Es.

Determinare tutti e soli i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ t.c.

$$z^2 \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{z} = -\bar{z}$$

Ris.

Se $z = 0$ l'equ. è chiaramente soddisf.

Se $z \neq 0 \iff \bar{z} \neq 0$, l'equazione è equivalente a

$$z^2 - z + 1 = 0$$

i.e.

$$z = \frac{1 + \sqrt[\mathbb{C}]{-3}}{2} = \begin{array}{l} \rightarrow \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ \searrow \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} \end{array}$$

L'equazione ammette quindi 3 soluz. distinte

$$z = 0, \quad z = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i = \left[1, \tfrac{\pi}{3}\right], \quad z = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i = \left[1, -\tfrac{\pi}{3}\right]$$

Es.

Studiare la funzione $f(x) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} + \log(1+x^2)$

Ris.

- $X = \mathrm{dom} f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
- $f \in C^\infty(X)$, non è né pari né dispari

NON E' CALCOLABILE in modo elementare il segno di f in $]-\infty, 0[$. Di certo $f > 0$ in $]0, -\infty[$

COMPORTAMENTO alla ∂X

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ no! as. obl. a $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ no! as. obl. a $+\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\pi$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \pi$

STUDIO DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot -\frac{1}{x^2} + \frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{-2 + 2x}{1 + x^2} = \frac{2(x-1)}{x^2+1} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$f' > 0$ in $]1, +\infty[$

$f' = 0$ in $x = 1$

$f' < 0$ in $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$

Il punto $(1, \frac{\pi}{2} + \lg 2) = m$ è un minimo relativo per graf f

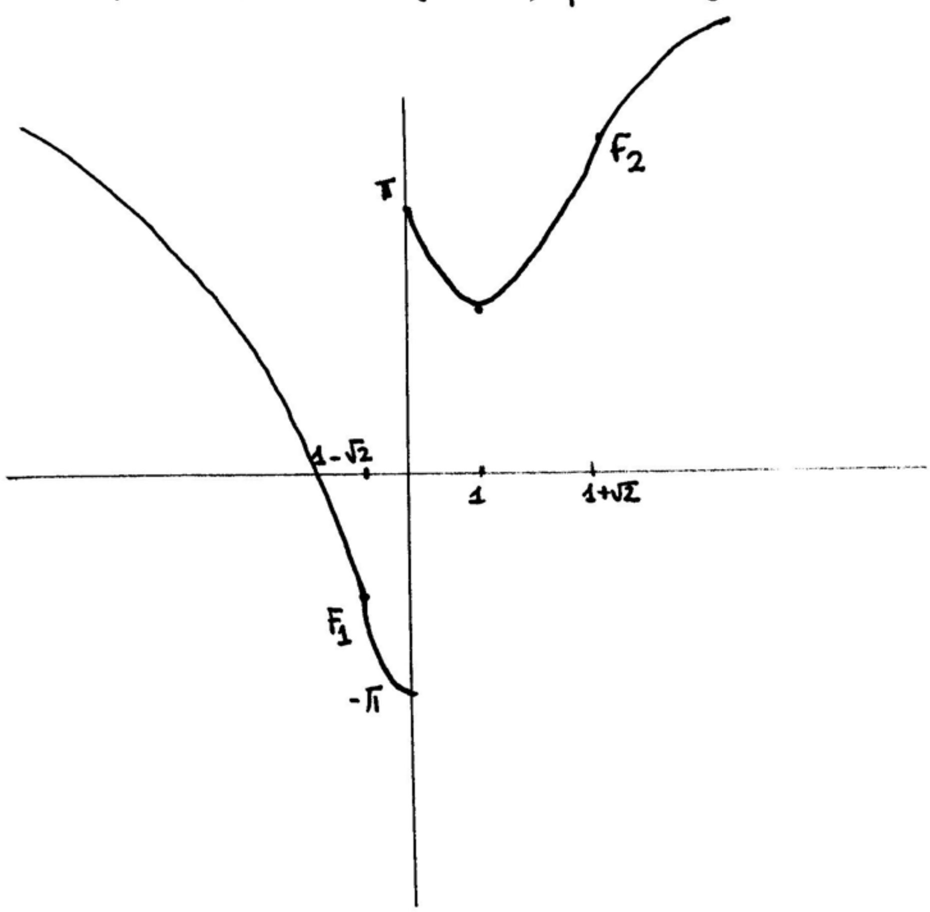
f è $\downarrow$ in $]-\infty,0[$ e in $]0,1[$
f è $\uparrow$ in $]1,+\infty[$

STUDIO DERIVATA 2ª

$$f''(x) = 2 \quad \frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} = -2 \cdot \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$$

$f''(x) > 0 \iff x^2-2x-1 < 0 \iff 1-\sqrt{2} < x < 0 \;\cup\; x \in]0, 1+\sqrt{2}[$
$f''(x) = 0 \iff x = 1-\sqrt{2}$ e $x = 1+\sqrt{2}$
$f''(x) < 0 \iff x \in]-\infty, 1-\sqrt{2}[\;\cup\;]1+\sqrt{2}, +\infty[$

Quindi
f è convessa in $]1-\sqrt{2}, 0[\cup]0, 1+\sqrt{2}[$
f è concava in $]-\infty, 1-\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}, +\infty[$
$F_1 = (1-\sqrt{2}, f(1-\sqrt{2}))$ $\quad F_2 = (1+\sqrt{2}, f(1+\sqrt{2}))$ sono due p. di flesso



Esercizio

Calcolare

$$\int_{-2}^{1} \left(2 - |x^2 - 4x + 4|\right) dx$$

Ris

Basta osservare che $|x^2-4x+4| = |(x-2)^2| = |x-2|^2 = x^2-4x+4$

quindi

$$\int_{-2}^{1} (2 - x^2 + 4x - 4)\, dx = \int_{-2}^{1} -x^2 + 4x - 2 \, dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 2x \Big|_{-2}^{1} = \left(-\frac{1}{3} + 2 - 2\right) - \left(+\frac{1}{3}\cdot 8 + 8 + 4\right)$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} - 12 = -15$$