 \\ 6a - 6b + 2c = 0 \\ 2b - 3c + 2d = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 9 \\ d = 10 \end{cases}$$

$$v(x) = x^3 + 4x^2 + 9x + 10$$

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + (x^3 + 4x^2 + 9x + 10), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$y'' - 4y' = (x^2 + 1) e^{0x}$$

$\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$

$Y(x) = C_1 + C_2 e^{4x}$

0 è soluz

$v(x) = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$

$v'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$v''(x) = 6ax + 2b$

$a = -\frac{1}{12}, \quad b = -\frac{1}{16}, \quad c = -\frac{9}{32}$

$$Y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} + x\left(-\frac{x^2}{12} - \frac{x}{16} - \frac{9}{32}\right) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{1+3} \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array} \right.$$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

la metto perché e^{3x} è soluz. → altrimenti ae^{3x}

$$v(x) = axe^{3x}$$ → se non c'è e derivo ottengo 0

$$v'(x) = ae^{3x} + 3axe^{3x} = e^{3x}(a + 3ax)$$

$$v''(x) = 3e^{3x}(a + 3ax) + e^{3x}\, 3a$$

$$e^{3x}(6a + 9ax - 2a - 6ax - 3ax) = 8e^{3x}$$

$$6a + 9\cancel{a}x - 2a - 6\cancel{a}x - 3\cancel{a}x = 8$$

$$a = 2$$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + 2xe^{3x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

23·01·2006

$$y'' - 3y' + 2y = (2x^3 + 1 - x^2) + e^{3x}$$

$$y = e^{3x} \qquad y' = 3e^{3x} \qquad y'' = 9e^{3x}$$

$$9e^{3x} - 6e^{3x} + 2e^{3x} \overset{?}{=} 8e^{3x}$$

$y'' - 2y' - 3y = \cos 2x$ $\quad 0 \pm 2i$ e soluție? $^{\text{de nu}}$ => [illegible] x

termo, $y_p(x) = a\cos 2x + b$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \lambda = 3, \ \lambda = -1$

$y'' - y' - 2y = 2\operatorname{sen} x$

$0 \pm i$ non è soluz.

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

$v(x) = a\cos x + b\operatorname{sen} x$

$v'(x) = -a\operatorname{sen} x + b\cos x$

$v''(x) = -a\cos x - b\operatorname{sen} x$

$-a\cos x - b\operatorname{sen} x + a\operatorname{sen} x - b\cos x - 2a\cos x - 2b\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x$

$\begin{cases} (-3a - b) = 0 \\ (-3b + a) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \Rightarrow b = -3a & \Rightarrow b = -\frac{3}{5} \\ \Rightarrow 9a + a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{5} \end{cases}$

$c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{5}\cos x - \frac{3}{5}\operatorname{sen} x\right)$

Posso fare così perchè seno e cosno sono lin. indip. (non è comunque molto stesso poichè sono traslate l'una dell'altra di $\frac{\pi}{2}$

$y'' + y = \cos x$

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \quad \lambda = \dfrac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} \begin{cases} i \\ -i \end{cases}$

~~$c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos$~~ $c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$

$v(x) = a x \operatorname{sen} x + b x \cos x$

$v'(x) = a\operatorname{sen} x + a x\cos x + b\cos x - b x \operatorname{sen} x$

$v''(x) = a\cos x + a\cos x - a x \operatorname{sen} x - b\operatorname{sen} x - b\operatorname{sen} x - b x\cos x$

$2a\cos x - \cancel{a x \operatorname{sen} x} - 2b\operatorname{sen} x - \cancel{b x \cos x} + \cancel{a x \operatorname{sen} x} + \cancel{b x \cos x} = \cos x$

$\begin{cases} 2a = 1 & \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ -2b = 0 & \Rightarrow b = 0 \end{cases}$

$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x$

$y'' - y = 2x\,\text{sen}x$

$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ se ± 1 soluz $\Rightarrow$

$v(x) = x^1 (ax+b)\,\text{sen}x + x^1 (cx+d)\cos x$

$v'(x) = a\,\text{sen}x + (ax+b)\cos x + c\cos x - (cx+d)\,\text{sen}\,x$

$v''(x) = a\cos x + a\cos x - (ax+b)\,\text{sen}x - c\,\text{sen}x - c\,\text{sen}x - (cx+d)\cos x$

$2a\cos x - (ax+b)\,\text{sen}x - 2c\,\text{sen}x - (cx+d)\cos x - (ax+b)\,\text{sen}x - (cx+d)$

$= 2x\,\text{sen}x$

$(2a - 2cx - 2d)\cos x + (-2ax - 2b - 2c)\,\text{sen}\,x = 2x\,\text{sen}x$

$\begin{cases} 2a - 2cx - 2d = 0 \\ -2ax - 2b + 2c = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} a - cx - d = 0 \\ -ax - b + c = x \end{cases}$

$\begin{cases} 1 = -a \\ -b + c = 0 \\ -c = 0 \\ a - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases}$

26-01-2006 $\quad$ 141

$y'' - 2y' + 2y = e^x\,\text{sen}x$ $\quad = 1^{\pm i}$

$\lambda = 1 \pm i$ $\Rightarrow$ se non fosse $\Rightarrow e^x(\ldots)$

$v(x) = x e^x (a\cos x + b\,\text{sen}x)$

$y'' + y = \text{sen}x \cdot x \cdot e^x$

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0, \ \lambda = \pm i$

$\cancel{c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x}$ $y_1 = \cos x \quad y_2 = \operatorname{sen} x$

$c_1 = c_1(x)$ derivabili
$c_2 = c_2(x)$

sistema dei metodo di Lagrange

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 & \forall x \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{1}{\cos x} & \end{cases}$$

$v(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow c_1' = -c_2' \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x \\ -c_1' \operatorname{sen} x + c_2' \cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cancel{c_2' \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + c_2' \cos x = \frac{1}{\cos x}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ c_2' \left(\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x + \cos x\right) = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow c_2' \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} \right) = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} /// \\ c_2' \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow c_2' = 1 \Rightarrow c_2 = x + a, \ a = 0 \quad x \end{cases}$$

$c_1' = -\operatorname{tg} x \Rightarrow c_1 = \int -\operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \log|\cos x|$

$\Rightarrow y(x) = \overset{c_1}{a} \cos x + \overset{c_2}{b} \operatorname{sen} x + \left(x \operatorname{sen} x + (\log|\cos x|) \cos x \right)$

— 26-01-2006

Applica metodo di Lag e manuale

$y'' - y = 3x^2 - 1$

Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n^4+|x|} - \sqrt{n^4-1} \right)$$

dominio:

$$\begin{cases} n^4+|x| \geq 0 \Rightarrow |x| \geq -n^4 & \forall \in \mathbb{R} \\ n^4-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^4+|x|} - \sqrt{n^4-1} \right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n^4}+|x|-\cancel{n^4}+1}{\sqrt{n^4+|x|}+\sqrt{n^4-1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|x|+1}{\underbrace{\sqrt{n^4+|x|}}_{\text{è circa } n^2}+\underbrace{\sqrt{n^4-1}}_{\text{è circa } n^2}} = 0$$ non posso dire niente

$$f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{n^4+|x|}} \cdot \frac{x}{|x|} = \frac{x}{2|x|\sqrt{n^4+|x|}}$$ $\frac{1}{\sqrt{\;}} \leq \frac{1}{n^2} \cdot c$?

$$f_n'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{2|x|\sqrt{n^4+|x|}} \geq 0$$

$$x \geq 0 \Rightarrow f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{n^4+1}}$$

$$x < 0 \Rightarrow f_n'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{n^4-x}}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ f_n'(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x<0 \\ f_n'(x) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ 2\sqrt{n^4+1} \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x<0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{n^4-x}} \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x<0 \\ \frac{1}{2\sqrt{n^4-x}} \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<0 \\ 2\sqrt{n^4-x} \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<0 \\ n^4-x \leq 0 \Rightarrow x \geq n^4 \end{cases}$$ $x = \emptyset$

oppure: $\underbrace{\sqrt{n^4+|x|}}_{\geq \sqrt{n^4} = n^2} + \underbrace{\sqrt{n^4-1}}_{\geq 0} \overset{?}{\geq} c n^2 \Rightarrow \geq n^2$

$$\Rightarrow \frac{1+|x|}{\sqrt{n^4+|x|}+\sqrt{n^4-1}} \leq 1+|x| \cdot \frac{1}{n^2}$$ → converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{4^n} \cdot (e^x+2)^n$$

27

succesione:

$$f_n(x) = e^{-x^{2n}}$$

28

PROVA SCRITTA 14·02·02

• Studiare la serie

29/ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{nx}$

$\cancel{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{nx} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}\cdot e^{nx} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\cdot e}$

$\cancel{= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\cdot e^{x}\right)^{n}}$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+1}{n}\right)^{-n^2} e^{nx} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\right)^{-1}\cdot e^{x}\right]^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[e^{-1}\cdot e^{x}\right]^{n} =$

$= \lim_{n\to+\infty}\left(e^{x-1}\right)^{n} = e^{n(x-1)} = \begin{cases} 1 & x=1 \\ +\infty & x>1 \\ 0 & x<1 \end{cases}$ la serie non converge.

$x<1$

$\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{x-1}\right)^{n} = \frac{1}{1-e^{x-1}}}$

$f_n'(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\cdot e^{nx}\cdot n$

$f_n'(x) = 0 \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\cdot e^{nx}\cdot n = 0 \iff e^{nx} = 0 \iff \frac{1}{e^{n|x|}} = 0$ MAI

$f_n'(x) \geq 0 \iff e^{nx} \geq 0 \iff \frac{1}{e^{n|x|}} \geq 0 \quad \forall x$

BOH!

• massimi e minimi

$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{4-x^2-y^2}$ (29) $\quad 4-x^2-y^2 \neq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \neq 4$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2x(4-x^2-y^2)+(x^2-y^2)2x}{(4-x^2-y^2)^2} = 0 \\ \frac{-2y(4-x^2-y^2)+(x^2-y^2)2y}{(4-x^2-y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x(4-x^2-y^2)+(x^2-y^2)2x = 0 \\ -2y(4-x^2-y^2)+(x^2-y^2)2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(4-\cancel{x^2}-y^2+\cancel{x^2}-y^2)=0 \\ 2y(x^2-\cancel{y^2}-4+x^2+\cancel{y^2})=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cancel{2}x(4-2y^2)=0 \\ \cancel{2}y(-4+2x^2)=0 \end{cases} \iff \cancel{\begin{cases} x = \frac{2y^2-4}{2} = -y^2 2 \\ -2y+4yx^2=0 \end{cases}}$$

$\cancel{x = y^2 2}$

$$\cancel{\begin{cases} 8x-4xy^2=0 \\ -8y+4yx^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-xy^2=0 \\ 2y-yx^2=0 \end{cases}}$$

$$\cancel{\iff \begin{cases} x(2-y^2)=0 \Rightarrow x=0,\ y=\pm\sqrt{2} \\ y(2-x^2)=0 \Rightarrow y=0,\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}}$$

$\boxed{P_1(0,0),\ \cancel{P_2(\sqrt{2},\sqrt{2})}\ \cancel{P_3(\sqrt{2},\sqrt{2})}}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ -4+2x^2=0 \end{cases}$! $\begin{cases} 4-2y^2=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4-2y^2=0 \\ -4+2x^2=0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 2y^2-4=0 \Rightarrow y^2=2 \\ 2x^2-4=0 \Rightarrow x^2=2 \end{cases}$

$x^2+y^2=4$!

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$f_{xx} = \frac{\left(2(4-x^2-y^2)+\cancel{2x(-2x)}+\cancel{4x^2}+2(x^2-y^2)\right)(4-x^2-y^2)^2}{(4-x^2-y^2)^4} +$$

$$\frac{2[2x(4-x^2-y^2)+(x^2-y^2)2x](4-x^2-y^2)(-2x)}{(4-x^2-y^2)^4} =$$

$$= \frac{2\cancel{(4-x^2-y^2)}[(4-2y^2)(4-x^2-y^2)+(-4x^2)(4-2y^2)]}{(4-x^2-y^2)^{\cancel{4}\,3}} = \cancel{\frac{2(4-2y^2)(4+4x)}{(4-x^2-y^2)^3}} = \frac{2(4-2y^2)(4-x^2-y^2)}{(4-x^2-y^2)^3}$$

$$\frac{2(4-2y^2)(4+3x^2-y^2)}{(4-x^2-y^2)^3}$$

$$f_{yy} = \frac{[-2(4-x^2-y^2)+\cancel{2y^2}+4y^2+2(x^2-y^2)](4-x^2-y^2)^2}{(4-x^2-y^2)^3} -$$

$$\frac{2[-2y(4-x^2-y^2)+(x^2-y^2)2y](4-x^2-y^2)(-2y)}{(4-x^2-y^2)^4} =$$

$$\frac{2\cancel{(4-x^2-y^2)}[(-4+2x^2)(4-x^2-y^2)-(-4y^2)(-4+2x^2)]}{(4-x^2-y^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{2(-4+2x^2)(4-x^2-y^2+4y^2)}{(4-x^2-y^2)^3} = \frac{2(-4+2x^2)(4-x^2+3y^2)}{(4-x^2-y^2)^3}$$

$$f_{xy} = \frac{(-8xy-4xy)(4-x^2-y^2)^2 + 2(4-x^2-y^2)(2y)[2x(4-x^2-y^2)+(x^2-y^2)2x]}{(4-x^2-y^2)^{4}} =$$

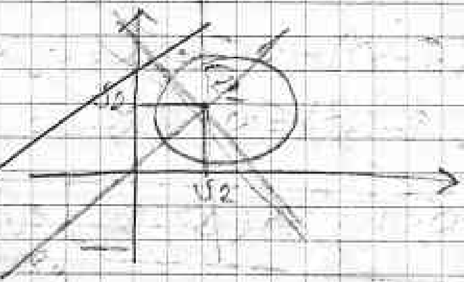
$$\frac{-8\cancel{(4-x^2-y^2)}[-xy(4-x^2-y^2)+xy(4-2y^2)]}{(4-x^2-y^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{8xy(x^2-y^2)}{(4-x^2-y^2)^3}$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{2(4-2y^2)(4+3x^2-y^2)}{(4-x^2-y^2)^3} & \frac{8xy(x^2-y^2)}{(4-x^2-y^2)^3} \\ \frac{8xy(x^2-y^2)}{(4-x^2-y^2)^3} & \frac{2(2x^2-4)(4-x^2+3y^2)}{(4-x^2-y^2)^3} \end{vmatrix}$$

$$H(x,y) = \frac{4(4-2y^2)(4+3x^2-y^2)(2x^2-4) - 64x^2y^2(x^2-y^2)^2}{(4-x^2-y^2)^6}$$

$H(P_1) =$ $\frac{-4^4}{4^6} = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16} < 0$ né max né min

~~$H(P_2) = H(P_3) = 0$~~



P_2

$$f(x,y) - f(P_2) = \frac{x^2-y^2}{4-x^2-y^2}$$

$\Delta|_{x=y} = 0 \geq 0$ $\forall x$

$\Delta|_{x=\sqrt{2}}$ $\frac{2-y^2}{2-y^2} = 1 \geq 0$ $\forall x$

$\Delta|_{y=-x+2\sqrt{2}}$ $\frac{x^2-(-x+2\sqrt{2})^2}{4-x^2-(-x+2\sqrt{2})^2} = \frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-8+4\sqrt{2}x}{4-x^2-x^2-8+4\sqrt{2}x} = \frac{-8+4\sqrt{2}x}{-4+4\sqrt{2}x}$

$= \frac{\sqrt{2}x-2}{\sqrt{2}x-1} \geq 0 \iff$ $\sqrt{2}x \geq 2 \Rightarrow x \geq \sqrt{2}$; $\sqrt{2}x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{2}$

$\Downarrow$

$x \leq 0 \cup x \geq \sqrt{2}$ $\Rightarrow P_2$ è un pto di sell

P_3

$$f(x,y) - f(P_3) = \frac{x^2-y^2}{4-x^2-y^2}$$

$\Delta|_{x=y} = 0 \geq 0$ $\forall x$

$\Delta|_{y=-x-2\sqrt{2}} = \frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-8-4\sqrt{2}x}{4-x^2-x^2-8-4\sqrt{2}x} = \frac{-8-4\sqrt{2}x}{-2x^2-4-4\sqrt{2}x} = \frac{4+2\sqrt{2}x}{x^2+2+2\sqrt{2}x}$

$$\begin{cases} 4+2\sqrt{2}x \geq 0 \\ x^2+2+2\sqrt{2}x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \pm \sqrt{2-2} \Rightarrow \forall x \neq \sqrt{2} \end{cases}$$

$\forall x \neq \sqrt{2}$ ∃ pto di sella

• equazione differenziale

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \operatorname{sen} x \qquad v(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow c_1'(x) = -c_2'(x)\cdot \operatorname{tg} x \\ -c_1'(x)\operatorname{sen} x + c_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x)\operatorname{tg} x \\ c_2'(x)\operatorname{tg} x\cdot \operatorname{sen} x + c_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} '' \\ c_2'(x)\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x\right) = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} '' \\ c_2'(x)\cdot \frac{1}{\cancel{\cos x}} = \frac{1}{\cancel{\cos x}} \Rightarrow c_2(x) = \int 1\,dx = x \end{cases}$$

$$c_1'(x) = -\operatorname{tg} x \Rightarrow c_1(x) = +\int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \log|\cos x|$$

$$\Rightarrow y(x) = a\cos x + b\operatorname{sen} x + (\log|\cos x|)\cos x + x\operatorname{sen} x.$$

PROVA SCRITTA 14/06/02

- studiare la serie

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m^4 \operatorname{arctg} \frac{x^{2m}}{m^5+1}$$

$$\lim_{m\to+\infty} m^4 \operatorname{arctg} \frac{x^{2m}}{m^5+1} \cancel{=+\infty} \quad \cancel{x>0} \quad \cancel{x<0}$$

$$f_m'(x) = m^4 \cdot \frac{1}{1+\frac{x^{2m}}{m^5+1}} \cdot \frac{2mx^{2m-1}}{m^5+1} =$$

$$= \frac{\frac{2m^5x^{2m-1}}{m^5+1}}{\frac{m^5+1+x^{2m}}{m^5+1}} = \frac{2m^5x^{2m-1}}{m^5+1+x^{2m}}$$

$$f_m'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^5x^{2m-1} \geq 0 \Rightarrow x^{2m-1} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ m^5+1+x^{2m} \geq 0 \Rightarrow x^{2m} \geq -m^5-1 \quad \forall x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \geq 0$$

$$f_m'(x) = 0 \Leftrightarrow 2m^5x^{2m-1} = 0 \Leftrightarrow x^{2m-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

massimi e minimi

31)

$$f(x,y) = x^2(x^2+y^2-2y) = x^4 + x^2y^2 - 2yx^2$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3+2xy^2-4xy=0 \\ 2x^2y-2x^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(2x^2+y^2-2y)=0 \\ x^2(y-1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y-1=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x^2+y^2-2y=0 \\ x^2=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x^2+y^2-2y=0 \\ y-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y=0,\ y=2 \\ x=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^3+2xy^2-4xy=0 \\ y = \frac{2x^2}{2x^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^3+2x-4x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^3-x=0 \Rightarrow x=0,\ 2x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=1 \end{cases}$$

$P_1(0,1)$ $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ $P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ $P_4(0,y)$

$$f_{xx} = 12x^2+2y^2-4y \qquad H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2+2y^2-4y & 4xy-4x \\ 4xy-4x & 2x^2 \end{pmatrix}$$

$$f_{xy} = 4xy-4x$$

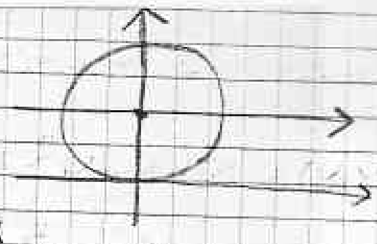
$$f_{yy} = 2x^2$$

$$H(x,y) = 24x^4+4x^2y^2-8x^2y-16x^2y^2-16x^2+32x^2y =$$
$$= 24x^4-12x^2y^2-16x^2+24x^2y$$

$H(P_1) = 0$

$H(P_2) = \cancel{24}^{6}\cdot\frac{1}{\cancel{4}} - \cancel{12}^{6}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} - \cancel{16}^{8}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{24}^{12}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 4>0$, $f_{xx}(P_2) = 6+2-4 = 4$ min

$H(P_3) = 4>0$, $f_{xx}(P_3) = 4>0$ min.



$f(x,y) - f(0,1) = x^4 + x^2y^2 - 2yx^2$

$\Delta f|_{y=1}: \ x^4 + x^2 - 2x^2 \geq 0 \iff$

$\iff x^4 - x^2 \geq 0 \iff \begin{cases} x^2 \geq 0 & \forall x \\ x^2 - 1 \geq 0 & x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases}$

$\Delta f|_{x=0} \quad 0 \geq 0 \quad \forall x$

pto di sella

• equazione differenziale

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) = e^{2x} + x^2 - 1 \\ y(0) = 1/8 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 2$

$y_0 = c_1 + c_2 e^{2x}$

$v(x) = axe^{2x}$

$v'(x) = ae^{2x} + 2axe^{2x}$

$v''(x) = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4axe^{2x}$

$4ae^{2x} + \cancel{4axe^{2x}} - 2ae^{2x} - \cancel{4axe^{2x}} = e^{2x}$

$2ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$u(x) = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$

$u'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$u''(x) = 6ax + 2b$

$6ax + 2b - 6ax^2 - 4bx - 2c = x^2 - 1$

$$\begin{cases} -6a = 1 & \Rightarrow a = -1/6 \\ 6a - 4b = 0 & \Rightarrow b = -1/4 \\ 2b - 2c = -1 & \Rightarrow c = c = 1/4 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x} - x\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)$$

$$y(0) = c_1 + c_2$$

$$y'(x) = 2c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + x e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$y'(0) = 2c_2 + \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} y(0) = \frac{1}{8} \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1/8 & \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{4} \\ 2c_2 + \frac{1}{4} = 1 & \Rightarrow c_2 = \frac{3}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - x\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)$$

PROVA SCRITTA 10/07/2002

- equazione differenziale

$$y' = \frac{2x^2 - y^2}{x^2}$$

$$y' = 2 - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = z \cdot x$$

$$y' = \int zx\,dx = z \cdot \frac{x^2}{2}$$

- massimi e minimi 32

$$f(x,y) = 4x^2 - 4x^2y^2 - x^4$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 8xy^2 - 4x^3 = 0 \\ -8x^2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4x^2 + 8y^2 - 8) = 0 \\ 8x^2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 8y^2 - 8 = 0 \\ 8xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 + 8y^2 - 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 4x^2 + 8y^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$P_1(0,1)$ $P_2(0,-1)$ $P_3(\sqrt{2},0)$ $P_4(-\sqrt{2},0)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 8 - 8y^2 - 12x^2 & -16xy \\ -16xy & -8x^2 \end{pmatrix} =$$

$$= -64x^2 + 64y^2x^2 + 96x^4 - 256x^2y^2 =$$

$$= 96x^4 - 64x - 192x^2y^2$$

$H(P_1) = 0$

$H(P_2) = 0$

$H(P_3) = 192 - 64\sqrt{2} > 0, \quad f_{xx}(P_3) = 8 - 24 < 0 \Rightarrow$ MAX

$H(P_4) = 192 - 64\sqrt{2} > 0, \quad f_{xx}(P_4) < 0$ MAX

PROVA SCRITTA 05/02/2006

• serie

33)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n}(x-1)^n \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n}(x-1)$$

$$\rho = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-1)^n}} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{n+1}(-1)\right|} = 1$$

$$X = \left]x_0-\rho,\ x_0+\rho\right[= \cancel{\left]-2,0\right[} = \left]0,2\right[$$

per $x = +2$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}(-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\cdot(-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} =$$

per $x = 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}(-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

serie cui diverge pos.

· equazione differenziale

$$y'' + y = e^x(1+\cos x) = e^x + e^x \cos x$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i$$

$$c_1 \cos x + c_2\,\text{sen}\,x$$

$$v(x) = ae^x$$
$$v'(x) = ae^x$$
$$v''(x) = ae^x$$

$$ae^x + ae^x = e^x$$
$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$v(x) = \frac{1}{2}e^x$$

$$u(x) = e^x(a\cos x + b\,\text{sen}\,x)$$
$$u'(x) = e^x(a\cos x + b\,\text{sen}\,x) + e^x(-a\,\text{sen}\,x + b\cos x)$$
$$u''(x) = \cancel{e^x(a\cos x + b\,\text{sen}\,x)} + e^x(-a\,\text{sen}\,x + b\cos x) +$$
$$+ e^x(-a\,\text{sen}\,x + b\cos x) + e^x\cancel{(-a\cos x - b\,\text{sen}\,x)}$$

$$\cancel{e^x(a\cos x + b\,\text{sen}\,x - 2a\,\text{sen}\,x + 2b\cos x}$$

$$e^x(-2a\,\text{sen}\,x + 2b\cos x) + e^x(a\cos x + b\,\text{sen}\,x) = e^x\cos x$$

$$\{(-2e^x a + e^x b)\,\text{sen}\,x + (2e^x b + e^x a)\cos x\} = e^x\cos x$$

$$\begin{cases} -2e^x a + e^x b = 0 \\ 2e^x b + e^x a = e^x \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2a \\ a = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{2}{5}$$

$$u(x) = e^x\left(\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\,\text{sen}\,x\right)$$

PROVA SCRITTA 24/02/03

$\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n^2 x}}{n^3}}$

$\cancel{\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n^2 x}}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e^{nx}}{n}\right)^n}$

• equazione differenziale

$$y'' + 4y = 2\tan x = 2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0 \iff \lambda = 0,\ \lambda = -4$$

$$a + be^{-4x} \qquad y_1 = 1,\ y_2 = e^{-4x}$$

$$v(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \dfrac{2\operatorname{sen} x}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)e^{-4x} = 0 \\ -4c_2'(x)e^{-4x} = \dfrac{2\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow c_2'(x) = \dfrac{\tan x\, e^{4x}}{-2} \end{cases}$$

$$c_1'(x) = -\frac{\tan x\, \cancel{e^{4x}}}{2} \cdot \cancel{e^{-4x}} \Rightarrow c_1(x) = \frac{1}{2}\int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\log|\cos$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{8}\int 4\tan x\, e^{4x}\,dx = -\frac{1}{8}\left[\tan x\, e^{4x} - \int \frac{1}{\cos^2 x} e^{4x}\right.$$

Boh!

massimi e minimi

34) $(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2 \neq 1 \Rightarrow y \neq 1, -1$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{y^2-1}$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2xy}{y^2-1} = 0 \\ \dfrac{x^2(y^2-1) - x^2y(2y)}{(y^2-1)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2(-y^2-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ x(-y^2-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \cancel{\begin{cases} y = 0 \\ -y^2-1 = 0 \end{cases}} \quad P_1(0,0)$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2y}{y^2-1} & \dfrac{2x(y^2-1) - 2xy(2y)}{y^2-1} = \dfrac{2x(-y^2-1)}{y^2-1} \\ \dfrac{2x(-y^2-1)}{y^2-1} & \dfrac{-2x^2y(y^2-1) - 4y[x^2(-y^2-1)]}{(y^2-1)^4} \end{pmatrix}$$

$$H(P_1) = 0$$

PROVA SCRITTA 25/11/2003

• serie

35)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2-x^2)^n}{n} \qquad x^2 = y$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}(y-2)^n$$

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-1)^n}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot -1\right|} = 1$$

~~$x = (-3, -1)$~~ $\quad x = (1, 3) \quad 1 < y < 3$

~~$-3 < y < -1$~~

~~$-3 < x^2 < -1$~~

~~$\begin{cases} x^2 < -1 & \text{MAI} \\ x^2 > -3 & \forall x \end{cases}$~~

$$\begin{cases} x^2 < 3 & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ x^2 > 1 & x < -1, x > 1 \end{cases}$$

$-\sqrt{3} \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad \sqrt{3}$

MAI

$$x =]-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}[$$

per $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

per $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

per $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ ~~oscillante~~ converge

equazione differenziale

$$y''(x) - y'(x) - 2y = 10\,\text{sen}\,x - \frac{5}{4}e^x$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 1$$

$$\underline{y_0(x) = c_1 + c_2 e^x}$$

$$v(x) = axe^x$$
$$v'(x) = ae^x + axe^x$$
$$v''(x) = ae^x + ae^x + axe^x$$

$$2ae^x + \cancel{axe^x} - ae^x - \cancel{axe^x} = -\frac{5}{4}e^x$$
$$a = -\frac{5}{4}$$

$$\underline{v(x) = -\frac{5}{4}xe^x}$$

$$u(x) = a\,\text{sen}\,x + b\cos x$$
$$u'(x) = a\cos x - b\,\text{sen}\,x$$
$$u''(x) = -a\,\text{sen}\,x - b\cos x$$

$$-a\,\text{sen}\,x - b\cos x - a\cos x + b\,\text{sen}\,x = 10\,\text{sen}\,x$$
$$(b-a)\,\text{sen}\,x + (-a-b)\cos x = 10\,\text{sen}\,x$$

$$\begin{cases} b - a = 10 \\ -a - b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2a = 10 \Rightarrow a = -5 \\ b = -a \qquad\quad b = 5 \end{cases}$$

$$u(x) = 5\cos x - 5\,\text{sen}\,x$$

$$Y(x) = y_0(x) + v(x) + u(x)$$

$$y'' + y = \operatorname{sen} x \, x \, e^x$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

$$C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

$$v(x) = e^x[(ax+b)\operatorname{sen} x + (cx+d)\cos x]$$

$$v'(x) = e^x[(ax+b)\operatorname{sen} x + (cx+d)\cos x] +$$
$$+ e^x[a \operatorname{sen} x + (ax+b)\cos x + c\cos x - (cx+d)\operatorname{sen} x]$$

$$v''(x) = e^x[(ax+b)\operatorname{sen} x + (cx+d)\cos x] + 2e^x[a \quad\quad]$$
$$+ e^x[a\cos x + a\cos x - (ax+b)\operatorname{sen} x - c\operatorname{sen} x - c\operatorname{sen} x - (cx+d)\cos$$

$$e^x[(ax+b)\operatorname{sen} x + (cx+d)\cos x + 2a\operatorname{sen} x + 2(ax+b)\cos x + 2c\cdot\cos x$$
$$- 2(cx+d)\operatorname{sen} x + 2a\cos x - (ax+b)\operatorname{sen} x - 2c\operatorname{sen} x - (cx+d)\cos x] =$$
$$= e^x[\cancel{ax\operatorname{sen} x} + \cancel{b\operatorname{sen} x} + \cancel{cx\cos x} + \cancel{d\cos x} + 2a\operatorname{sen} x + 2ax\cos x$$
$$+ 2b\cos x + 2c\cos x - 2cx\operatorname{sen} x - 2d\operatorname{sen} x + 2a\cos x - \cancel{ax\operatorname{sen} x}$$
$$- \cancel{b\operatorname{sen} x} - 2c\operatorname{sen} x - \cancel{cx\cos x} - \cancel{d\cos x}] = \operatorname{sen} x \cdot x \cdot e^x$$

$$[(2a - 2d - 2c) + (-2c)x]\operatorname{sen} x +$$
$$+ [(b + 2c + 2a) + (2a)x]\cos x = \operatorname{sen} x \, x$$

$$\begin{cases} 2a - 2d - 2c - 2cx = x \\ b + 2c + 2a + 2ax = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{2a} - 2d - 2c = 0 \Rightarrow -2d + 1 = 0 \Rightarrow d = - \\ -2c = 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \\ b + 2c + \cancel{2a} = 0 \Rightarrow b = 1 \\ 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases}$$

$$C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x + e^x[\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2}(x+1)\cos x]$$